Министерство науки и высшего образования РФ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ТРУДЫ XXVI МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Нижний Новгород, 16–18 ноября 2026 г.

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2026

УДК 004.942+519.876.5+519.6
ББК 22.18я43+22.19я43
М34

М34 **Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии.** Труды XXVI Международной конференции (Н. Новгород, 16–18 ноября 2026 г.) / Под ред. проф. Д.В. Баландина. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2026. – 359 с.

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

ISBN 978-5-908049-95-5

Сборник материалов Двадцать шестой Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», состоявшейся 16–18 ноября 2026 г. на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, содержит тезисы докладов и короткие статьи, посвященные математическому моделированию сложных процессов и явлений, численным методам их исследования, а также проблемам разработки методов суперкомпьютерных вычислений для решения актуальных задач в различных областях науки, промышленности и образования.

Подробную информацию о конференции можно найти в сети Интернет по адресу https://mmst.unn.ru.

Поддержка конференции

приоритет Программа академического лидерства Приоритет 2030

Научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего»

ISBN 978-5-908049-32-0

УДК 004.942+519.876.5+519.6
ББК 22.18я43+22.19я43

© Авторы статей, 2026
© ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2026

ПРЕДИСЛОВИЕ

16–18 ноября 2026 г. в рамках международного конгресса «Суперкомпьютерные дни в России» на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского при поддержке программы академического лидерства «Приоритет 2030» и научно-образовательного ма-тематического центра «Математика технологий будущего» проведена XXVI Международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии».

Тематика конференции охватывала основные направления в математического моделирования и суперкомпьютерных технологий:

- математическое моделирование динамики систем и процессов управления;
- теория динамических систем и бифуркаций;
- колебательные процессы в динамических сетях;
- модели и методы поддержки принятия решений;
- модели и методы искусственного интеллекта;
- математическое модели в биологии и медицине;
- математическое моделирование природных процессов;
- алгебра, геометрия и дискретная математика;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- применение суперкомпьютерных технологий для решения вычислительно-сложных задач.

На молодежной школе в формате пленарных докладов было рассказано о текущем состоянии дел в области суперкомпьютерных технологий, проанализировано развитие аппаратного обеспечения архитектуры RISC-V. В рамках научной секции представлены доклады участников школы, прошедшие рецензирование и рекомендованные программным комитетом.

Основными задачами проведения мероприятия являлись представление актуальных результатов в области математического моделирования сложных процессов и явлений, обсуждение различных аспектов организации суперкомпьютерных вычислений, расширение контактов между специалистами для решения ресурсоемких прикладных задач, обмен опытом научно-образовательной деятельности при подготовке специалистов в области математического моделирования и параллельных вычислений.

Все перечисленные темы нашли отражение в настоящем сборнике тезисов докладов и коротких статей, представленных на конференцию (публикуются частично в авторской редакции).

LATTICE BOLTZMANN MODEL WITH MODIFIED RELAXATION TIME FOR SLOW RAREFIED FLOWS IN MICRO CHANNELS[1*]

G.A. Chumarin, O.V. Ilyin

Federal Research Center "Computer Science and Control"
of the Russian Academy of Sciences, Moscow

We propose a formula for the mean free path and relaxation time for lattice Boltzmann (LB) models applied to simulating slow rarefied flows. The relaxation time is modified so that the LB velocity profiles coincide with those obtained using the linearized Bhatnagar--Gross--Krook (BGK) kinetic equation. We derive analytical velocity profiles for rarefied Couette flow using the BGK model and the nine-velocity LB scheme and deduce a formula for the wall-adjusted relaxation time (effective mean free path). In numerical experiments, we consider gas flow in smooth and rough microchannels with movable walls for a wide range of Knudsen numbers. The results are in good correspondence with the reference velocity profiles.

Keywords: microflows, lattice Boltzmann, efficient relaxation time

1. Introduction

The gas flows in micro electro mechanical devices (MEMS) are characterized by non-equilibrium effects that cannot be modeled by the Navier–Stokes equations [1]. The deviation of the gas dynamics from the continuum flow regime can be described by the Knudsen number [2]

$$Kn \sim \frac{\lambda}{H},$$

where λ is gas mean free path and H is the geometric length of the micro device. These non-equilibrium effects can be captured by using appropriate kinetic equations (Boltzmann, BGK and others) [2]. On the other hand, a typical kinetic equation for a dilute gas has an integro-differential form. In practice, their applications for the simulation of gas motion in complex geometries are limited.

The lattice Boltzmann method (LB) can be considered as a discretization in physical and velocity space of the model kinetic equations [3].

The accuracy of LB models for rarefied flows can be improved by increasing the number of discrete velocities and by using appropriate wall boundary conditions [4]. An alternative approach is to adjust the relaxation time (or equivalently, mean free path, viscosity) in LB models. Note that in the standard LB method the relaxation time $\tau=\alpha\ Kn\ H/c_s$, where α is constant (independent of Kn), c_s is constant sound velocity. The simplest way is to replace the relaxation time by the effective relaxation time τ_e [5] using the following relation

$$\tau_e = \frac{\tau}{1+2Kn}. \quad (1)$$

Such a setting allows for better capturing of gas slippage on the wall, but the Knudsen layer cannot be resolved with this approach. A more sophisticated way is to use wall-scaled relaxation time [6]

$$\tau_w = \tau\Psi\left(\frac{y}{HKn}\right), \quad (2)$$

where $\Psi(y/HKn)$ is some monotonic function, $\Psi(0)=0$, $\Psi(\infty)=1$, and y is a distance from the solid wall. For small y the wall-scaled relaxation time τ_w is smaller than τ. This reflects the fact that the mean free path in the boundary layer is smaller than in the bulk of the flow. This approach potentially better reproduces the Knudsen layer in straight micro and nano channels.

[1*] This work is supported by Russian Science Foundation, Project Number: 25-21-00114.

In this study, the derivation of the effective (wall-scaled) relaxation time formula is based on the analytical approximation to the solution of the BGK equation. Following the classical result of Gross and Jackson [8] we consider the solution to the linearized BGK equation for the rarefied Couette flow. Then, we modify the relaxation time for nine-velocity LB model in such a way that the solution for both models coincides.

2. Wall-scaled relaxation time formula based on kinetic equations

2.1. Velocity profiles for slow rarefied Couette flow based on the BGK equation

We consider a two-dimensional rarefied gas flow between two parallel plates (the plane Couette flow). Assume that y is the coordinate perpendicular to the walls, x is the coordinate parallel to the solid walls. The parallel walls move with opposite small velocities $U_w/2$, the distance between the walls equals H. Thus, the gas temperature T_0 and density ρ_0 are not disturbed; we assume that $T_0=1$, $\rho_0=1$. The gas distribution function $f(x,\xi)$, $x=(x,y)$, $\xi=(\xi_x,\xi_y)$ (ξ is the molecular velocity) satisfies the linearized BGK kinetic equation [2]

$$\tau\xi_y\frac{\partial f}{\partial y} = M(\xi)\left(1+\frac{\xi_x u_x}{T_0}\right) - f, \tag{3}$$

where τ is the constant relaxation time; the distribution function depends only on y coordinate and

$$M(\xi) = \frac{\rho_0}{2\pi T_0}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2T_0}\right)$$

and the flow velocity is given by the expression

$$u_x(y) = \frac{1}{\rho_0}\int_{\mathbb{R}^2}\xi_x f\, d^2\boldsymbol{\xi},$$

therefore, (3) is an integro-differential equation. We consider the diffuse reflection (Maxwell) boundary conditions on the solid walls (we assume that the temperature of the walls equals T_0)

$$f|_{y=-H/2} = M(1-\xi_x U_w/(2T_0)), \quad \xi_y \geq 0; \quad f|_{y=H/2} = M(1+\xi_x U_w/(2T_0)), \quad \xi_y \leq 0. \tag{4}$$

Equations (3)–(4) can be transformed into an integral equation for the flow velocity u_x. It cannot be solved analytically, but one can obtain a solution with good accuracy using the method of successive approximations. The first-order approximation is as follows:

$$\begin{aligned} u_x(y) = {} & \frac{U_w}{H}a(\tau)y + \frac{U_w}{2\sqrt{\pi}}(a(\tau)-1)\left(J_0\left(\frac{H/2+y}{\sqrt{2T_0}\tau}\right) - J_0\left(\frac{H/2-y}{\sqrt{2T_0}\tau}\right)\right) \\ & + \sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\frac{U_w}{H}a(\tau)\tau\left(J_1\left(\frac{H/2+y}{\sqrt{2T_0}\tau}\right) - J_1\left(\frac{H/2-y}{\sqrt{2T_0}\tau}\right)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

where the non-dimensional coefficient $a(\tau)$ accounts for the wall velocity slip

$$a(\tau) \equiv \frac{1}{1+\sqrt{\pi T_0}\tau/H}.$$

Here $J_n(z) \equiv \int_0^\infty s^n \exp(-s^2 - z/s)ds$ are the Abramowitz functions [2, 9] and $\partial J_n(z)/\partial z = -J_{n-1}(z)$. The formula (5) is very similar to the result obtained by Gross and Jackson [8].

2.2. Velocity profiles for the rarefied Couette flow for nine-velocity lattice Boltzmann model and efficient relaxation time

An exact solution for the stationary planar Couette flow in the D2Q9 lattice Boltzmann model with a constant relaxation time was obtained by Ansumali et al. [10]. In the present study, we use the same discrete velocity set, equilibrium distribution, flow geometry, and diffuse-reflection boundary conditions, but replace the constant relaxation time by a prescribed positive function of the transverse coordinate, $\tau=\tau(y)$. We consider the continuous-time nine-velocity lattice Boltzmann equation with a relaxation time depending on the transverse coordinate:

$$\partial_t f_i + c_{i\alpha}\,\partial_\alpha f_i = -\frac{1}{\tau(y)}\left(f_i - f_i^{eq}\right), \quad i = 0\ldots 8. \tag{6}$$

Here and below, summation over repeated Cartesian indices is implied. The discrete velocities (c_{ix},c_{iy}) and the corresponding weights w_i are

$$(c_{ix}, c_{iy}) = c\{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)\},$$
$$w_i = \frac{1}{36}\{16,4,4,4,4,1,1,1,1\}, \qquad c = \sqrt{3}c_s,$$

where $c_s=1$, ($c_s \equiv \sqrt{T_0}$) is the sound velocity for the model D2Q9. The local equilibrium distribution functions are

$$f_i^{eq} = w_i\left[\rho + \frac{j_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2} + \frac{j_\alpha j_\beta}{2\rho c_s^4}\left(c_{i\alpha}c_{i\beta} - c_s^2\delta_{\alpha\beta}\right)\right], \tag{7}$$

where $\rho = \sum_i f_i$ is a local density and $j_\alpha = \sum_i c_{i\alpha} f_i = \rho u_\alpha$, $\alpha=x,y$, are components of the local momentum density. For the steady Couette flow one obtains the following analytical profiles [12]

$$u_x(y) = U_w \frac{S(y) - S(H/2)/2}{S(H/2) + 2\sqrt{3}c_s}, \qquad S(y) = \int_{-H/2}^{y} \frac{d\eta}{\tau(\eta)}. \tag{8}$$

We now determine the spatially varying relaxation time for which the D2Q9 velocity profile (8) coincides with the first-order approximation to the solution of the BGK equation (5). Let $u_x^{BGK}(y)$ be the velocity profile given by (5); the corresponding D2Q9 profile (8) is denoted by $u_x^{LB}(y)$. We require that

$$u_x^{LB}(y) = u_x^{BGK}(y)$$

throughout the channel, therefore $d_{yux}{}^{LB} = d_{yux}{}^{BGK}$, then

$$\frac{1}{\tau(y)} = \frac{S(H/2) + 2\sqrt{3}c_s}{U_w} \frac{du_x^{BGK}}{dy}. \tag{9}$$

After some algebra, one obtains from (9) the relaxation time $\tau(y)$ for the D2Q9 model that reproduces the BGK velocity profile [12]

$$\tau(y) = \frac{U_w - 2u_x^{BGK}(H/2)}{2\sqrt{3}c_s \frac{du_x^{BGK}(y)}{dy}}, \tag{10}$$

where u_x^{BGK} is given by (5).

3. Numerical experiments

The wall-adjusted relaxation time (10) is tested for the Couette flow in smooth and rough microchannels. The velocity profiles are presented in the reference frame in which the lower and upper walls move with velocities $-U_w/2$ and $+U_w/2$, respectively, where $U_w=0.001$ is the relative velocity of the walls. The temperature and the reference density are equal to unity. The distance between the walls is denoted by $H=1$. The rarefaction parameter in the numerical experiments is denoted by k. It corresponds to the definition of the Knudsen number used by Guo et al. [6],

$$k \equiv \frac{\lambda}{H}, \qquad \lambda = \frac{\mu}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{2}}, \qquad p = \rho RT,$$

where λ and μ are the mean free path and the dynamic viscosity, respectively. The Knudsen number entering the relaxation-time relation adopted in the present study is related to k by

$$Kn = \frac{2}{\sqrt{\pi}}k.$$

The constant relaxation time is defined as

$$\tau \equiv \frac{KnH}{\sqrt{2}c_s}, \qquad c_s = 1. \tag{11}$$

Three relaxation-time models are compared. The first one is the constant value (11). The second choice is based on the wall-scaling model of Guo et al. [6]. The third choice is the present relaxation time (10). The diffuse-reflection boundary condition is imposed locally at every fluid–solid interface, following [4, 7]. Let n_w denote the unit normal directed from the solid into the gas. The distribution function of the particles re-emitted into the gas from the wall moving with the velocity vector U_w is Maxwellian

$$f_i^w = \rho_w g_i^w(\boldsymbol{U}_w), \qquad i: \boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{n}_w > 0, \tag{12}$$

where g_i^w is the local equilibrium (the Maxwell distribution) for D2Q9 model. The wall density ρ_w in (12) is evaluated from zero normal mass flux condition in the wall nodes. The periodic boundary conditions are applied in the streamwise direction.

We first consider the plane Couette flow between two smooth parallel plates, $N_y=200$, $N_x=1$. The numerical results are compared with the accurate solutions of the integral equation derived from the

linearized BGKW equation by Jiang and Luo [11]. In Fig. 1 the normalized velocity profiles u/U_w for $k \in \{0.1,0.3,1,2,3,5,7,10,30\}$ are presented. At the smallest values, $k=0.1$ and $k=0.3$, the three D2Q9 calculations give relatively close velocity profiles. The profiles obtained with the present relaxation time (10) remain substantially closer to the benchmark data over the entire range of k considered here. In particular, the model reproduces the slope of the velocity profile and the curvature in the near-wall regions. For $k=10$ and $k=30$, visible deviations from the benchmark remain; nevertheless, the present model provides a substantially more accurate profile than both the constant-relaxation-time model (11) and the Guo formula.

We next consider Couette flow in a channel whose rough lower wall and smooth upper wall move at velocities $-U_w/2$ and $+U_w/2$, respectively. In the present simulations, $N_y=200$, $N_x=1000$. The geometry corresponds to the rough-channel benchmark configuration of Su et al. [7]. The mean channel height is H, while the length is $5H$. The rough lower boundary is defined by the truncated Weierstrass–Mandelbrot function

$$\frac{y_r(x)}{H} = A\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x/H)}{\gamma^{(2-D)n}}, \tag{13}$$

where the parameters are $D=1.5, \gamma=1.5, n_1=-4, n_2=30$, the dimensionless root-mean-square roughness is $\varepsilon=\sigma/H=0.02$, which corresponds to $A=0.0148$. These values are the same as those used in [7]. The solid surface is represented on the mesh by a staircase boundary. Fig. 2 shows the averaged velocity profiles along the periodic streamwise direction for $k=0.1$ and $k=1$. The benchmark data are the discrete-velocity method (DVM) solutions of the linearized BGK equation reported in [7]. At $k=0.1$, all three D2Q9 variants reproduce the general shape of the velocity profile. The present relaxation time gives the closest overall agreement with the benchmark, particularly near the smooth upper wall. At $k=1$, the influence of rarefaction and surface roughness becomes considerably stronger. The constant-relaxation-time model (11) predicts a sharp velocity increase and strongly underestimates the velocity near the smooth wall. The wall-scaled formula of Guo et al. improves the result but still exhibits a visible discrepancy from the benchmark profile. The present model (10) reproduces the velocity profile more accurately than the other models.

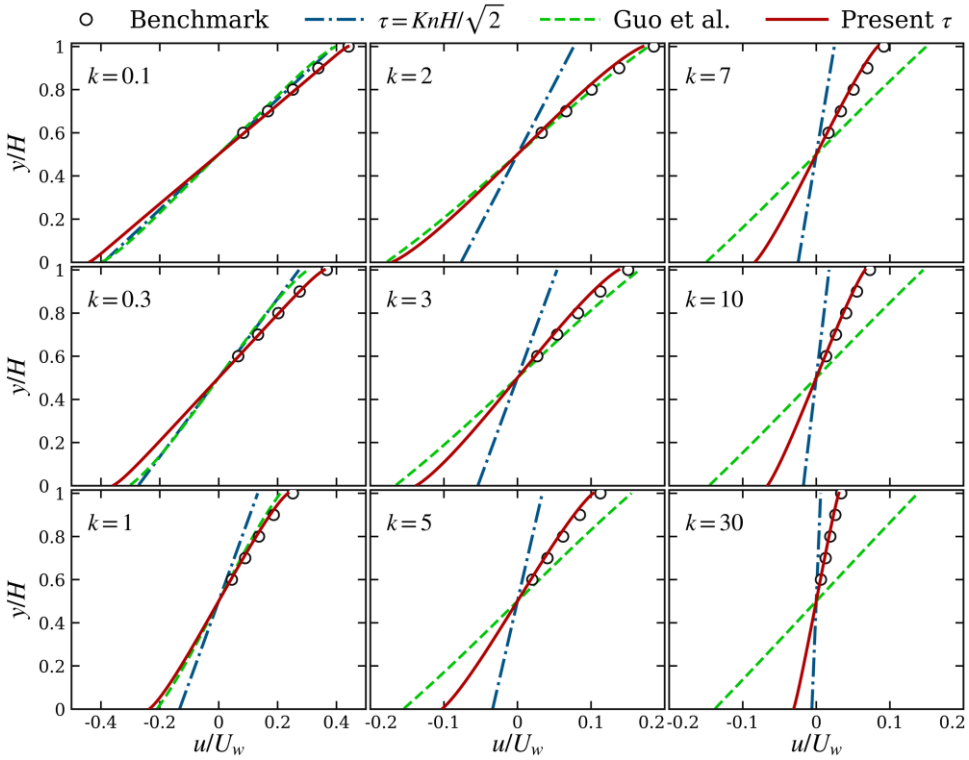


Fig. 1. Normalized velocity profiles for the Couette flow between two smooth parallel plates with the diffuse-reflection boundary conditions. The first column corresponds, from top to bottom, to $k=0.1$, 0.3, and 1; the second column to $k=2$, 3, and 5; and the third column to $k=7$, 10, and 30. Open circles denote the accurate solutions of the linearized BGK integral equation [11]; blue dash-dotted lines correspond to the D2Q9 model with the constant relaxation time (11); green dashed lines correspond to the wall-scaled relaxation time of Guo et al.; red solid lines show the D2Q9 results obtained with the present relaxation time (10).

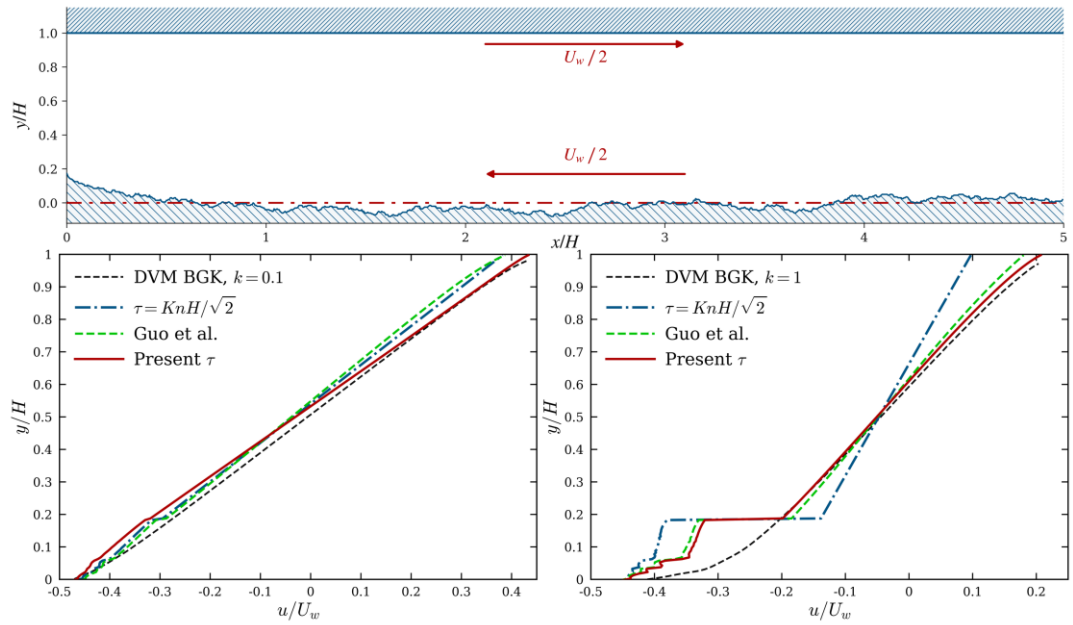


Fig. 2. Rough Couette-flow configuration and mean streamwise velocity profiles with the diffuse-reflection boundary conditions. Left: channel geometry with a rough lower wall (13) moving with velocity $-U_w/2$ and a smooth upper wall moving with velocity $+U_w/2$; the red dashed line denotes the mean level of the rough surface. Middle: $k=0.1$. Right: $k=1$. Black dashed lines denote the DVM solutions of the linearized BGK equation from [7]; blue dash-dotted lines correspond to the D2Q9 model with the constant relaxation time (11); green dashed lines correspond to the wall-scaled relaxation time of Guo; red solid lines show the results obtained with the present relaxation time (10).

References

1. Karniadakis G., Beskok A., Aluru N. Microflows and Nanoflows. Fundamentals and Simulation. Springer, New York, 2005.
2. Kogan M. Rarefied Gas Dynamics. Plenum Press, New York, 1969.
3. Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E. The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer, Cham, 2017.
4. Ambruş V., Sofonea V. Lattice Boltzmann models based on half-range Gauss–Hermite quadratures. J. Comput. Phys., 2016b, 316, P. 760–788.
5. Li Q., He Y.L., Tang G.H., Tao W.Q. Lattice Boltzmann modeling of microchannel flows in the transition flow regime. Microfluid. Nanofluid., 2011, 10, P. 607–618.
6. Guo Z., Zheng C., Shi B. Lattice Boltzmann equation with multiple effective relaxation times for gaseous microscale flow. Phys. Rev. E, 2008, 77, P. 036707.
7. Su W., Lindsay S., Liu H., Wu L. Comparative study of the discrete velocity and lattice Boltzmann methods for rarefied gas flows through irregular channels. Phys. Rev. E, 2017, 96, P. 023309.
8. Gross E., Jackson A. Kinetic models and the linearized Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1959, 2, P. 432.
9. Abramowitz M. Evaluation of the integral ∫_0^∞▒exp (-u^2-x/u) du. J. Math. Phys., 1953, 32, P. 188–192.
10. Ansumali S., Karlin I.V., Arcidiacono S., Abbas A., Prasianakis N.I. Hydrodynamics beyond Navier–Stokes: Exact solution to the lattice Boltzmann hierarchy. Phys. Rev. Lett., 2007, 98, P. 124502.
11. Jiang S., Luo L.-S. Analysis and accurate numerical solutions of the integral equation derived from the linearized BGKW equation for the steady Couette flow. J. Comput. Phys., 2016, 316, P. 416–434.
12. Chumarin G.A., Ilyin O.V. Lattice Boltzmann model with modified relaxation time for slow channel microflows. Nanosystems: Phys. Chem. Math., 2026, in press.

THE IMPACT OF TECHNICAL INDICATORS ON THE QUALITY OF FINANCIAL TIME SERIES FORECASTING BY THE FUZZYLSTM MODEL

P.A. Medvedev, M.I. Kumskov

M.V. Lomonosov Moscow State University

This study examines the impact of TA-Lib technical indicators on the quality of financial time series forecasting by a neuro-fuzzy LSTM-based model. Five input feature configurations are compared: a baseline and four extended ones – with momentum, trend, and volatility indicators, and their complete set. The experiment is conducted on daily data for 25 assets; 125 evaluations are performed in total. Analysis reveals that in most asset classes the null hypothesis of no differences is not rejected; in the "Indices" class, the baseline configuration significantly outperforms the complete set of. No statistically significant improvement in forecast quality is found when adding the studied groups of technical indicators.

Keywords: financial time series, forecasting, LSTM, fuzzy logic, FuzzyLSTM, technical indicators, TA-Lib.

1. Introduction

Financial time series forecasting is a complex data analysis task. Financial data exhibit non-stationarity, noise, and nonlinear long-term dependencies [1], which limits the applicability of classical models, particularly ARIMA and GARCH [2]. Recurrent neural networks, including LSTM [3], are employed for sequence modelling. This study uses a neuro-fuzzy LSTM modification in which parametric activation functions are interpreted as fuzzy set membership functions; it is hereafter denoted FuzzyLSTM[25].

The usefulness of explicitly adding technical indicators – transformations of price and volume that capture trend, momentum, and volatility – remains an open question. Recurrent networks can form internal representations of temporal dependencies directly from source data, so indicators may prove either useful features or redundant transformations of the series [5, 6]. Their impact is assessed through a controlled ablation experiment.

This study aims to experimentally assess changes in the quality of one-step financial time series forecasting by the FuzzyLSTM model when momentum, trend, and volatility indicators are added. Reproducibility requirements were taken into account at the planning stage [7].

The scientific novelty lies in testing, for the neuro-fuzzy FuzzyLSTM architecture, the effect previously identified for standard recurrent networks – the possible redundancy of technical indicators – on an extended set of 25 assets across five classes. The difference from the closest analogue [6] is the use of a neuro-fuzzy architecture and the expansion of the asset set; however, [6] is methodologically stronger (several architectures, five random initializations, pairwise comparisons). This work is regarded as a reproducing and extending study.

2. Basic Definitions and Problem Statement

A time series $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, is a sequence of time-ordered observations; $n = |X|$ is the series length. The observation step is one trading day. Financial time series may exhibit non-stationarity of price levels, changing volatility, structural shifts, heavy tails of returns, and volatility clustering [1]; these properties require careful selection of the model, data transformation, and out-of-sample evaluation procedure. This study addresses one-step forecasting of the next trading day's closing price [3].

A fuzzy set A on a universal set U is defined by a membership function $\mu_A: U \to [0,1]$. In the standard Zadeh construction, intersection and union are defined by minimum and maximum operations:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).))$$

Fuzzy logical inference comprises fuzzification, fuzzy inference, composition, and defuzzification [8]. Technical indicators are divided into three groups (TA-Lib classification [9]): momentum – RSI, TRIX, fastk, fastd; trend – SMA, EMA, WMA, MACD, macd_signal, macd_hist; volatility – Standard Deviation, Bollinger Bands (BB_upper, BB_middle, BB_lower), Bollinger %B.

Problem statement: given a one-dimensional time series of daily closing prices $X = (x_1, \dots, x_T)$. Using observations available by the end of day t, construct a forecast $\hat{x}_{t+1}$ of the next day's closing price.

The model comprises three stages: transformation of price into membership function values, processing by a recurrent LSTM layer, and formation of a numerical forecast by the output layer. When indicators are added, only the price undergoes fuzzification; indicators are used in numerical form. Minimax transformation parameters were estimated on the training part only. Five configurations are examined (Table 1).

Table 1. Input feature configurations of the FuzzyLSTM model

Configuration	Input feature composition
FuzzyBasic	fuzzified price series only
FuzzyMomentum	+ momentum (RSI, TRIX, fastk, fastd)
FuzzyTrend	+ trend (SMA, EMA, WMA, MACD, macd_signal, macd_hist)
FuzzyVolatility	+ volatility (StdDev, BB_upper, BB_middle, BB_lower, %B)
FuzzyAll	complete set of the listed indicators

3. LSTM Architecture

Training standard RNNs on long sequences is complicated by vanishing or exploding gradients. The LSTM architecture was proposed to mitigate this problem and to model dependencies between distant sequence elements more stably [11]. Its central element is the cell state c_t, regulated by input, forget, and output gates. Each gate comprises a sigmoid layer and pointwise multiplication:

$$f_t = \sigma\big(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f\big),$$
$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i), \quad \tilde{c}_t = \tanh(W_c \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_c),$$
$$c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \tilde{c}_t,$$
$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o), \quad h_t = o_t * \tanh(c_t).$$

Equation (1) is the forget gate, (2) the input gate, (3) the state update, and (4) the output gate. In the FuzzyLSTM modification, the standard sigmoid is replaced by a parametric one:

$$\sigma_{\text{param}}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha \cdot (x - \beta))},$$

where α (slope) and β (shift) are trainable parameters optimized jointly with recurrent layer weights. This permits the gate output to be interpreted as a fuzzy set membership degree.

4. Model Components

Loss functions. Training minimizes empirical risk:

$$L(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l\,(X_i, y_i; \theta) \to \min_{\theta}.$$

MSE was used; MAE, RMSE, and MAPE were computed on the test sample and did not participate in parameter updates.

Optimization. Adam was used for optimization:

$$m = \beta_1 m + (1-\beta_1) g, \quad s = \beta_2 s + (1-\beta_2) g^T g, \quad \theta = \theta - \varepsilon_k \cdot \frac{m}{\sqrt{s+\varepsilon}},$$

with $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$, $\varepsilon = 10^{-8}$ [11].

Evaluation metrics. MAE is expressed in target variable units; RMSE is sensitive to large errors; MAPE is expressed in percent and convenient for comparing assets with different price ranges [12]. The final set: MSE during training; Adam with the specified coefficients; MAE, RMSE, MAPE for evaluation [15].

5. Software

The experiment was implemented in Python [16] in Google Colab [17]. The following were used: TensorFlow [18], Scikit-learn [19], TA-Lib [20], NumPy [21], Pandas [22], Matplotlib [23], yfinance [24].

6. Computational Experiment

Daily data were used for 25 assets across five classes:

- US stocks: AAPL, INTC, TSLA, NVDA, MSFT;
- currency pairs: EURUSD=X, CHF=X, JPY=X, GBPUSD=X, AUDUSD=X;
- cryptocurrencies: BTC-USD, ETH-USD, SOL-USD, BNB-USD, XRP-USD;
- stock indices: ^GSPC, ^IXIC, ^DJI, ^FTSE, ^N225;
- commodity futures: GC=F, CL=F, SI=F, HG=F, NG=F.

Data were divided into training (75%) and test (25%) samples in chronological order. Parameters: LSTM neurons – 16, lookback – 1, epochs – 100, batch size – 32, fuzzification window – 10.

Statistical analysis: Friedman test with Nemenyi post-hoc test [13][14]; block – ticker (n = 5 per category); analysis separately for five asset classes and three metrics (RMSE, MAE, MAPE).

Results. In the "US stocks" category, FuzzyBasic most often showed the minimum point error value; for NVDA, FuzzyMomentum and FuzzyAll showed significant deterioration. In the "Currency pairs" category, FuzzyBasic also most often showed the minimum error value; this category was the most stable. In the "Cryptocurrencies" category, FuzzyMomentum led (minimum for SOL and XRP); FuzzyTrend led for BTC. In the "Stock indices" category, FuzzyBasic led; for ^IXIC, FuzzyTrend and FuzzyAll showed RMSE > 3000 [12]. In the "Commodity futures" category, FuzzyBasic most often showed the minimum error value.

By descriptive ranking, FuzzyBasic ranked first in four of five asset classes; no statistically significant overall advantage was found. FuzzyMomentum ranked first in one class (cryptocurrencies). FuzzyTrend and FuzzyVolatility ranked first in no class. FuzzyAll ranked first in no class and in several cases had higher errors; its quality can be deemed significantly worse only in the "Indices" category. The difference in training time between configurations did not reach statistical significance.

Statistical analysis results. Significant differences were found in the "Indices" class across all three metrics (Friedman, $p \approx 0.01$); the Nemenyi post-hoc test showed FuzzyBasic superiority over FuzzyAll. In the "Futures" class, MAE differences are borderline significant ($p = 0.045$), but pairwise comparisons do not confirm this. In the remaining classes, the null hypothesis is not rejected.

Experimental conclusions. 1) The baseline FuzzyBasic model is the most reliable: FuzzyLSTM can independently extract meaningful information from the price series. 2) The complete set of indicators (FuzzyAll) is contraindicated: feature redundancy impairs generalization. 3) The indicator effect depends on the asset class: for currencies all models are practically identical, for cryptocurrencies momentum and trend indicators give a local advantage, for stocks and indices FuzzyBasic remains best. 4) Quality degradation correlates with volatility. 5) Training time is not a limiting factor. 6) At $\alpha = 0.05$, the null hypothesis is not rejected in most classes; the exception is "Indices" (significant FuzzyBasic superiority over FuzzyAll across all three metrics). In "Futures," MAE differences are borderline significant, but pairwise comparisons do not confirm this.

7. Conclusion

An experimental study of the impact of TA-Lib technical indicators on the quality of financial time series forecasting by a neuro-fuzzy LSTM-based model has been conducted. Five configurations

were implemented; the experiment was performed on daily data for 25 assets across five classes; 125 training and test evaluations in total.

Main results. First, adding indicators does not yield universal improvement: in four of five categories, FuzzyBasic was best. Second, FuzzyAll consistently ranked last. Third, the effect depends on the asset class: for currencies, indicator choice was irrelevant; for cryptocurrencies, trend indicators gave a local advantage for BTC and ETH, but for XRP FuzzyTrend was worst. Fourth, the difference in average training time between configurations did not exceed 12%. Fifth, significant differences were found in the "Indices" class across all three metrics; the Nemenyi post-hoc test confirmed FuzzyBasic superiority over FuzzyAll. In "Futures," MAE differences are borderline significant, but pairwise comparisons do not confirm this. In the remaining classes, the null hypothesis is not rejected.

The absence of significant improvement in most classes is consistent with the results of the non-peer-reviewed preprint by N. A. Said [6], which compared LSTM and GRU with groups of technical indicators. In the "Indices" class, the significant superiority of the baseline configuration over the complete set is consistent with the hypothesis of possible indicator redundancy. This is a basis for further verification, not proof of universality. The experiment in [6] is methodologically stronger (several architectures, five initializations, pairwise comparisons, effect sizes); the present work is a reproducing and extending study.

References

1. Shiryaev A.N. Fundamentals of Stochastic Financial Mathematics: in 2 vols. Vol. 1: Facts, Models. Moscow: MCCME, 2016. 489 p.
2. Andersen T.G., Davis R.A., Kreiß J.-P., Mikosch T. (eds.) Handbook of Financial Time Series. Berlin: Springer, 2009. 1050 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71297-8.
3. Sezer O.B., Gudelek M.U., Ozbayoglu A.M. Financial Time Series Forecasting with Deep Learning: A Systematic Literature Review: 2005–2019 // Applied Soft Computing. 2020. Vol. 90. Art. 106181. DOI: 10.1016/j.asoc.2020.106181.
4. Ožbot M., Škrijanc I., Štruc V. A Neuro-Fuzzy System for Interpretable Long-Term Stock Market Forecasting // ERK 2025: 34th International Electrotechnical and Computer Science Conference. Portorož, 2025. arXiv:2510.00960.
5. Liu M., Shin S.-Y. Adaptive Multi-Modal Deep Learning for Financial Market Prediction: A Multi-Scale Attention Approach // Journal of The Korea Society of Computer and Information. 2025. Vol. 30, No. 12. P. 297–304. DOI: 10.9708/jksci.2025.30.12.297.
6. Saidd N.A. Do Technical Indicators Improve Deep Learning Forecasts? An Empirical Ablation Study Across Asset Classes. Preprints.org, 2026. 37 p. DOI: 10.20944/preprints202602.0692.v1. (Publication has not undergone peer review.)
7. Buczyński M., Chlebus M., Kopczewska K., Zajenkowski M. Financial Time Series Models – Comprehensive Review of Deep Learning Approaches and Practical Recommendations // Engineering Proceedings. 2023. Vol. 39, Iss. 1. DOI: 10.3390/engproc2023039009.
8. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, No. 3. P. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
9. Mostafavi S.M., Hooman A.R. Key Technical Indicators for Stock Market Prediction // Machine Learning with Applications. 2025. Vol. 20. Art. 100631. DOI: 10.1016/j.mlwa.2025.100631.
10. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9, No. 8. P. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735.
11. Kingma D.P., Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization // Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations (ICLR). San Diego, 2015. arXiv:1412.6980.
12. Hyndman R.J., Koehler A.B. Another Look at Measures of Forecast Accuracy // International Journal of Forecasting. 2006. Vol. 22, No. 4. P. 679–688. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.
13. Diebold F.X., Mariano R.S. Comparing Predictive Accuracy // Journal of Business and Economic Statistics. 1995. Vol. 13, No. 3. P. 253–263. DOI: 10.1080/07350015.1995.10524599.
14. Demšar J. Statistical Comparisons of Classifiers over Multiple Data Sets // Journal of Machine Learning Research. 2006. Vol. 7. P. 1–30.

15. Hewamalage H., Bergmeir C., Bandara K. Recurrent Neural Networks for Time Series Forecasting: Current Status and Future Directions // International Journal of Forecasting. 2021. Vol. 37, No. 1. P. 388–427. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2020.06.008.
16. Python. URL: https://www.python.org/
17. Google Colab. URL: https://colab.research.google.com/
18. TensorFlow. URL: https://www.tensorflow.org/
19. Scikit-learn. URL: https://scikit-learn.org/
20. TA-Lib. URL: https://github.com/TA-Lib/ta-lib-python
21. NumPy. URL: https://numpy.org/
22. Pandas. URL: https://pandas.pydata.org/
23. Matplotlib. URL: https://matplotlib.org/
24. yfinance. URL: https://pypi.org/project/yfinance/
25. Makhova A.G. Issledovanie variantov arkhitektur neironnykh setei s pamyat'yu na osnove nechetkoi logiki v zadache prognozirovaniya finansovykh vremennykh ryadov [Research of Variants of Memory Neural Network Architectures Based on Fuzzy Logic in the Problem of Financial Time Series Forecasting]: coursework. Moscow: Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of Probability Theory, 2025. 38 p.

О СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Н.Ф. Алексиадис, Айар Аунг Сет

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Современные методы глубокого обучения нейронных сетей основаны на минимизации функции ошибок с использованием алгоритмов оптимизации. В докладе рассматривается задача сравнительного анализа методов оптимизации комплексных нейронных сетей. Было исследовано пять методов оптимизации (Momentum, Adam, Adadelta, Adagrad и SGD) и все методы применялись на одной и той же архитектуре сети и при фиксированных условиях обучения. Результаты экспериментов показали, что методы различаются по скорости сходимости и точности результатов, а также по устойчивости модели.

Ключевые слова: нейронные сети, функции активации, методы оптимизации, устойчивость модели.

1. Постановка задачи

Комплексная нейронная сеть – это искусственная нейронная сеть, у которой входные данные и веса представлены комплексными числами, а функции активации – комплексными функциями активации [1].

Целью настоящего исследования является сравнительный анализ влияния различных методов оптимизации на процесс обучения при одной и той же архитектуре комплексной нейронной сети.

Для достижения поставленной задачи решаем следующие вопросы:

1. построение архитектуры изучаемой нейронной сети;
2. исследование влияния различных методов оптимизации, включая SGD, SGD с импульсом (Momentum), Adam, Adagrad и Adadelta, на процесс обучения фиксированной комплексной нейронной сети;
3. сравнение методов оптимизации по сходимости, потерям и точности на валидационной выборке и оценка устойчивости полученных результатов при разных начальных значениях seed.

Актуальность задачи вызвана тем, что, во-первых, исходные данные часто представляются в комплексной форме, во-вторых, новые исследования показывают превосходство комплексных нейронных сетей по сравнению с действительными нейронными сетями [2-4], в-третьих, эффективность обучения одного комплексного нейрона выше действительного нейрона, так как функциональность одного комплексного нейрона намного больше, чем у действительного, и тем самым, комплексная нейронная сеть того же размера, что и действительная, будет обучаться быстрее [1,4].

2. Материалы и методы исследования

Для проведения эксперимента используется набор данных FFT-MNIST, сформированный на основе общедоступного набора рукописных цифр MNIST (https://www.kaggle.com/ datasets/ hojjatk/ mnist-dataset, дата обращения: 10.09.2026). Исходный набор данных содержит 70000 объектов, который разделён на обучающую (50000 объектов), проверочную (валидационную) (12000 объектов) и тестовую (контрольную) выборки (8000 объектов).

Для анализа был выбран комплексный многослойный персептрон. Разработанная комплексная нейронная сеть имеет входной слой размерности 784, два скрытых слоя из 256 и 128 нейронов соответственно и выходной слой – 10 нейронов, соответствующих классам цифр от 0 до 9. Общая структура построенной комплексной нейронной сети представлена на рис. 1.

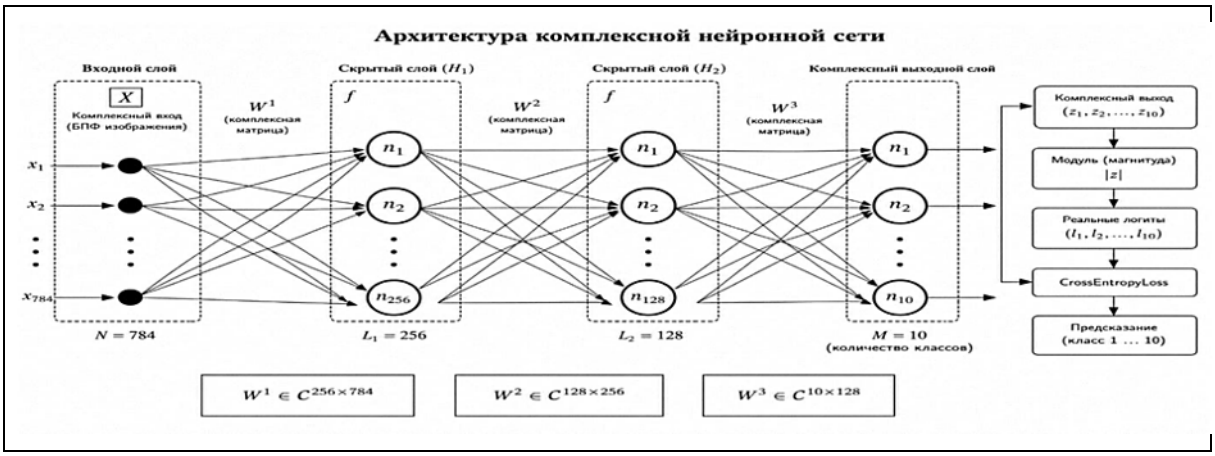


Рис. 1. Архитектура комплексной нейронной сети

В скрытых слоях этой сети используется функция активации ModReLU [5]:

$$f(z) = ReLU(|z| + b) \cdot \frac{z}{|z|}.$$

А также применяется пять широко используемых методов оптимизации параметров: SGD, Momentum, Adam, Adagrad и Adadelta [4]. SGD относится к типу простого градиентного спуска, Momentum – к типу импульсных методов, а Adagrad, Adadelta и Adam – к типу адаптивных методов.

Экспериментальная часть исследования была выполнена с использованием языка программирования Python и библиотеки PyTorch, а обучение комплексной нейронной сети осуществлялось с использованием алгоритма обратного распространения ошибки (Backpropagation) [6], после чего параметры обновлялись выбранным методом оптимизации. Размер мини-пакета (batch size) установлен равным 64 во всех экспериментах.

В процессе обучения эксперименты проводились на протяжении 100 эпох. В выходном слое формируется комплексный вектор логитов Z размерности 10 ($Z \in C^{10}$). Для перехода к пространству действительных чисел, необходимому для вычисления функции потерь и последующей классификации, выполняется операция взятия модуля (magnitude operation) для каждого комплексного логита:

$$l_i = |Z_i| = \sqrt{Re(Z_i)^2 + Im(Z_i)^2},$$

где $i \in \{0, \cdots, 9\}$. В результате данной операции комплексные логиты преобразуются в действительный вектор логитов $l \in R^{10}$.

Полученный вектор логитов непосредственно передаётся в функцию потерь *CrossEntropyLoss*, значение которой определяется путём сравнения предсказанных результатов с истинными метками классов и используется для вычисления градиентов методом обратного распространения ошибки и последующего обновления весовых коэффициентов сети.

3. Сравнительный анализ результатов

При оценке влияния метода оптимизации исследовались динамика функции потерь и точности на обучающей и валидационной выборках, итоговые показатели на тестовой выборке и устойчивость результатов. Для всех методов использовались одинаковые условия экспериментального протокола, при этом менялся только метод оптимизации. Каждый эксперимент выполнялся с пятью различными значениями seed для оценки устойчивости результатов на протяжении всего процесса обучения.

На рис. 2 показана динамика функции потери на обучающей и валидационной выборках при использовании различных методов оптимизации.

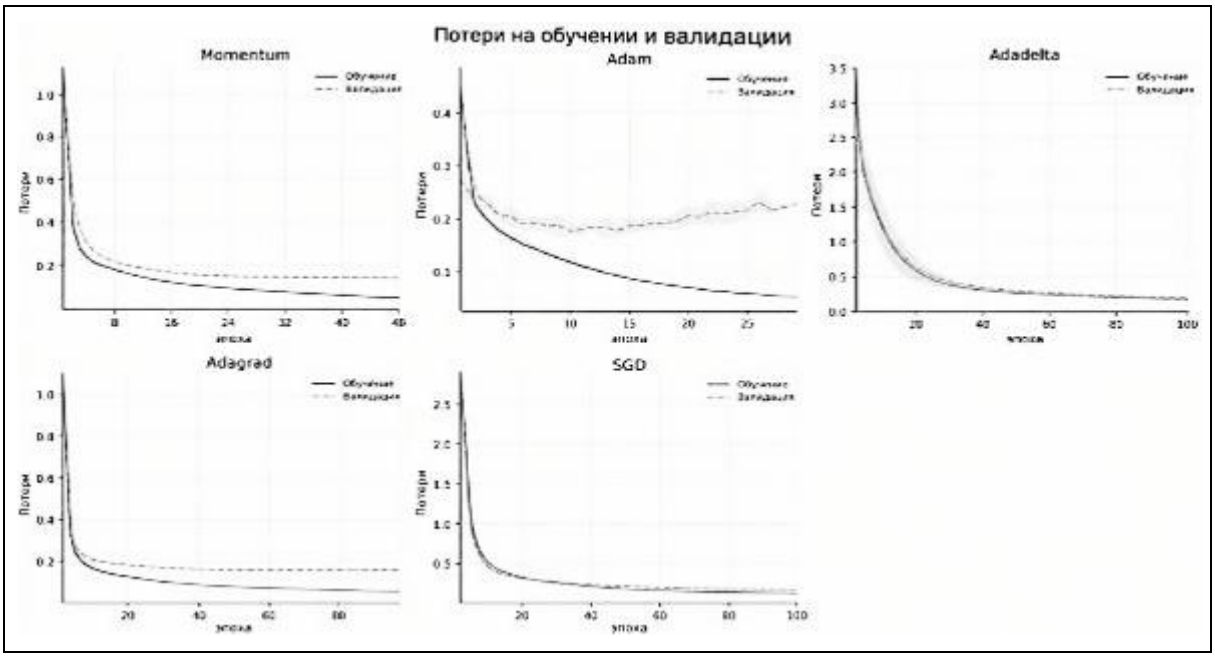


Рис. 2. Изменение функции потерь на обучающей и валидационной выборках для различных методов оптимизации

На рис. 3 показана динамика точности на обучающей и валидационной выборках при использовании различных методов оптимизации.

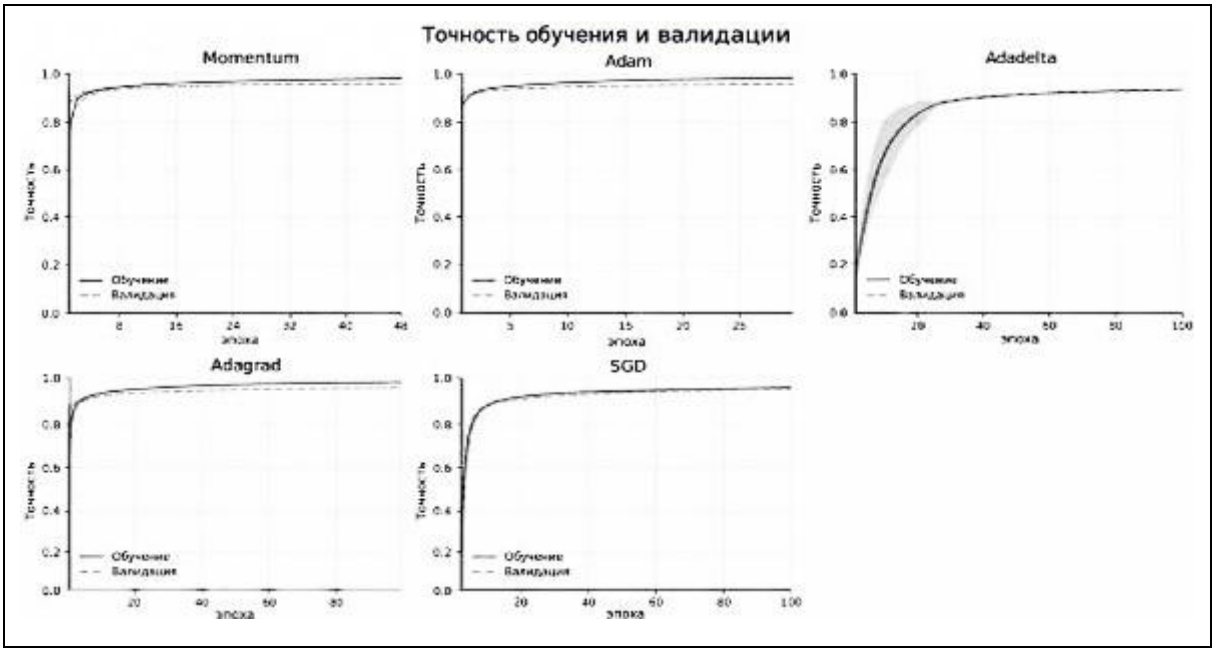


Рис. 3. Изменение точности на обучающей и валидационной выборках при использовании различных методов оптимизации

Полученные результаты позволяют сопоставить методы оптимизации по характеру изменения показателей в процессе обучения, скорости достижения устойчивых значений и характеру колебаний кривых.

Для количественной оценки в таб.1 приведены средние потери и точность на валидационной и тестовой выборках.

Таблица 1. Сравнительные результаты методов оптимизации

Метод	Валидационная точность (%)	Валидационные потери	Тестовая точность (%)	Тестовые потери
SGD	94.73 ± 0.19	0.1805 ± 0.0027	94.47 ± 0.27	0.1843 ± 0.0055
Momentum	95.55 ± 0.21	0.1554 ± 0.0069	95.48 ± 0.38	0.1607 ± 0.0080
Adam	95.25 ± 0.32	0.1766 ± 0.0098	95.05 ± 0.26	0.1787 ± 0.0083
Adagrad	94.55 ± 0.19	0.1946 ± 0.0039	94.41 ± 0.37	0.2011 ± 0.0105
Adadelta	93.00 ± 0.16	0.2451 ± 0.0103	93.02 ± 0.29	0.2462 ± 0.0079

В рамках данного эксперимента, согласно полученным значениям, Momentum показал наиболее высокие значения точности на валидационной и тестовой выборках по сравнению с другими методами.

Заключение

В данной работе выполнен сравнительный анализ методов оптимизации комплексных нейронных сетей. Исследована эффективность пяти методов оптимизации (Momentum, Adam, Adadelta, Adagrad и SGD). Полученные результаты демонстрируют, что метод оптимизации Momentum показывает наиболее высокие значения точности и наиболее низкие значения потерь в рамках.

Литература

1. Lee C.Y., Hasegawa H., Gao S.C. Complex-Valued Neural Networks: A Comprehensive Survey, IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2022, vol. 9, no. 8, pp. 1406–1426. DOI: 10.1109/JAS.2022.105743.
2. R. Chakraborty, Y. Xing, and S. X. Yu, “SurReal: Complex-Valued Learning as Principled Transformations on a Scaling and Rotation Manifold”, IEEE Trans. Neural Networks Learn. Syst., vol. 33, no. 3, pp. 940–951, 2022, doi: 10.1109/TNNLS.2020.3030565.
3. U. Singhal, Y. Xing, and S. X. Yu, “Co-domain Symmetry for Complex-Valued Deep Learning”, Dec. 2021, Accessed: Mar. 14, 2022. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2112.01525
4. J. Bassey, L. Qian, and X. Li, “A Survey of Complex-Valued Neural Networks”, 2021, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2101.12249.
5. Trabelsi C., Bilaniuk O., Zhang Y., et al. Deep Complex Networks, 6-th International Conference on Learning Representations (ICLR), Vancouver, 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1705.09792.
6. T. Nitta, “An extension of the back-propagation algorithm to complex numbers”, Neural Networks, vol. 10, no. 8, pp. 1391–1415, 1997, DOI: 10.1016/S0893-6080(97)00032-4.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.Г. Антоновская

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

Для непрерывных динамических систем, математические модели которых представляют собой дифференциальные системы, обсуждается возможность выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающей выполнение условия знакоотрицательности первой производной в силу соответствующей линеаризованной системы с заданным запасом.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальная система, положительно определенная квадратичная форма, функция Ляпунова.

1. Введение

В задачах исследования математических моделей непрерывных динамических систем на устойчивость прямым методом Ляпунова одним из основных вопросов является вопрос о выборе подходящей функции Ляпунова [1,2]. При этом на практике широкое применение находят квадратичные функции Ляпунова, построенные для соответствующих линеаризованных систем [3, С. 120-132]. При решении прикладных динамических задач важную роль начинают играть количественные характеристики системы, поэтому появляется необходимость использования ограничений на величину первой производной функции Ляпунова в силу соответствующей линеаризованной системы [4].

В настоящей работе рассматривается задача выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей подобным ограничениям на первую производную, с помощью простых явных соотношений. Рассмотренная методика основана на переходе в системе к каноническим переменным.

2. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению на ее первую производную

Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнено неравенство $\dot{V} \leq \delta V, \delta < 0, x \neq 0$ в силу линейной автономной системы естественно выбирать с использованием следующего утверждения, доказанного в работах [4,5], а именно: пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

такая, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. И пусть положительно определенная квадратичная форма задана соотношением

$$V(x) = x^T K x \quad (K^T = K). \tag{2}$$

Элементы постоянных $n \times n$ −матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, K = (K_{ij})_{i,j=1}^{n}$ вещественные. Рассмотрим первую производную квадратичной формы (2) в силу системы (1).

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T K + KA) x. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть квадратичная форма* (2) *является функцией Ляпунова системы* (1) *и на заданной поверхности уровня* $V(x) = V_0 = const > 0$ *функции* $V(x)$ *максимальное значение ее первой производной* (3) *в силу системы* (2) *равно* δV_0. *Тогда для собственных значений* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *матрицы коэффициентов системы* (1) *справедливо неравенство* $2 \max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i \leq \delta < 0$, *а* δ *является наибольшим корнем уравнения*

$$det(A^T K + KA - \mu K) = 0. \tag{4}$$

Следует отметить, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

приводящее систему к каноническому виду. (Столбцы матрицы B являются собственными векторами, соответствующими собственным значениям матрицы A.) Построив функцию Ляпунова с необходимыми свойствами в канонических переменных, мы можем получить ее и в исходных переменных с помощью обратного перехода [6].

2.1. Случай различных корней характеристического уравнения

Пусть все корни характеристического уравнения различны.

1. Если два наибольших корня характеристического уравнения $\lambda_{n-1} < \lambda_n < 0$ действительны, тогда в качестве квадратичной функции Ляпунова в канонических переменных можно выбрать квадратичную форму [6]

$$V(\xi) = \xi^T K \xi \quad (K^T = K), \tag{6}$$

для которой $K_{ii} > 0 \ \ (i = \overline{1,n}), \ K_{ij} = 0 \ (i \neq j)$, за исключением случая $i = n-1, j = n$ и наоборот). При этом $K_{ii} = K_{i-1,i-1}$ для любой пары комплексно сопряженных корней $\lambda_{i-1,i} = \alpha \pm i\beta$, а, кроме того,

$$K_{n-1,n}^2 = \big(1 - R(\delta)\big) K_{n-1,n-1} K_{nn}, R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 (\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta)^{-2} (2\lambda_n \leq \delta < 0). \tag{7}$$

2. Если два корня характеристического уравнения, соответствующие наибольшим действительным частям, являются комплексно-сопряженными $\lambda_{n-1} = \alpha \pm i\beta$, тогда в качестве квадратичной функции Ляпунова в канонических переменных можно выбрать [6] квадратичную форму (6), для которой $K_{ii} > 0 \ \ (i = \overline{1,n}), \ K_{ij} = 0 \ (i \neq j)$, за исключением случая $i = n-1, j = n$ и наоборот). При этом $K_{ii} = K_{i-1,i-1}$ для любой пары комплексно сопряженных корней $\lambda_{i-1,i} = \alpha \pm i\beta$, а, кроме того,

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta)\big(K_{n-1,n-1} K_{nn} - K_{n-1,n}^2\big), C(\delta) = (\delta - 2\alpha)^2 \beta^{-2} + 4. \tag{8}$$

2.2. Случай кратных действительных корней характеристического уравнения

Пусть канонический вид системы (1) есть

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi, \tag{9}$$

причем $\lambda_1, = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Тогда если $\Lambda = diag\{\lambda, \lambda, \dots, \lambda\}$, для любой положительно определенной квадратичной формы вида (2) $\dot{V}(x) = 2\lambda V(x)$. Если же $\Lambda = J_n$, где J_n – жорданова клетка порядка n с элементами λ на главной диагонали, то, выбирая квадратичную функцию Ляпунова с матрицей $K = diag\{K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}\}$ получим, что уравнение (4) примет вид [7]

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = 0, \tag{10}$$

где при $n \geq 4$

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = (2\lambda - \mu) K_{11} D_{n-1}(\mu, K_{22}, K_{33}, \dots, K_{nn}) - \\ - K_{11}^2 D_{n-2}(\mu, K_{33}, \dots, K_{nn}),$$

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}) = (2\lambda - \mu) K_{11} K_{22} - K_{11}^2,$$

$$D_3(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = (2\lambda - \mu) K_{11} D_2(\mu, K_{22}, K_{33}) - (2\lambda - \mu) K_{11}^2 \, K_{33}.$$

Но тогда, если считать, что все отношения $k = K_{i-1,i-1}/K_{ii}, \ i = \overline{2,n}$ равны между собой, при $n = 2$ равен $\mu_{max} = 2\lambda + \sqrt{k}$, при $n = 3$ равен $\mu_{max} = 2\lambda + \sqrt{2k}$, при $n = 4$ равен $\mu_{max} = 2\lambda + (\sqrt{5} + 1)\sqrt{k}$, при $n = 5$ равен $\mu_{max} = 2\lambda + \sqrt{3k}$, при $n = 7$ равен $\mu_{max} = 2\lambda + (\sqrt{2} + 2)\sqrt{k}$ и т.д., где μ_{max} – наибольший корень уравнения (10). А из равенства $\mu_{max} = \delta \ (2\lambda < \delta < 0)$, при каждом конкретном n можно получить соответствующее значение k, а именно [7]: при $n = 2 \ k = (2\lambda - \delta)^2$, при $n = 3 \ k = (2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 4 \ k = (3 - \sqrt{5})(2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 5 \ k = (2\lambda - \delta)^2/3$, при $n = 7 \ k = (2\lambda - \delta)^2/(6 + 4\sqrt{2})$ и т.д.

При наличии в матрице Λ нескольких жордановых клеток разного порядка, с каждой из них следует поступать описанным выше способом. Если жорданова клетка порядка m соответствует наибольшему корню характеристического уравнения, то квадратичная функция Ляпунова выби-

рается с диагональной матрицей, коэффициенты которой, соответствующие меньшим корням характеристического уравнения, находятся по принципу, описанному в предыдущем пункте. Если же жордановы клетки соответствуют нескольким собственным значениям, то для меньших собственных значений выбираются коэффициенты, соответствующие некоторому $\tilde{\delta} < \delta$.

2.3. Случай кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения

Теперь задача состоит в выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обладающей свойством ограниченности ее первой производной в силу линейной дифференциальной системы в случае, когда матрица системы может быть приведена к виду пары Жордановых клеток порядка m, соответствующих комплексно-сопряженным корням $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (т.е. $n = 2m$).

В этом случае канонический вид системы [8, С.184]

$$\dot{\xi} = J_{2m}\xi, \tag{11}$$

т.е. матрица системы есть $2m \times 2m$ матрица в вещественной Жордановой канонической форме

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C(\alpha,\beta) & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

в которой блоки

$$C(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$D_m\left(\mu, K_{11}, K_{33}, \dots, K_{2m-1,2m-1}\right) = \det(A_K - \mu K) = 0. \tag{14}$$

При этом элементы A_{ij} $i,j = \overline{1,2m}$ матрицы $A_K = J_{2m}^T K + K J_{2m}$будут иметь вид

$$A_{2k-1,2k-1} = A_{2k,2k} = 2\alpha K_{2k-1,2k-1}, A_{2k-1,2k+1} = A_{2k+1,2k-1} = K_{2k-1,2k-1}, k = \overline{1,m},$$

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} \; i = \overline{1,2m}, \qquad A_{ij} = 0, |i-j| > 2, \qquad i,j = \overline{1,2m}.$$

То есть матрица A_K есть пятидиагональная матрица, и в уравнении (14) присутствует определитель пятидиагональной матрицы, причем коэффициенты, содержащие μ, стоят только на главной диагонали.

Существуют различные методы и алгоритмы вычисления определителей пятидиагональных матриц [9]. Однако ввиду достаточно простого вида определителя, входящего в уравнение (14), можно получить явные выражения для его разложения при конкретных значениях m:

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{33}) = K_{11}^2((2\alpha-\mu)^2 K_{33} - K_{11})^2,$$

$$D_3(\mu, K_{11}, K_{33}, K_{55}) = K_{11}^2(2\alpha-\mu)^2(((2\alpha-\mu)^2 K_{55} - K_{33})^2 K_{33} - K_{11}K_{55})^2,$$

$$D_4(\mu, K_{11}, K_{33}, K_{55}, K_{77}) = K_{11}^2\left(\left(((2\alpha-\mu)^2 K_{33} - K_{11})(2\alpha-\mu)^2 K_{77} - K_{55}\right) - (2\alpha-\mu)^2 K_{77} K_{33}^2\right)^2.$$

Но тогда, если считать, что все отношения $\frac{K_{2i-3,2i-3}}{K_{2i-1,2i-1}} = k, (\, i = \overline{2,m})$ равны между собой, получим, что максимальный корень уравнения (13) при $m = 2$ равен $\mu_{max} = 2\alpha + \sqrt{k}$, при $m = 3$ равен $\mu_{max} = 2\alpha + \sqrt{2k}$, при $m = 4$ равен $\mu_{max} = 2\alpha + (\sqrt{5}+1)\sqrt{k/2}$ и т.д. А из равенства $\mu_{max} = \delta$ при $2\alpha < \delta < 0$ можно получить соответствующее значение k: при $m = 2$ значе-

ние $k = (2\alpha - \delta)^2$, при $m = 3$ значение $k = (2\alpha - \delta)^2/2$, при $m = 4$ значение $k = (3 - \sqrt{5})(2\alpha - \delta)^2/2$ и т.д.

Если некоторой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения соответствуют жордановы блоки, содержащие несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет удовлетворять заданным ограничениям на ее первую производную. Если же жордановы клетки соответствуют нескольким собственным значениям, то для собственных значений с меньшими действительными частями выбираются коэффициенты, соответствующие некоторому $\tilde{\delta} < \delta$.

Литература

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., 1950. 472 с.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Наука, 1966. 208 с.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
4. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220-1224.
5. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной системы при стационапных возмущениях ее коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295-902.
6. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами //Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275-281.
7. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных корней характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 707-711.
8. Хорн Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
9. Урдалетова А.Б. Решение систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов // Наука, техника, образование. 2016. №10(28). С. 6-8.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ НА $\boldsymbol{P^1 \times P^1}$ И СКЕЛЕТЫ ТРИГОНАЛЬНЫХ КРИВЫХ[1*]

С.А. Аристов, В.И. Звонилов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Вещественная алгебраическая кривая бистепени (*m*,*n*) на $\boldsymbol{P^1 \times P^1}$ задаётся вещественным многочленом, однородным по каждой паре однородных координат на сомножителях, (*m*,*n*) -- степени однородности многочлена. Такая кривая называется *гиперболической*, если каждая вещественная прямая одного из семейств прямолинейных образующих гиперболоида пересекается с кривой только вещественных точках. *Жесткой изотопией* вещественных алгебраических кривых некоторого класса называется путь в пространстве кривых этого класса. Для изучения жёстких изотопий гиперболических кривых бистепени (*m*,3) на $\boldsymbol{P^1 \times P^1}$ используется преобразование Нагаты, позволяющее перейти от кривой на $\boldsymbol{P^1 \times P^1}$ к особой вещественной тригональной кривой на поверхности Хирцебруха с последующим нахождением канонического скелета такой кривой.

Ключевые слова: пространства вещественных алгебраических кривых, кривые на гиперболоиде, тригональные кривые.

1. Определения

Пусть $[x_0 : x_1]$, $[y_0 : y_1]$ – однородные координаты на гиперболоиде $\boldsymbol{P^1 \times P^1}$. *Вещественная алгебраическая кривая бистепени* (m_1, m_2) на гиперболоиде определяется уравнением $F(x_0, x_1; y_0, y_1) = 0$, где

$$F(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sum_{i,j=1}^{m_1,m_2} a_{i,j}\, x_1^i x_0^{m_1-i} y_1^j y_0^{m_2-j} -$$

вещественный однородный многочлен степеней m_1 и m_2 по x_0, x_1 и y_0, y_1.

Обозначим через $C_{m,n}$ пространство вещественных алгебраических кривых бистепени (m, n) на гиперболоиде. Пусть $\Delta \subset C_{m,n}$ – подмножество особых кривых. Множество $\Delta_1 \subset \Delta$ состоит из кривых с одной невырожденной двойной точкой или точкой возврата. Компоненты связности множества $C_{m,n} \backslash \Delta$ (соответственно, Δ_1) называются *камерами* (соответственно, *стенками*).

Вещественная схема неособой вещественной алгебраической кривой $A \subset \boldsymbol{P^1 \times P^1}$ – это схема взаимного расположения компонент её вещественной части $\mathbb{R}A$. Стягиваемые в $\mathbb{R}\boldsymbol{P^1} \times \mathbb{R}\boldsymbol{P^1}$ компоненты называются *овалами.* Все нестягиваемые компоненты N_1, ... , N_h реализуют один и тот же ненулевой класс (c_1,c_2) *в* $H_1(\mathbb{R}\boldsymbol{P^1} \times \mathbb{R}\boldsymbol{P^1})$, где ($c_1$,$c_2$) взаимно просты. Вещественная схема кривой кодируется следующим образом: <(c_1,c_2), *scheme*$_1$, (c_1,c_2), *scheme*$_2$, ... , (c_1,c_2), *scheme*$_h$>, где *scheme*$_1$, *scheme*$_2$, ..., *scheme*$_h$ -- схемы расположения овалов, лежащих в связных компонентах поверхности $\mathbb{R}\boldsymbol{P^1} \times \mathbb{R}\boldsymbol{P^1} \backslash (N_1 \cup \ldots \cup N_h)$.

Вещественные схемы неособых кривых бистепени (*m*, 3) на гиперболоиде перечислены в работе [1]. Нам понадобятся только схемы гиперболических кривых: <(3, μ)>, <(1, *m*)> (см. ниже рис. 3 – 5.)

[1*] Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

2. Поверхности Хирцебруха, преобразования Нагаты, тригональные кривые

Поверхность Хирцебруха $\Sigma_k, k \geq 0$, является пространством $\boldsymbol{P}^1$-расслоения $q\colon \Sigma_k \to \boldsymbol{P}^1$, т.е. вещественной рациональной линейчатой поверхностью с исключительным вещественным сечением E_k, $E_k^2 = -k$. Поверхность $\Sigma_0 = \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ является гиперболоидом, в котором в качестве исключительного сечения можно взять любую кривую бистепени $(0,1)$. В пространстве $C_{m,n}$ при изучении кривых с единственной особенностью исключительным сечением считается кривая бистепени $(0,1)$, проходящая через особую точку кривой.

Положительным (отрицательным) преобразованием Нагаты называется послойное бирациональное преобразование $\Sigma_k \to \Sigma_{k+1}$ (соответственно, $\Sigma_k \to \Sigma_{k-1}$), состоящее из раздутия точки $p \in E_k$ (соответственно, $p \notin E_k$) и последующего стягивания в точку собственного прообраза слоя $q^{-1}(p)$. Положительное (отрицательное) преобразование Нагаты переводит E_k в E_{k+1} (соответственно, в E_{k-1}).

Алгебраическая кривая $C \subset \Sigma_k$ называется *тригональной*, если сужение $q|_C$ является трёхлистным разветвлённым накрытием. Кривая C называется *собственной*, если она не пересекается с исключительным сечением.

Вещественная тригональная кривая C (возможно особая) называется *гиперболической*, если ограничение $\mathbb{R}C \to \mathbb{R}\boldsymbol{P}^1$ отображения q является трёхлистным накрытием на множестве неособых точек кривой.

Положительное и отрицательное преобразования Нагаты устанавливают взаимосвязь между (тригональными) кривыми бистепени $(m, 3)$ на гиперболоиде и собственными тригональными кривыми: кривой $C \subset \Sigma_0$ отвечает её образ $N(C) \subset \Sigma_m$ при положительном преобразовании Нагаты, раздувающем точки пересечения кривой C с кривой $E_0 \subset \Sigma_0 = \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$.

3. Граф тригональной кривой

В некоторой аффинной карте на Σ_k исключительное сечение E_k и собственная тригональная кривая C определяются уравнениями $y = \infty$ и $y^3 + b(x)y + w(x) = 0$, где b и w – сечения расслоения q, которые можно рассматривать как однородные многочлены степеней $2k$ и $3k$. Рациональная функция $j = j_C = \frac{4b^3}{d} = 1 - \frac{27w^2}{d}$ называется *j-инвариантом* кривой C, где $d = 4b^3 + 27w^2$ – дискриминант по y кривой C.

Пусть круг D – фактор-пространство прямой $\mathbb{C}\boldsymbol{P}^1$ по комплексному сопряжению, а $\mathrm{pr}\colon \mathbb{C}\boldsymbol{P}^1 \to D$ – проекция. В образе j-инварианта $j_C\colon \mathbb{C}\boldsymbol{P}^1 \to \mathbb{C}\boldsymbol{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ вещественной тригональной кривой $C \subset \Sigma_k$ раскрасим $\mathbb{R}\boldsymbol{P}^1$ следующим образом: 0, 1 и ∞ – это, соответственно, чёрная, белая и крест-вершина; $(\infty, 0)$, $(0,1)$ и $(1, \infty)$ – это, соответственно, сплошное, жирное и пунктирное ребро. Прообраз $\Gamma_C = \mathrm{pr}(j_C^{-1}(\mathbb{R}\boldsymbol{P}^1))$, наделённый соответствующей раскраской, называется *графом тригональной кривой* C (см. [2], [3]).

4. Скелет гиперболической тригональной кривой

Все чёрные вершины графа гиперболической кривой можно считать двухвалентными (отвечающими мнимым точкам перегиба кривой) за счёт преобразования, показанного на рис. 1.

Скелет гиперболической кривой с двухвалентными чёрными вершинами (*жирный скелет*) получается из её графа удалением всех рёбер, кроме жирных. Особые крест-вершины обозначаются двойным крестом. Нам понадобятся жирные скелеты, у которых либо все крест-вершины особые, либо все крест-вершины, кроме одной (внутренней), особые.

Гиперболическая тригональная кривая определяется своим скелетом с точностью до жёсткой изотопии.

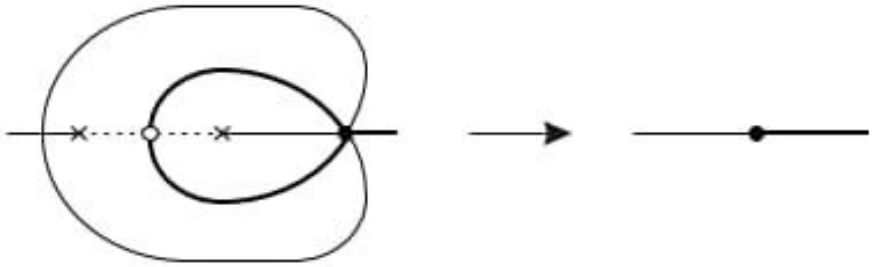


Рис. 1. Создание мнимых точек перегиба

5. Скелет негиперболической тригональной кривой

Объединение замыканий некоторых одинаково раскрашенных вещественных ребер графа Γ_C называется *сегментом*, если оно гомеоморфно отрезку. Пунктирный (жирный) сегмент называется *максимальным* если его концами являются две неособые (т.е. отвечающие простым корням дискриминанта d) крест-вершины (соответственно, две чёрные вершины). Максимальный пунктирный сегмент графа негиперболической кривой, содержащий четное/нечетное количество белых вершин, называется *овалом/зигзагом*; он является проекцией овала/зигзага соответствующей тригональной кривой. Максимальный пунктирный/жирный сегмент с четным/нечетным количеством белых вершин называется *волной/скачком*.

Нам понадобятся особые негиперболические собственные тригональные на Σ_k либо с k зигзагами, либо с k-1 зигзагами и одним овалом, пересекающие ось x только в зигзагах и допускающие лишь уединённые невырожденные двойные точки (вырожденные овалы). Включим их в число овалов такой кривой.

Пунктирный скелет (см. [4]) такой кривой получается из её графа склейкой каждого овала/зигзага в вещественную белую вершину, сохранением особых вершин, мнимых чёрных, белых, крест-вершин и наконец, удалением всех рёбер, кроме пунктирных.

Негиперболическая тригональная кривая определяется своим скелетом с точностью до жёсткой изотопии.

6. Основной результат

Перечисление стенок/камер гиперболических кривых пространства $C_{m,3}$ даётся на языке жирных и пунктирных скелетов вещественных тригональных кривых на $\Sigma_{m-1}/\ \Sigma_m$, полученных из неособых кривых бистепени (m,3) на гиперболоиде, следующим образом. После (m-1)-кратного/ m-кратного положительного преобразования Нагаты (см. рис. 3 для случая стенки) такая кривая даёт собственную кривую на $\Sigma_{m-1}/\ \Sigma_m$, для которой доказывается, что она определяется каноническим скелетом, задающим стенку/камеру.

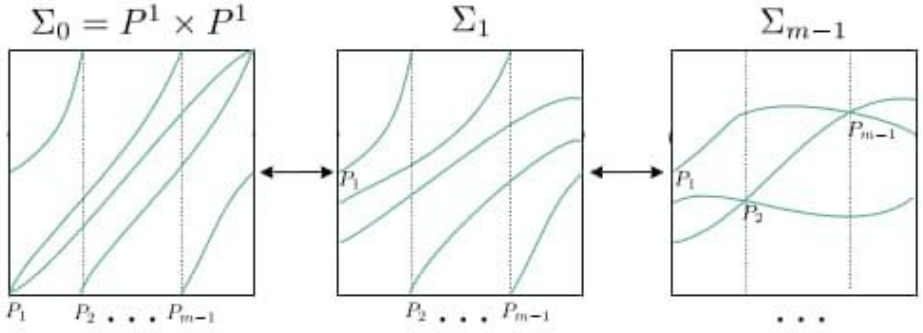


Рис. 2. Особой кривой бистепени (m,3) соответствует тригональная кривая с m-2 особенностями и отмеченной точкой p_1

На рис. 3 -- 5 указаны вещественные схемы стенок/камер и канонические скелеты соответствующих тригональных кривых (точка a -- образ при преобразовании Нагаты вертикального слоя на гиперболоиде, проходящего через особую точку кривой из стенки).

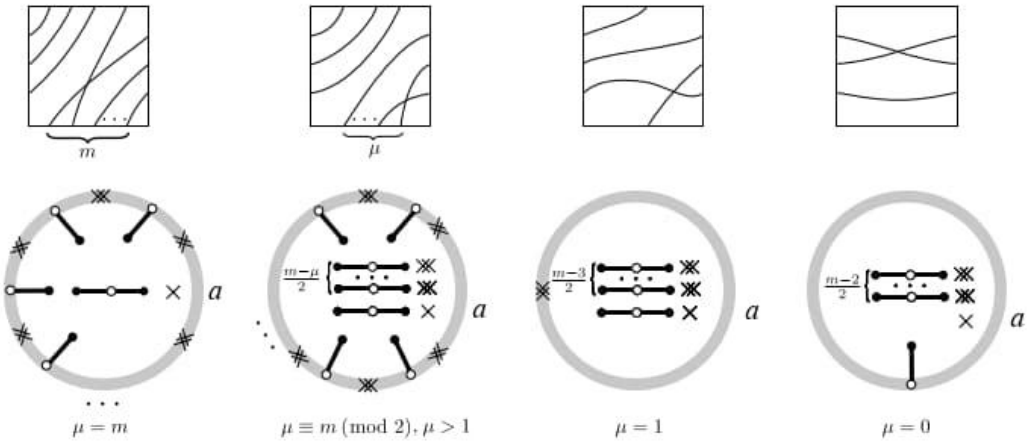


Рис. 3. Стенки: канонические скелеты гиперболических тригональных кривых

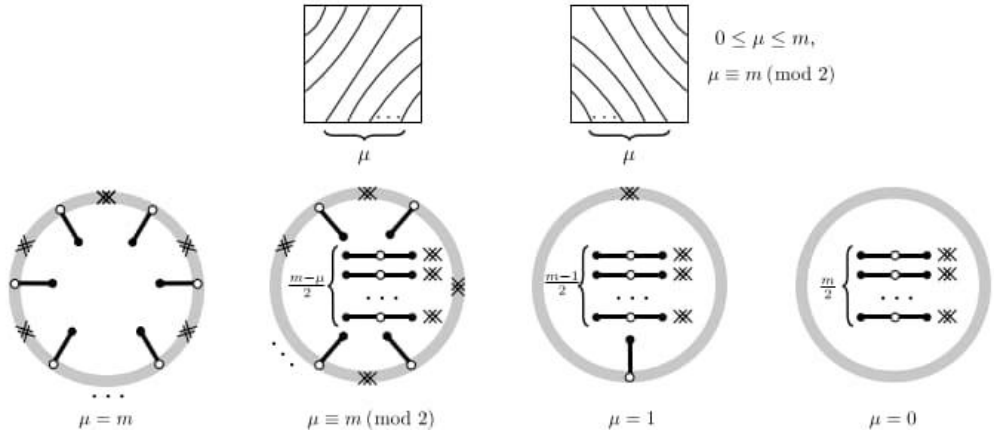


Рис. 4. Камеры: канонические скелеты гиперболических тригональных кривых

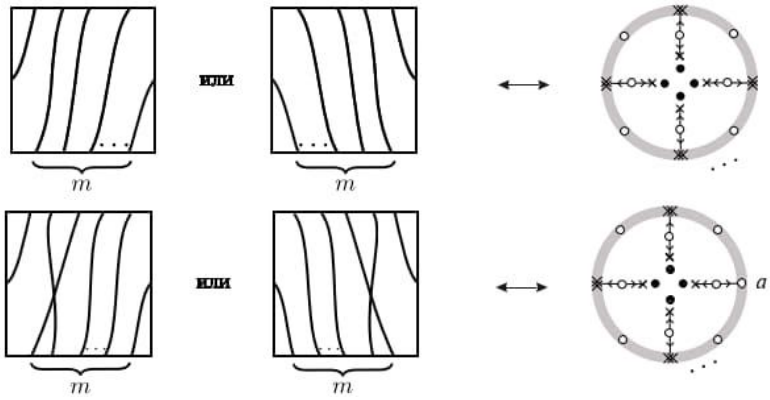


Рис. 5. Скелеты тригональных кривых, отвечающих камерам гиперболических кривых в $C_{m,3}$ со схемами $<(1,\pm m)>$ и соответствующим стенкам

Литература

1. Звонилов В. И. Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперболоиде и эллипсоиде // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 5. С. 88--108.
2. Orevkov S. Yu. Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2003, 12 (4), p. 517-531.

3. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. Real Enriques surfaces. Lecture Notes in Math., 2000, vol. 1746 , Springer-Verlag, 259pp.
4. Degtyarev A., Itenberg I., Zvonilov V. Real trigonal curves and real elliptic surfaces of type I // J.Reine Angew. Math., 686 (2014), p. 221-246.

МОДЕЛЬ АДАПТИВНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТОВ ДВИЖУЩИХСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Аунг Чжо Мьо, Е.М. Портнов, А.С. Алексеев, И.А.Куклев

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Зеленоград

Рассматривается задача прогнозирования координат наземных объектов по данным наблюдений с беспилотных летательных аппаратов. Предложен подход, объединяющий геометрическое ограничение движения земной поверхностью и рекуррентную оценку параметров движения. Локальная касательная плоскость используется для преобразования координат и сужения области поиска объекта на изображении. Оценена погрешность такой аппроксимации, обусловленная кривизной Земли: при удалении от точки касания на 1 км отклонение составляет около 8 см. Для прогнозирования сопоставлены линейная экстраполяция, фильтр Калмана с моделью постоянной скорости, α-β-фильтр и рекуррентный метод наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием. Вычислительные эксперименты проведены на модельных траекториях с измерительным шумом для равномерного, равноускоренного движения и манёвра, а также для изменения границы пожарного региона. В рассмотренных сценариях фильтр Калмана снижает среднеквадратическую ошибку прогноза равномерного и равноускоренного движения в 6,4–6,7 раза. При манёвре и прогнозировании границы пожара наименьшую ошибку обеспечивает рекуррентная регрессия. Установлена зависимость точности от соответствия модели характеру движения. Результаты могут использоваться при разработке систем экологического мониторинга и сопровождения наземных объектов; необходима дальнейшая проверка на натурных данных.

Ключевые слова: фильтр Калмана, рекуррентная регрессия, α-β-фильтр, БПЛА, прогнозирование координат, касательная плоскость, экологический мониторинг.

1. Введение

Мониторинг наземных объектов с беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) актуальная задача в области экологического контроля, обеспечения безопасности и поисково-спасательных операций. Многие целевые объекты (люди, транспортные средства, очаги пожаров, разливы нефтепродуктов) перемещаются по поверхности Земли, что позволяет использовать ограничение движения двумерной поверхностью для сужения области поиска и повышения точности прогнозирования [1, 2].

В предшествующих работах авторов был предложен геометрический метод прогнозирования координат наземных объектов, основанный на построении локальной касательной плоскости в точке предыдущего положения объекта и линейной экстраполяции. Однако линейная экстраполяция по двум наблюдениям не учитывает нелинейность динамики объектов, шум измерений и манёвры, что приводит к значительным ошибкам прогноза. В современной литературе по трекингу объектов с БПЛА стандартом де-факто являются адаптивные методы фильтрации фильтр Калмана (КФ) [3, 4], ансамблевый фильтр Калмана (EnKF), α-β-γ-фильтры [5], а также методы на основе рекуррентного метода наименьших квадратов (RLS).

Цель настоящей работы - повышение точности прогнозирования координат объектов, движущихся по поверхности Земли, за счёт замены линейной экстраполяции на адаптивные модели (фильтр Калмана, RLS, α-β-фильтр), оценка границ применимости аппроксимации касательной плоскостью и сравнительный анализ точности предложенных методов на модельных данных.

2. Геометрическая модель и сужение области поиска

Не допускается использование нумерации, принудительных разрывов страниц и колонтитулов.

Пусть известны 3D-координаты объекта $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ в геоцентрической системе координат (ГСК), вычисленные для предыдущего кадра. Поскольку объект движется по поверхности Земли, построим локальную касательную плоскость G в точке r_0. Орт нормали к поверхности эллипсоида WGS-84 в точке r_0 даёт первый базисный вектор n_1. Два дополнительных орта n_2 и n_3 вычисляются из условий ортогональности и нормировки:

$$n_1 = r_0 / |r_0|, n_3 = n_1 \times n_2, \quad |n_2| = 1,\ n_2 \cdot n_1 = 0.$$

Из столбцов векторов n_3, n_2, n_1 составляется ортонормированная матрица R_p, задающая ориентацию локальной системы координат. Вокруг точки r_0 на плоскости G задаётся квадратная область поиска со стороной $2S_{max}$, вершины которого в локальных координатах имеют вид:

$$Q_j = r_0 + R_p \cdot (\pm S_{\max}, \pm S_{\max}, 0)^T,\ \ j = 1, ..., 4.$$

Проецируя точки Q_j на плоскость изображения камеры БПЛА, получаем ограничивающий прямоугольник область поиска объекта на текущем кадре [6].

Для протяжённых объектов (регионов) пожаров, разливов нефтепродуктов по координатам габаритного прямоугольника $(x_{rect}, y_{rect}, w_{rect}, h_{rect})$ восстанавливаются 3D-координаты четырёх угловых точек на земной поверхности путём пересечения лучей камеры с плоскостью G. При объединении нескольких кадров формируется выпуклый многоугольник, описывающий границу региона. Для прогнозирования изменения формы региона из центра тяжести многоугольника выпускаются N радиальных лучей; координаты точек пересечения лучей с границей в моменты времени t_1 и t_2 задают векторы изменений по каждому из N направлений [7, 8].

3. Оценка погрешности аппроксимации касательной плоскостью

Аппроксимация участка земной поверхности касательной плоскостью вводит систематическую ошибку, обусловленную кривизной эллипсоида. Для сферы радиуса R отклонение поверхности от касательной плоскости на расстоянии L от точки касания составляет $\delta \approx L^2 / (2R)$. При $R = 6378137$ м (экваториальный радиус WGS-84) получаем следующие оценки:

Таблица 1. Погрешность аппроксимации касательной плоскостью

Расстояние L	Отклонение δ	Относительная погрешность
100 м	0,8 мм	8×10^{-6}
1 км	7,8 см	8×10^{-5}
10 км	7,8 м	8×10^{-4}
50 км	196 м	$3{,}9 \times 10^{-3}$

Таким образом, для областей наблюдения до 1 км (типичный размер кадра БПЛА на высоте 50-500 м) погрешность не превышает 8 см, что пренебрежимо мало по сравнению с погрешностью GPS-измерений (≈3 м CEP). Для областей до 10 км погрешность достигает 8 м и сопоставима с GPS-погрешностью. Для больших областей (свыше 50 км) аппроксимация касательной плоскостью становится неприемлемой и требует учёта кривизны Земли или использования цифровой модели рельефа (DEM). Ошибка линейизации также зависит от широты: вблизи полюсов и экватора относительная погрешность возрастает [9].

4. Адаптивные модели прогнозирования

Заменим линейную экстраполяцию тремя адаптивными моделями, широко применяемыми в задачах трекинга: дискретным фильтром Калмана с моделью постоянной скорости (CV-КФ),

α-β-фильтром и рекуррентным методом наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием (RLS).

4.1. Фильтр Калмана (модель постоянной скорости)

Вектор состояния для каждой координаты (x или y) отдельно: $x_k = [p_k, v_k]^T$, где p - позиция, v - скорость. Модель перехода:

$$x_{\{k+1\}} = F \cdot x_k + w_k, \quad F = [[1, \Delta t], [0,1]],$$

$$z_k = H \cdot x_k + v_k, \quad \mathrm{H} = [1, 0].$$

Уравнения фильтра: прогноз $\hat{x}_{\{k|k-1\}} = F \cdot \hat{x}_{\{k-1|k-1\}}, P_{\{k|k-1\}} = F \cdot P_{\{k-1|k-1\}} \cdot F^T + Q;$ обновление $K_k = P_{\{k|k-1\}} \cdot H^T \cdot (H \cdot P_{\{k-1|k-1\}} \cdot H^T + R)^{-1}, \hat{x}_{\{k|k\}} = \hat{x}_{\{k|k-1\}} + K_k \cdot (z_k - H \cdot \hat{x}_{\{k|k-1\}},), P_{\{k|k\}} = (I - K_k \cdot H) \cdot P_{\{k|k-1\}}.$ Матрица шума процесса $Q = daig(\sigma_{a^2} \cdot \Delta t^4 / 4, \sigma_{a^2} \cdot \Delta t^2)$, где σ_a - среднеквадратическое отклонение ускорения; $R = \sigma_{z^2}$ дисперсия измерения [10].

4.2. α-β-фильтр

α-β-фильтр – упрощённый частный случай КФ с фиксированными коэффициентами. Для каждой координаты:

$$\hat{p}_k = \hat{p}_{\{k-1\}} + \Delta t \cdot \hat{v}_{\{k-1\}} + \alpha \cdot (z_k - \hat{p}_{\{k-1\}} - \Delta t \cdot \hat{v}_{\{k-1\}}),$$

$$\hat{v}_k = \hat{v}_{\{k-1\}} + (\beta / \Delta t) \cdot (z_k - \hat{p}_{\{k-1\}} - \Delta t \cdot \hat{v}_{\{k-1\}}).$$

Коэффициенты α и β выбираются из условия оптимальности по критерию минимума среднеквадратической ошибки [11]. При коэффициенте затухания $\xi = 0,64$ (рекомендация для манёвренных целей): $\alpha = 1 - \xi^2, \ \beta = 2(2 - \xi) - 4\sqrt{(1 - \xi^2)}.$

4.3. Рекуррентный метод наименьших квадратов (RLS)

Для каждого радиального направления (при прогнозировании регионов) или каждой координаты (для точечных объектов) модель представления: $y_k = \varphi_{k^T} \cdot \theta_k$, где $\varphi_k = [1, \ k]^T$ - регрессор, $\theta_k = [a, \ b]^T$ - оцениваемые параметры (свободный член и наклон). Рекуррентные уравнения:

$$K_k = P_{\{k-1\}} \cdot \varphi_k / \left(\lambda + \varphi_{k^T} \cdot P_{\{k-1\}} \cdot \varphi_k\right),$$

$$\theta_k = \theta_{\{k-1\}} + K_k \cdot \left(y_k - \varphi_{k^T} \cdot \theta_{\{k-1\}}\right),$$

$$P_k = \left(P_{\{k-1\}} - K_k \cdot \varphi_{k^T} \cdot P_{\{k-1\}}\right) / \lambda.$$

Параметр забывания $\lambda \in (0, \ 1]$ контролирует скорость адаптации: меньшие значения λ обеспечивают более быструю перестройку при изменении динамики, но повышают чувствительность к шуму. Начальное значение $P_0 = \delta^{-1} \cdot I$, где δ - большое число (например, 10^4) [12].

5. Вычислительные эксперименты

Для оценки точности предложенных моделей проведены эксперименты на модельных данных. Шаг дискретизации $\Delta t = 1$ с, длительность траектории - 200 отсчётов. К истинным координатам добавлялся гауссовский шум с $\sigma_z = 3$ м (типичная погрешность GPS). Прогноз выполнялся на один шаг вперёд. Метрика качества - среднеквадратическая ошибка (RMSE) в метрах. Параметры фильтров: $\sigma_a = 2 \ м / с^2 (КФ), \ \xi = 0,64(\alpha - \beta), \ \lambda = 0,85(RLS).$

5.1. Прогнозирование точечных объектов

Рассмотрены три сценария движения объекта по поверхности Земли:
1) Постоянная скорость (10 м/с по прямой) - базовый сценарий;
2) Равноускоренное движение (a=1 м/с²) - моделирует разгон;
3) Манёвр (поворот на 90° с замедлением) - нелинейная динамика.

Таблица 2. RMSE прогноза точечных объектов, м

Сценарий	Линейная экстрап.	Фильтр Калмана	α-β-фильтр	RLS
Постоянная скорость	9,73	1,51	2,34	1,67
Равноускоренное	8,93	1,33	2,87	1,70
Манёвр (поворот)	9,49	4,32	5,01	2,12
Среднее	9,38	2,39	3,41	1,83

Фильтр Калмана снижает ошибку в 6-6,7 раза для равномерного и равноускоренного движения. RLS превосходит КФ в сценарии манёвра (2,12 м против 4,32 м) благодаря адаптивной перестройке коэффициентов при изменении характера движения. α-β-фильтр занимает промежуточное положение, уступая КФ на равномерном движении, но обеспечивая более стабильную реакцию на манёвры [13].

5.2. Прогнозирование регионов

Рассмотрен сценарий развития пожара с замедляющейся динамикой: радиус фронта пожара $r(t) = r_0 \cdot \sqrt{(1 + t/\tau)}$, где $r_0 = 100$ м, $\tau = 50$ с. $N = 16$ радиальных направлений, шаг наблюдения 10 с, шум измерения σ=5 м. Прогноз выполнялся на один шаг (10 с) вперёд по каждому направлению.

Таблица 3. RMSE прогноза границ региона пожара, м

Метод	**RMSE, м**
Линейная экстраполяция	10,89
α-β-фильтр	5,51
Фильтр Калмана (CV)	13,94
RLS (λ = 0,85)	3,80

RLS с параметром забывания $\lambda = 0{,}85$ обеспечивает наименьшую ошибку (3,80 м), в 2,9 раза точнее линейной экстраполяции. Стандартный CV-фильтр Калмана проигрывает (13,94 м) из-за неадекватности модели постоянной скорости для замедляющейся динамики пожара. α-β-фильтр занимает промежуточное положение (5,51 м). Результаты согласуются с данными литературы: в работах показано, что для прогнозирования распространения пожаров эффективнее использовать ансамблевый фильтр Калмана или методы ассимиляции данных, учитывающие нелинейность динамики. RLS с экспоненциальным забыванием представляет компромисс между простотой реализации и способностью адаптироваться к нелинейной динамике.

6. Обсуждение результатов

Результаты экспериментов показывают, что выбор оптимального метода прогнозирования зависит от характера динамики объекта. Для точечных объектов с равномерным движением наилучшим является фильтр Калмана; при манёврах предпочтительнее RLS. Для регионов с нелинейной динамикой (пожары, разливы) RLS с параметром забывания обеспечивает наилучший компромисс между точностью и вычислительной сложностью.

Аппроксимация касательной плоскостью вносит пренебрежимо малую погрешность для типичных зон съёмки с БПЛА (до 1 км - ошибка < 1 см). Для расширенных зон (10-50 км) необходимо учитывать кривизну Земли или использовать локальные системы координат (ENU/NED) с соответствующей коррекцией. Для горной местности требуется использование цифровой модели рельефа (DEM).

Ограничения работы: эксперименты проведены на модельных данных; параметры фильтров (σ_a, λ, ξ) выбраны эмпирически и требуют адаптации для конкретных условий съёмки. Перспективы развития: переход к расширенному фильтру Калмана (EKF) для нелинейных моделей движения, использование ансамблевого фильтра Калмана (EnKF) для прогнозирования пожаров с учётом метеорологических данных, а также применение методов машинного обучения для классификации режимов движения и автоматического выбора оптимального фильтра.

7. Заключение

В работе предложен комплексный подход к прогнозированию координат объектов, движущихся по поверхности Земли, по данным БПЛА. Линейная экстраполяция заменена тремя адаптивными моделями: фильтром Калмана, α-β-фильтром и RLS с экспоненциальным забыванием. На модельных данных показано, что адаптивные методы снижают ошибку прогноза в 2,9-6,7 раз по сравнению с линейной экстраполяцией. Оценены границы применимости аппроксимации касательной плоскостью: погрешность не превышает 8 см для зон до 1 км и 8 м для зон до 10 км, что пренебрежимо мало по сравнению с погрешностью GPS. Результаты могут найти применение в системах экологического мониторинга, поисково-спасательных операциях и системах обеспечения безопасности на основе БПЛА.

Литература

1. Portnov E.M., Aung Kyaw Myo., Kokin V.V., Kasimov R.A., Tsymbalov S.V. Development of a Method for Accelerating the Processing of Streaming Video Received from UAVs // Proceedings of the IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). 2021. P. 2217–2221.
2. Хейн Хтет Зо, Портнов Е.М., Хачумов В.М., Баин А.М. Разработка математической модели решения задачи классификации данных обработки потокового видео // Перспективы науки. 2022. № 11. С. 22–27.
3. Хейн Хтет Зо, Портнов Е.М., Хачумов В.М. Разработка способа ускоренной обработки потокового видео с беспилотных летательных аппаратов // Перспективы науки. 2022. № 11. С. 27–32.
4. Xu X., Chen J. UAV object tracking for air-ground targets based on status detection and Kalman filter // Acta Aeronautica et Astronautica Sinica. 2024. Vol. 45, No. 16. Art. 329834.
5. Fernandez A. et al. Application of data sensor fusion using extended Kalman filter algorithm for identification and tracking of moving targets from lidar–radar data // Remote Sensing. 2023. Vol. 15. Art. 3396.
6. Yudhisteer. UAV Drone: Object Tracking using Kalman Filter. GitHub repository, 2023. URL: https://github.com/yudhisteer/UAV-Drone-Object-Tracking-using-Kalman-Filter (дата обращения: 25.09.2026).
7. Enhanced UAV Tracking through Multi-Sensor Fusion and Extended Kalman Filtering // CEUR Workshop Proceedings. 2025. Paper 19.
8. Lin H., Liu Y. Kalman Filter-Based Large-Scale Wildfire Monitoring With a System of UAVs // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2019. Vol. 66, No. 1. P. 606–615.
9. Rochoux M. et al. Towards predictive simulation of wildfire spread using a reduced-cost Ensemble Kalman Filter // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2014. Vol. 14. P. 2951–2965.
10. Basic Study of a Comparison of the Performances of the α-β-γ Filter and the Kalman Filter // Journal of Navigation. 2021. Art. 162.

11. Performance Comparison of Alpha-Beta-Gamma Filter and Kalman Filter for Tracking Targets Using Radar Measurements. 2018.
12. Haykin S. Adaptive Filter Theory. 5th ed. Pearson, 2014, P. 912.
13. Geodetic Unscented Kalman Filter. arXiv:2111.13254. 2021. arXiv preprint. URL: https://arxiv.org/abs/2111.13254 (дата обращения: 25.09.2026).

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ЭНЕРГОСИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТРЁХКОМПОНЕНТНЫХ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ И МАТРИЦ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Аунг Чжо Мьо, Е.М. Портнов, В. Н. Потапов

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Зеленоград

Диагностика повреждений энергосистем играет ключевую роль в обеспечении надёжности электроснабжения. Существующие методы сталкиваются с двумя проблемами: недостаточным учётом масштаба и топологических изменений энергосистемы, а также неопределённостью аварийной информации. В работе предлагается метод диагностики на основе трёхкомпонентных нечётких множеств (ТКНМ) и матриц инцидентности. Область повреждения определяется путём поиска по топологии энергосистемы, после чего строятся матрицы инцидентности с трёхкомпонентными нечёткими элементами (МИ-ТКНЭ). Трёхкомпонентные нечёткие числа (ТКНЧ) назначаются в соответствии с предложенными правилами, учитывающими пропуск аварийной информации. Диагностическая модель на основе МИ-ТКНЭ обеспечивает корректное определение повреждённых компонентов в условиях неопределённости и не зависит от масштаба энергосистемы. Эффективность метода подтверждена на тестовых схемах, основанных на фрагментах ЕЭС России, 13-узловой и 118-узловой. Метод продемонстрировал высокую точность и помехоустойчивость при одиночных и множественных повреждениях, отказах выключателей и пропусках аварийной информации.

Ключевые слова: аварийная информация, диагностика повреждений, матрица инцидентности, трёхкомпонентное нечёткое множество, энергосистема.

1. Введение

Диагностика повреждений энергосистем - важнейшее средство обеспечения стабильности и надёжности электроснабжения, позволяющее оперативно определять повреждённые компоненты и сокращать время отключения [1]. С 1980-х годов предложено множество методов диагностики, основанных на различных теориях и моделях.

Экспертные системы (ЭС) [2] первыми были применены для диагностики, сопоставляя аварийную информацию с базой знаний. Однако для крупных энергосистем построение и сопровождение баз знаний затруднено. Причинно-следственные сети (ПСС) [3] обладают возможностями параллельной обработки, но не могут наглядно представить комбинации релейных защит (РЗ) и соответствующих выключателей (В). Искусственные нейронные сети (ИНС) [4] требуют обширного обучения, а их результаты трудно интерпретировать. Аналитические модели (АМ) [5] сводят задачу к целочисленному программированию, но усложнение функции потерь снижает эффективность. Байесовские сети (БС) [6] эффективны при неполной информации, но требуют точных априорных вероятностей.

Сети Петри (СП) и SNP-системы используют матричные выводы и обладают простой логикой и высокой скоростью. Однако иерархическое моделирование для адаптации к топологическим изменениям требует перебора всех диагностических моделей и непригодно для оперативной диагностики. Модель IFTGE [8, 9] при изменении топологии требует лишь корректировки элементов матрицы инцидентности, но размерность матриц растёт с масштабом энергосистемы, что снижает эффективность.

В статье предлагается метод диагностики на основе ТКНМ и матриц инцидентности. Основные вклады:

1) Метод построения матриц инцидентности области повреждения, сужающий область топологического поиска и снижающий размерность матриц.

2) Правила назначения ТКНЧ (трёхкомпонентных нечётких степеней уверенности – ТКНСУ), учитывающие пропуски и ложные сигналы аварийной информации.

3) Диагностическая модель на основе МИ-ТКНЭ и её матричный вывод, применимая к энергосистемам различного масштаба без перестроения модели при топологических изменениях.

2. Трёхкомпонентные нечёткие множества и матрицы инцидентности

2.1. Поиск области повреждения и построение матриц

Топологическая связь энергосистемы из m шин и n линий представляется матрицей инцидентности *S* размерности $m \times n$, где $S_{ij} = 1,$ если *i-я* шина связана с *j-й* линией, и $S_{ij} = 0,$ в противном случае. Для крупных энергосистем построение полной матрицы затруднительно, поэтому область поиска сужается.

После возникновения повреждения срабатывают РЗ и соответствующие В. Максимальный размах повреждения достигается при срабатывании удалённых резервных защит (УРЗ). Эта область определяется как область повреждения. Алгоритм построения матриц инцидентности области повреждения [10, 11]:

Шаг 1. Поиск всех В, связанных с аварийной информацией, - множество B_S.

Шаг 2. Поиск всех шин, связанных с В из B_S, - множество $Ш_S$.

Шаг 3. Поиск всех линий, связанных с шинами из $Ш_S$, - множество $Л_S$.

Шаг 4. Поиск всех шин, связанных с линиями из $Л_S$, и добавление их в $Ш_S$.

Шаг 5. Область повреждения состоит из шин и линий множеств $Ш_S$ и $Л_S$. Построение матрицы инцидентности *S*.

Шаг 6. Замена ненулевых элементов S на соответствующие В, а также основные защиты (ОЗ), ближние резервные защиты (БРЗ), УРЗ и защиты шин (ЗШ).

Размерность матриц области повреждения зависит только от размаха повреждения и не связана с масштабом энергосистемы.

2.2. ТКНСУ и правила назначения

Трёхкомпонентное нечёткое множество (ТКНМ) на области *X* определяется как

$$A = \{< x,\ \mu_A(x), \nu_A(x) > | \ x \in X\},$$

где: $\mu_A(x)$ - степень принадлежности, $\nu_A(x)$ - степень непринадлежности, причём $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$. ТКНМ расширяют классические нечёткие множества и более полно выражают неопределённость [12, 13].

Элементы ТКНМ в матрицах инцидентности - трёхкомпонентные нечёткие числа (ТКНЧ) вида $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ - обозначаются как трёхкомпонентные нечёткие степени уверенности (ТКНСУ). Матрицы, составленные из ТКНЧ, называются матрицами инцидентности с трёхкомпонентными нечёткими элементами (МИ-ТКНЭ).

Неопределённость аварийной информации классифицируется четырьмя ситуациями:

1) информация о РЗ и В присутствует;
2) информация отсутствует;
3) информация о РЗ присутствует, о В - отсутствует;
4) информация о В присутствует, о РЗ отсутствует.

При наличии аварийной информации ТКНСУ ОЗ и В вычисляются на основе статистики правильных и неправильных срабатываний. Степень принадлежности ОЗ μ_{O3} и степень непринадлежности ν_{O3} определяются как средние вероятности правильных и неправильных срабатываний РЗ. Для В аналогично: $\mu_B = \frac{Num_{B_1}}{Num_B}, \nu_B = \frac{Num_{B_2}}{Num_B}$, где Num_{B1} и Num_{B2} – числа правильных и неправильных срабатываний В.

Для БРЗ и УРЗ степени принадлежности составляют 0,8 и 0,7 соответственно, для соответствующих В - 0,85 и 0,75. Степени непринадлежности БРЗ и соответствующих В равны 0,1; УРЗ и соответствующих В - 0,2. При отсутствии информации о РЗ и В их ТКНСУ принимаются равными (0,2; 0,7).

При наличии информации о РЗ, но отсутствии о В, ТКНСУ В без информации составляет (0,4; 0,5) для ЗШ и (0,3; 0,6) для линейной защиты. При наличии информации о В, но отсутствии о РЗ, ТКНСУ РЗ без информации составляет (0,5; 0,3) для ЗШ и (0,4; 0,35) для линейной защиты.

Операции над ТКНЧ: умножение $\alpha \times \beta = \left(\mu_\alpha \times \mu_\beta,\ \nu_\alpha + \nu_\beta - \nu_\alpha \times \nu_\beta\right)$; пересечение $\alpha \cap \beta = \left(max\left(\mu_\alpha, \mu_\beta\right),\ min\left(\nu_\alpha, \nu_\beta\right)\right)$; умножение на скаляр $\lambda_a = (1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha{}^\lambda)$.

3. Диагностическая модель на основе МИ-ТКНЭ

Модель диагностики (рис. 1) объединяет ТКНЧ и матрицы инцидентности области повреждения. Матрицы ЗШ ($ЗШ_м$), ОЗ ($ОЗ_м$), БРЗ ($БРЗ_м$), УРЗ ($УРЗ_м$) и В ($В_м$) представляют МИ-ТКНЭ размерности m × n. Узлы Add, Max, RS (сумма по строкам) и CS (сумма по столбцам) обеспечивают слияние матриц [14, 15].

Узел Add: $E_{ij} = \omega_1 C_{ij} + \omega_2 D_{ij} = \left(\omega_1 \mu C_{ij} + \omega_2 \mu D_{ij}, \omega_1 \nu C_{ij} + \omega_2 \nu D_{ij}\right)$, где ω_1 и ω_2 - веса дуг.

Узел Max: $E_{ij} = C_{ij} \cap D_{ij} = \left(max\left(\mu C_{ij},\ \mu D_{ij}\right),\ min\left(\nu C_{ij},\ \nu D_{ij}\right)\right)$.

Узел RS: $BP_i = \frac{1}{\eta}\prod_{l=1}^{\eta} B_{il},\ B_{il} \neq (0,0)$, где η - число ненулевых элементов в *i-й* строке.

Узел CS: $L_{P_j} = \frac{1}{\gamma}\prod_{l=1}^{\gamma} L_{l_j},\quad L_{lj} \neq (0,0)$, где γ - число ненулевых элементов в *j-м* столбце.

Поскольку УРЗ не связаны с повреждёнными компонентами непосредственно в топологии, применяются правила топологического отображения УРЗ. Матрица инцидентности линий $ТЛ = S^T \square\ S - I$, матрица инцидентности шин $ТШ = S \square\ S^T - I$, где I - единичная матрица. Отображение УРЗ на повреждённые шины: $УРЗ_{м.Ш} = S \bullet \left(ТШ \times УРЗ_c\right)$. Отображение УРЗ на повреждённые линии: $УРЗ_{м.Л} = \frac{\left[S \bullet \left(УРЗ_{м.Ш} \times ТЛ\right)\right]}{[S \circ (S \times ТЛ)]}$.

Измерительная функция distinguishes повреждённые и неповреждённые компоненты: $P(n) = \frac{(\mu_n - \nu_n)}{\mu_n} при\ \mu_n \geq \nu_n$, и $P(n)$=0 при $\mu_n < \nu_n$.. Порог измеренного значения установлен равным 0,65. Компонент с измеренным значением выше 0,65 считается повреждённым.

4. Экспериментальные результаты

4.1. Тестовая схема 1: фрагмент энергосистемы (13 узлов)

Тестовая схема основана на типовой модели института «Энергосетьпроект» – фрагменте энергосистемы с 13 узлами, 6 генераторами, двумя классами напряжения (500 и 220 кВ). Защиты обозначены в соответствии с ПУЭ и СТО ЕЭС: ОЗ (основная), БРЗ (ближняя резервная), УРЗ (удалённая резервная), ЗШ (защита шин).

Случай 1. Одиночное повреждение с пропуском аварийной информации

Повреждение возникает на шинах ПС-11. ЗШ-11 срабатывает, В-1106 и В-1110 отключаются, но информация о В-1110 пропущена. Аварийная информация: ЗШ-11, В-1106.

По аварийной информации формируются множества: $B_S = \{B-1106,\ B-1110\}$, $Ш_S = \{ПС-11\}$, $Л_S = \{Л-0611,\ Л-1011\}$. После расширения: $Ш_S = \{ПС-06,\ ПС-10,\ ПС-11\}$.

Матрица инцидентности S и матрица B:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B-0611 & 0 \\ 0 & B-1011 \\ B-1106 & B-1110 \end{bmatrix}.$$

ТКНСУ В-1110 = (0,4; 0,5) в соответствии с правилом пропуска информации о В при наличии информации о ЗШ. Остальные ТКНСУ назначаются по таблице при наличии информации или равны (0,2; 0,7) при её отсутствии [16, 17].

После слияния в узлах Add, Max, RS и CS получены векторы результатов: $B_p = [(0,42;0,5),\ (0,28;0,62),\ (0,8260;0,0442)]^T$, $LP = \left[(0,3760;\ 0,5438),\ (0,2411;\ 0,6588)\right]$.

Результаты диагностики (таблица 1): повреждённый компонент – ПС-11 (измеренное значение 0,9465 > 0,65). Диагноз верный.

Случай 2. Одиночное повреждение с отказом выключателя

Повреждение на шинах ПС-11. ЗШ-11 срабатывает, В-1106 отключается, но В-1110 отказывает. Срабатывает УРЗ-1011, В-1011 отключается. Аварийная информация: ЗШ-11, УРЗ-1011, В-1106, В-1011.

Область повреждения: $B_S = \{B-1106,\ B-1011\}$, $Ш_S = \{ПС-06,\ ПС-09,\ ПС-10,\ ПС-11\}$, $Л_S = \{Л-0611,\ Л-0910,\ Л-1011\}$. Размерность матрицы S — 4 × 3.

ТКНСУ В-1110 = (0,3; 0,6) в соответствии с правилом пропуска информации о В при наличии информации о линейной защите. Результат: ВР(3) = (0,8260; 0,0442), измеренное значение ПС-11 – 0,9465 > 0,65. Неповреждённая линия Л-0611 имеет измеренное значение ниже порога, так как на противоположном конце нет аварийной информации. Диагноз верный.

Случай 3. Множественное повреждение (двойной fault)

Повреждения возникают одновременно на шинах ПС-11 и на линии Л-1213. Повреждение на ПС-11 вызывает срабатывание ЗШ-11 и отключение В-1106 и В-1110. Повреждение на Л-1213 вызывает срабатывание ОЗ-1213 и ОЗ-1312, отключение В-1213 и В-1312. Аварийная информация: ЗШ-11, ОЗ-1213, ОЗ-1312, В-1106, В-1110, В-1213, В-1312.

Процесс диагностики:

а) По аварийной информации формируются множества: $B_S = \{B-1106,\ B-1110,\ B-1213,\ B-1312\}$, $Ш_S = \{ПС-11,\ ПС-12,\ ПС-13\}$, $Л_S = \{Л-0611,\ Л-1011,\ Л-1213,\ Л-1314\}$. После расширения по связанным шинам: $Ш_S = \{ПС-06,\ ПС-10,\ ПС-11,\ ПС-12,\ ПС-13,\ ПС-14\}$.

б) Матрица инцидентности S области повреждения имеет размерность 6 × 4. Ненулевые элементы S заменяются на соответствующие выключатели, ОЗ, БРЗ, УРЗ и ЗШ для получения МИ-ТКНЭ.

в) ТКНСУ назначаются в соответствии с правилами раздела 2.2. Для В-1106 и В-1110 при наличии информации о ЗШ-11 ТКНСУ составляют (0,9833; 0,0062). Для В-1213 и В-1312 при наличии информации об ОЗ ТКНСУ также (0,9833; 0,0062). Информация о БРЗ, УРЗ и ЗШ на неповреждённых компонентах отсутствует, их ТКНСУ равны (0,2; 0,7) [18].

г) Слияние в узле Add: $ЗШ_c = Add(ЗШм,\ Вм)$, $ОЗ_c = Add(ОЗм,\ Вм)$, $БРЗ_c = Add(БРЗм,\ Вм)$, $УРЗ_c = Add(УРЗм,\ Вм)$. Веса: $\omega_1 = 0{,}6$ (для матриц защит), $\omega_2 = 0{,}4$ (для матрицы В).

д) Топологическое отображение УРЗ: ТЛ и ТШ вычисляются по S, затем $УРЗ_{м.Ш}$ и $УРЗ_{м.Л}$ - по формулам отображения.

е) Узел Max:

$$B = max(ЗШ_c, УРЗ_{м.Ш}),\ Л = max(ОЗ_c, БРЗ_c, УРЗ_{м.Л}).$$

ж) Узлы RS и CS:

$$B_P = RS(B),\ L_P = CS(Л).$$

Векторы результатов:

$$B_P = [(0,2813;0,6257),(0,42;0,5),(0,9072;0,0942),(0,3760;0,5438),(0,3221;0,5916),(0,2;0,7)]^T.$$

$$L_P = \begin{bmatrix} (0,3760;\ 0,5438),\ (0,3674;\ 0,5477), (0,31;\ 0,6), \\ (0,3760;\ 0,5438), (0,9881;\ 0,0625), (0,2570;\ 0,6481) \end{bmatrix}.$$

Результаты диагностики (таблица 2): одновременно повреждены ПС-11 (измеренное значение 0,9896 > 0,65) и Л-1213 (измеренное значение 0,9937 > 0,65). Все остальные компоненты – неповреждённые (измеренные значения ниже порога). Диагноз верный для обоих повреждённых компонентов.

Таблица 1. Результаты диагностики Случая 3 (множественное повреждение)

Компонент	ТКНСУ	Измеренное значение
ПС-06	(0,2813; 0,6257)	< 0,65
ПС-10	(0,42; 0,5)	0
ПС-11	(0,9072; 0,0942)	0,9896
ПС-12	(0,3760; 0,5438)	0
ПС-13	(0,3221; 0,5916)	0
ПС-14	(0,2; 0,7)	0
Л-0611	(0,3760; 0,5438)	< 0,65
Л-0612	(0,3674; 0,5477)	< 0,65
Л-0613	(0,31; 0,6)	0
Л-1011	(0,3760; 0,5438)	< 0,65
Л-1213	(0,9881; 0,0625)	0,9937
Л-1314	(0,2570; 0,6481)	0

Случай 3 показывает, что диагностическая модель на основе МИ-ТКНЭ корректно определяет оба повреждённых компонента при одновременном возникновении двух повреждений. Процессы вывода для шин и линий независимы и не влияют друг на друга, что обеспечивает надёжность диагностики при множественных повреждениях.

4.2. Тестовая схема 2: фрагмент ЕЭС России (118 узлов)

Для проверки метода на крупномасштабной схеме использован фрагмент расчётной модели ЕЭС России, применяемой АО «СО ЕЭС», – 118 узлов, 179 линий, классы напряжения 110–750 кВ. Схема отражает реальную топологию с российскими стандартами РЗА.

Рассмотрено 14 сценариев (Случаи 4–17): одиночные и множественные повреждения, отказы выключателей, пропуски аварийной информации, ложные срабатывания защит. Во всех 14 сценариях метод дал корректные результаты. Например, в Случае 16 (двойное повреждение с отказом ЗШ) измеренное значение повреждённой шины составило 0,7222 > 0,65 – компонент корректно диагностирован как повреждённый.

4.3. Сравнение с существующими методами

Метод сравнён с шестью существующими подходами: БС, нечёткий вывод, СП, SNP-системы, модель IFTGE [19]. Всего рассмотрено 17 сценариев (таблица 3).

Таблица 2. Сравнение результатов диагностики (корректных/общее число случаев)

Метод	Сл. 1–3	Сл. 4–7	Сл. 8–11	Сл. 12–15	Сл. 16–17	Всего	Моделей для 118 узлов
БС	3/3	4/4	2/4	2/4	2/2	13/17	297
Нечёткий вывод	3/3	4/4	1/4	2/4	1/2	11/17	297
СП	3/3	4/4	3/4	3/4	2/2	15/17	297
SNP	3/3	4/4	3/4	4/4	1/2	15/17	297
IFTGE	3/3	4/4	4/4	3/4	2/2	16/17	1
Предлагаемый	3/3	4/4	4/4	4/4	2/2	17/17	1

Предлагаемый метод обеспечивает 17 из 17 корректных диагнозов против 15/17 у SNP-систем, 16/17 у модели IFTGE и 13/17 у БС. Кроме того, метод требует единую диагностиче-

скую модель независимо от масштаба энергосистемы, тогда как методы на основе БС, СП и SNP-систем требуют 297 отдельных моделей для 118-узловой схемы.

Размерность матриц области повреждения варьируется от 3 × 2 до 13 × 13 в зависимости от размаха повреждения, тогда как модель IFTGE использует матрицы 118 × 179. Все вычисления выполнены в MATLAB на компьютере с процессором Intel Core i7-8750H (2,2 ГГц) и 16 ГБ ОЗУ. Время диагностики менее 2 мс, что удовлетворяет требованиям оперативной диагностики.

5. Заключение

В статье предложен метод диагностики повреждений энергосистем на основе ТКНМ и матриц инцидентности. Метод строит матрицы инцидентности области повреждения, сужая топологический поиск и снижая размерность. Правила назначения ТКНСУ учитывают пропуски и ложные сигналы аварийной информации. Диагностическая модель на основе МИ-ТКНЭ обеспечивает матричный вывод, независимый от масштаба энергосистемы и адаптирующийся к топологическим изменениям.

Тестирование на фрагментах ЕЭС России (13- и 118-узловые схемы) подтвердило корректность диагностики в 17 из 17 сценариев, включая одиночные и множественные повреждения, отказы выключателей и пропуски аварийной информации. Время диагностики – менее 2 мс. Перспективным направлением является интеграция метода с КПМ «РИТМ» – российским комплексом моделирования энергосистем в реальном времени.

Литература

1. Pham M.T. et al. A review of power system fault diagnosis // Electric Power Systems Research. 2022. Vol. 209. Art. 107942.
2. Chen J. et al. Power system fault diagnosis based on knowledge graph // IEEE Transactions on Power Delivery. 2023. Vol. 38, No. 1. P. 387–397.
3. Wen F., Chang C.S. Probabilistic approach for fault-section estimation in power systems based upon a refined fuzzy reasoning model // IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution. 1997. Vol. 144, No. 3. P. 269–276.
4. Jung J. et al. An expert system for fault section diagnosis of power systems // IEEE Transactions on Power Systems. 1995. Vol. 10, No. 2. P. 624–632.
5. Lee H.J. et al. Fuzzy-expert system for fault diagnosis // IEEE Transactions on Power Delivery. 1996. Vol. 11, No. 4. P. 1902–1908.
6. Cardozo G.M.C., Lourival M.M. Cause-effect networks for fault diagnosis in power systems // Electric Power Systems Research. 2018. Vol. 163. P. 414–424.
7. Yang H.T. et al. A new knowledge based fault diagnosis approach for power systems // IEEE Transactions on Power Delivery. 1997. Vol. 12, No. 1. P. 108–115.
8. Souza J.C.S. et al. Fault location in electrical power systems using ANN // IEEE Transactions on Power Delivery. 2018. Vol. 33, No. 6. P. 2981–2990.
9. Moradzadeh M. et al. Application of ANN for fault diagnosis in power systems // Energies. 2020. Vol. 13, No. 15. Art. 3843.
10. Liu W., Lin Z., Wen F. et al. Analytical fault diagnosis method for power systems // IEEE Transactions on Power Systems. 2016. Vol. 31, No. 4. P. 3131–3142.
11. Sun J. et al. Fault diagnosis of power systems based on Petri nets // IEEE Transactions on Power Delivery. 2020. Vol. 35, No. 3. P. 1320–1330.
12. Luo X. et al. Petri net based fault diagnosis for power systems // IEEE Transactions on Power Systems. 2021. Vol. 36, No. 2. P. 1234–1245.
13. Zhang X. et al. SNP systems for power system fault diagnosis // IEEE Transactions on Power Delivery. 2020. Vol. 35, No. 4. P. 1689–1700.
14. Wang T. et al. Spiking neural P systems for fault diagnosis // IEEE Transactions on Power Systems. 2021. Vol. 36, No. 5. P. 4321–4332.
15. Li Y. et al. IFSNP systems for power system diagnosis // IEEE Transactions on Power Delivery. 2022. Vol. 37, No. 3. P. 1789–1800.

16. Zhang X. et al. Hierarchical SNP systems for power system fault diagnosis // IEEE Transactions on Power Delivery. 2022. Vol. 37, No. 4. P. 2456–2467.
17. Chen Q. et al. Information fusion of topological graph elements for power system fault diagnosis // IEEE Transactions on Power Delivery. 2022. Vol. 37, No. 5. P. 3801–3812.
18. Atanassov K.T. Intuitionistic fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1986. Vol. 20, No. 1. P. 87–96.
19. DOE. Statistics of protective relay operations in power systems. U.S. Dept. of Energy, 2005.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ СИСТЕМНОЙ ДОСТОВЕРНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Аунг Чжо Мьо, Тет Паин Тху, Сай Ванна Хтун

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Зеленоград

Работа развивает концепцию системной достоверности автоматизированных систем технической диагностики (АСТД) энергооборудования применительно к условиям цифровизации и ужесточения требований кибербезопасности. Предложена расширенная мультипликативная модель, учитывающая физические, кибернетические, динамические и метрологические факторы. Приведена математическая формализация компонентов. Проведена количественная оценка эффективности модели для трёх классов систем: цифровой подстанции (IEC 61850), традиционной телемеханики (ГОСТ 26.205-88) и распределённого мониторинга на базе GSM/GPRS. Показано, что модель позволяет выявлять «узкие места» и обосновывать проектные решения. Обоснована необходимость применения суперкомпьютерных технологий для имитационного моделирования и верификации.

Ключевые слова: автоматизированная система технической диагностики, системная достоверность, кибербезопасность, IEC 61850, IEC 62351, математическое моделирование, суперкомпьютерные технологии.

1. Введение

Современная энергетика характеризуется переходом к цифровым подстанциям, широким внедрением стандарта IEC 61850, беспроводных сенсорных сетей и технологий Интернета вещей. В этих условиях автоматизированные системы технической диагностики (АСТД) энергооборудования сталкиваются с новыми вызовами: рост объёмов диагностической информации, ужесточение требований к времени реакции, появление целенаправленных кибератак на каналы передачи данных и измерительные тракты.

Традиционная модель системной достоверности, предложенная в 2015 году [1], ориентирована преимущественно на защиту от физических помех в канале связи и не учитывает кибернетические угрозы, динамическую деградацию и метрологические аспекты, критически важные в современных цифровых системах. Цель настоящей работы - развитие идеи системной достоверности для новых условий, её математическая формализация и количественная оценка эффективности для конкретных классов систем.

Под системной достоверностью понимается способность АСТД сохранять целостность и доступность диагностической информации при комплексном воздействии дестабилизирующих факторов на всей трассе её доставки: от датчика до обрабатывающего центра. В отличие от классического подхода, где достоверность оценивалась вероятностью необнаруживаемого искажения помехами в канале связи, современная модель должна учитывать:

- физические факторы (помехи, сбои, отказы аппаратуры);
- кибернетические угрозы (спуфинг, инъекция ложных данных, компрометация ключей);
- динамические характеристики трассы (задержки, джиттер);
- метрологическую валидность измерительных преобразователей.

Предлагается рассматривать системную достоверность $P_{сист}$ как произведение четырёх компонентов:

$$P_{сист}^{совр} = P_{физ} \cdot P_{киб} \cdot P_{дин} \cdot P_{метр},$$

где: $P_{физ}$ – компонент физической достоверности; $P_{киб}$ – компонент кибербезопасности; $P_{дин}$ – динамический компонент; $P_{метр}$ – метрологический компонент.

Классическая сумма вероятностей необнаруживаемых искажений и неисправностей по всей трассе, возведённая в четвёртую степень (с учётом минимального кодового расстояния $d \geq 4$) [1]:

$$P_{физ} = \Sigma_{j=1..M} P_{необ_j} + \Sigma_{i=1..m} \left(\lambda_i^{мод} P_i^{мод} \right)^4 C_{q_i}{}^4,$$

где: $P_{необ_j}$ – вероятность необнаруживаемого искажения на *j-м* участке трассы; $\lambda_i^{мод}$ – интенсивность отказов элементов *i-го* модуля; $P_i^{мод}$ – вероятность необнаруживаемого искажения при отказе; q_i – число элементов в модуле.

В современных АСТД на базе IEC 61850 для защиты GOOSE- и SV-сообщений применяется HMAC на основе AES-128/256 (IEC 62351-6:2020) [2]. Однако остаётся вероятность компрометации ключей или атаки «человек посередине». Вероятность необнаруживаемого киберискажения:

$$P_{киб} = 1 - \Pi_{i=1..Nатак} \left(1 - P_{успех_атаки_i} \cdot P_{необнаружения_i} \right),$$

где: $P_{успех_атаки_i}$ – вероятность успешной реализации *i-й* атаки с учётом механизмов защиты; $P_{необнаружения_i}$ – вероятность того, что система диагностики не обнаружит факт компрометации.

В АСТД реального времени критично время доставки. При превышении максимально допустимого времени реальная достоверность может снижаться на несколько порядков. Вводится коэффициент динамической деградации:

$$P_{дин} = exp\left(-\lambda_д \cdot T_{доставки} / T_{доп}^{макс} \right),$$

где: $\lambda_д$ – эмпирический коэффициент чувствительности к задержкам; $T_{доставки}$ – фактическое время доставки; $T_{доп}^{макс}$ – максимально допустимое время.

Современные SCADA/EMS требуют периодической метрологической валидации сигналов. Коэффициент валидности:

$$P_{метр} = N_{валидных} / N_{общих},$$

где: $N_{валидных}$ – число сигналов, прошедших метрологическую валидацию; $N_{общих}$ – общее число диагностируемых сигналов.

2. Оценка эффективности модели для конкретных систем

Проведём количественную оценку компонентов модели для трёх representative-систем: цифровой подстанции (IEC 61850), традиционной телемеханики (ГОСТ 26.205-88) и распределённого мониторинга на базе GSM/GPRS. Результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Оценка компонентов модели для конкретных систем

Система	$P_{физ}$	$P_{киб}$	$P_{дин}$	$P_{метр}$	$P_{сист}^{совр}$
Цифровая подстанция (IEC 61850, GOOSE/SV)	~1 (BER ≤ 10^{-10})	0,9998 (TLS 1.2, HMAC)	~0,95 (задержка ≤ 3 мс)	0,99 (класс 0,5S)	≈ 0,94
Традиционная телемеханика (ГОСТ 26.205-88, ТУ/ТС)	0,99999 (первая категория)	0,9999 (изолированные каналы)	0,85 (задержка ≤ 1 с)	0,98	≈ 0,83
Распределённый мониторинг (SCADA + GSM/GPRS)	0,9999 ($\lambda \approx 10^{-6}$ ч$^{-1}$)	0,999 (базовая аутентификация)	0,80 (задержки GPRS)	0,97	≈ 0,77

Пояснения к оценкам

1. $P_{физ}$. Для цифровых подстанций на волоконно-оптических линиях вероятность битовой ошибки (BER) составляет 10−10 и ниже, что даёт $P_{физ} \approx 1$. Для традиционных систем телемеханики требования первой категории ГОСТ 26.205-88 обеспечивают вероятность необнаруживаемой ошибки на уровне $10^{-10} \ldots 10^{-12}$. Для систем на GSM/GPRS-каналах интенсивность отказов

коммуникаторов составляет $\approx 13 \cdot 10^{-6}\ ч^{-1}$ [3], что даёт $P_{физ} \approx 0,9999$ при времени эксплуатации ~1 год.

2. $P_{киб}$. Современные цифровые подстанции применяют IEC 62351-3 (TLS 1.2 с взаимной аутентификацией) и HMAC для GOOSE/SV. Статистика показывает, что 77 % ОТ-сред подвергались кибер-инцидентам, а 52 % респондентов считают успешную кибератаку на ICS вероятной в течение года [4]. Для оценки примем $P_{успех} \approx 0,01$ и $P_{необн} \approx 0,02$. Тогда $P_{киб} = 1 - 0,01 \cdot 0,02 = 0,9998$. Для традиционных систем с изолированными каналами $P_{киб} = 0,9999$, для SCADA на GPRS - 0,999.

3. $P_{дин}$. Для GOOSE/SV критическое время передачи - 3 мс. При выполнении этого требования $P_{дин} \approx 0,95$ (при $\lambda_д = 0,05$). Для телесигнализации по ГОСТ 26.205-88 допустимое время - до 1 с, что при реальных задержках 0,2–0,5 с даёт $P_{дин} \approx 0,85$. Для GPRS-каналов задержки достигают нескольких секунд, поэтому $P_{дин} \approx 0,80$.

4. $P_{метр}$. Для трактов телеметрии с классом точности 0,5S и горячим резервированием преобразователей $P_{метр} \approx 0,99$. Для систем без дублирования и с классом точности 1,0 - 0,97 - 0,98.

3. Обсуждение результатов

Для цифровой подстанции модель даёт $P_{систсовр} \approx 0,94$. При идеальных физических каналах и современных средствах защиты основной вклад в снижение системной достоверности вносят динамический ($P_{дин} \approx 0,95$) и метрологический ($P_{метр} \approx 0,99$) компоненты. Это соответствует реальной практике, где задержки и метрологические погрешности критичны для функций РЗА.

Для традиционной телемеханики итог ≈ 0,83, причём основной вклад вносит динамический компонент ($P_{дин} \approx 0,85$), что объясняется более мягкими требованиями к времени передачи (до 1 с), но значительными реальными задержками в каналах связи.

Для распределённого мониторинга на GSM/GPRS итог ≈ 0,77, где доминируют динамический (0,80) и кибернетический (0,999) компоненты. Именно здесь модель показывает наибольшую ценность, поскольку позволяет количественно обосновать необходимость перехода на защищённые каналы и оптимизации протоколов обмена.

Предложенная модель эффективна для практической оценки конкретных систем, так как:

- позволяет количественно сравнить вклад различных факторов в итоговую достоверность;
- согласуется с реальными требованиями стандартов (IEC 61850, ГОСТ 26.205-88) и статистикой кибер-инцидентов;
- выявляет «узкие места» - для цифровых подстанций это динамика и метрология, для распределённых систем - задержки и кибербезопасность;
- может служить инструментом обоснования проектных решений по выбору каналов связи, средств защиты и алгоритмов обработки данных.

Верификация предложенной модели требует имитационного моделирования больших объёмов диагностических данных в реальном времени. Для этого целесообразно использовать суперкомпьютерные технологии, в частности, параллельные вычисления на GPU-кластерах и методы Монте-Карло для оценки вероятностных характеристик. Это позволит проводить сценарное моделирование кибератак и физических помех, а также оптимизировать параметры АСТД по критерию системной достоверности. Предварительные оценки показывают, что для моделирования одного сценария кибератаки на цифровую подстанцию с 1000 GOOSE-сообщений требуется порядка 109 вычислительных операций, что делает применение суперкомпьютерных технологий необходимым.

4. Заключение

Развитие идеи системной достоверности для современных условий превращает её из узкоспециализированного показателя в универсальную метрику кибер-физической надёжности автоматизированных систем диагностики. Предложенная мультипликативная модель учитывает физические, кибернетические, динамические и метрологические факторы. Количественная оценка для трёх классов систем показала её эффективность: для цифровой подстанции $P_{системр} \approx 0{,}94$, для традиционной телемеханики ≈ 0,83, для распределённого мониторинга на GPRS ≈ 0,77. Модель выявляет «узкие места» и обосновывает проектные решения. Дальнейшая работа предполагает численную реализацию модели на суперкомпьютерной платформе и её экспериментальную верификацию на стенде цифровой подстанции.

Литература

1. Тайк Аунг Чжо. Исследование и разработка методов и средств повышения эффективности автоматизированных систем технической диагностики энергетического оборудования: дис. канд. техн. наук., М., 2015.
2. IEC 62351-6:2020. Power systems management and associated information exchange – Data and communications security, Part 6: Security for IEC 61850.
3. ISO/IEC 27019:2024. Information security, cybersecurity and privacy protection – Information security controls for the energy utility industry.
4. SANS Institute. 2024 ICS/OT Cybersecurity Report, 2024.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОТРАСЛЕВОЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КОМПАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСШИРЕННОГО ГРАФА КОДОВ ОКВЭД

Н.В. Блохин

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Рассматривается алгоритм построения векторных представлений отраслевой принадлежности компаний по математической модели отраслевой структуры экономики, которая объединяет граф экономических связей компаний и расширенный граф кодов ОКВЭД. Представление компании зависит одновременно от присвоенных ей кодов, их положения в классификаторе и ее связей. Получена оценка числа операций одного шага алгоритма. Описан комплекс программ, реализующий алгоритм.

Ключевые слова: векторные представления, отраслевая принадлежность, ОКВЭД.

1. Введение

Отраслевая принадлежность компании является важным признаком в прикладных задачах анализа экономической деятельности, например при оценке кредитного риска контрагента. На практике отраслевая принадлежность определяется чаще всего только набором присвоенных компании кодов Общероссийского классификатора видов экономической деятельности. В работах [1–3] предложены описание отраслевой структуры экономики на основе графа кодов ОКВЭД, дополненного связями, полученными на основе информации о компаниях, и способы построения векторных представлений кодов и компаний на таком графе. В настоящей работе приводятся алгоритм, строящий представление компании одновременно по ее кодам, их положению в классификаторе и ее связям, оценка его вычислительной сложности и его программная реализация.

2. Постановка задачи

Исходные сведения описываются математической моделью отраслевой структуры экономики $M = (\mathcal{G}_C, G_O, \kappa)$. Через $\mathcal{G}_C = \left(G_C^{(1)}, \dots, G_C^{(S)}\right)$ обозначен граф экономических связей компаний, заданный последовательностью снимков состояния на промежутках $\Delta_1, \dots, \Delta_S$. Вершинами снимка $G_C^{(s)}$ служат наблюдения $v = (c, \Delta_s)$, то есть компания c на промежутке Δ_s. Множество наблюдений снимка обозначается $V_C^{(s)}$, множество связей – $E_C^{(s)}$. Связи графа разделены на $|R_C|$ видов. Через G_O обозначен расширенный граф кодов, который представляет собой дерево классификатора ОКВЭД 2 с множеством кодов O, дополненное связями нескольких видов на основе информации об отношениях между компаниями. Для создания дополнительных связей между парой кодов используются сведения о компаниях, которым присвоены оба кода, либо информация о наличии связи между двумя компаниями, основные коды которых образуют эту пару. Множество связей графа G_O вместе со связями соподчинения обозначается E_O^{ext}, множество их видов – R_O. Через κ обозначено отображение, которое сопоставляет наблюдению основной код $\kappa_0(v)$ и множество дополнительных кодов $\kappa_1(v)$.

Пусть $V_C = \bigcup_s V_C^{(s)}$ – это множество всех наблюдений. Каждому наблюдению сопоставлен вектор числовых признаков компании на данном промежутке. Прикладная задача на модели задается множеством объектов D, целевым отображением $y: D \to Y$ и подмножеством $D^* \subseteq D$, на котором значения y известны. Далее рассматривается частный случай, когда объектом $\delta \in D$ выступает узел графа, однако полученные результаты обобщаются и на другие прикладные задачи, где объектом являются, например, связи между узлами или подграфы.

Требуется вычислить оценку $\hat{y}(\delta)$ для каждого объекта $\delta \in D$. В предлагаемом решении оценка ищется в виде композиции двух отображений:

$$\hat{y}(v) = g(H_C(v)) \quad (1)$$

где $H_C: V_C \to \mathbb{R}^{d_C}$ – отображение, сопоставляющее наблюдению вектор (далее – представление наблюдения), который объединяет числовые признаки компании, ее окружение в графе экономических связей и ее отраслевую принадлежность; g – решающее правило, которое по этому вектору вычисляет оценку искомой величины.

Отображение H_C относится к компании, его значение вычисляется только по сведениям модели M и определено для любого наблюдения, в том числе не входящего в D. Отображение g относится к прикладной задаче. Поэтому при переходе к другой задаче на той же модели меняются D, y и вид g, а способ построения H_C остается прежним.

Пусть $Q(H_C)$ – значение показателя качества оценки (1) на части D^*, не участвовавшей в настройке. $Q(H_C)$ зависит от всех составляющих представления и от g. Чтобы оценить вклад способа учета отраслевой принадлежности, исходные сведения, состав признаков, граф связей, вид g, разбиение D^* и способ настройки фиксируются, а меняется только способ использования присвоенных компании кодов.

Требуется построить отображение H_C, при котором значение $Q(H_C)$ наибольшее, при трех условиях:

1) $d_C < |O|$, то есть представление компактнее унитарного кодирования, размерность которого равна числу кодов (в ОКВЭД 2 около 2850 категорий на всех уровнях);

2) значение $H_C(v)$ определено для каждого $v \in V_C$, в том числе для компании, не участвовавшей в настройке параметров, и для компании с редко встречающимся кодом;

3) значение $H_C(v)$ зависит и от строения классификатора, и от связей компании, а не только от набора присвоенных ей кодов.

Аналитическое решение этой задачи неизвестно. В разделе 3 приводится алгоритм, который строит H_C в семействе отображений с набором параметров Θ, находит параметры минимизацией дифференцируемого по Θ критерия и выбирает итоговые значения по наибольшему значению показателя качества на проверочной части D^*.

3. Алгоритм построения

Представление наблюдения строится из трех составляющих. Первая описывает окружение наблюдения и вычисляется по признакам компании и признакам связанных с ней компаний на том же временном промежутке. Две другие описывают отраслевую принадлежность и далее называются составляющими по кодам: одна строится по основному коду с учетом его положения в классификаторе, другая – по дополнительным кодам. Обе составляющие по кодам используют векторные представления кодов, вычисленные на расширенном графе кодов, а вклад каждого кода в них зависит от окружения наблюдения.

Представления кодов и представления окружения вычисляются одной и той же операцией – сверткой на графе со связями нескольких видов [4, 5]. Пусть на графе с множеством видов связей R каждой вершине u сопоставлен вектор $h_u^{(0)}$, а $N_r(u)$ – множество вершин, связанных с u связью вида $r \in R$. Слой свертки с номером l пересчитывает векторы вершин по правилам (2)–(3):

$$\varphi_r^{(l)}(u) = W_r^{\text{self},(l)} h_u^{(l)} + W_r^{\text{nbr},(l)} \frac{1}{|N_r(u)|} \sum_{u' \in N_r(u)} h_{u'}^{(l)} + b_r^{(l)} \quad (1)$$

$$h_u^{(l+1)} = \sum_{r \in R} \omega_r^{(l)} \varphi_r^{(l)}(u) \quad (2)$$

где $W_r^{\text{self},(l)}$, $W_r^{\text{nbr},(l)}$, $b_r^{(l)}$ – настраиваемые параметры слоя; $\omega_r^{(l)} \geq 0$, $\sum_r \omega_r^{(l)} = 1$ – настраиваемые веса видов связей.

При $N_r(u) = \emptyset$ второе слагаемое в (2) полагается равным нулю. Новый вектор вершины складывается из ее собственного вектора и среднего по соседям, отдельно по каждому виду связей, поэтому после L слоев в нем учтены вершины, удаленные от нее не более чем на L связей.

При заданных значениях всех параметров Θ представление наблюдения v вычисляется путем выполнения следующих действий:

1) Получение представления кодов. L_O слоев (2)–(3) на расширенном графе кодов дают вектор $h_o \in \mathbb{R}^{d_O}$ для каждого кода $o \in O$, в том числе не присвоенного ни одной компании. Начальные векторы кодов вычисляются по их наименованиям, поэтому различаются и у кодов, которые в данных не встречаются.

2) Получение представления окружения. L_C слоев (2)–(3) на снимке состояния, содержащем наблюдение v, дают вектор $h_v^{\text{env}} \in \mathbb{R}^{d_{\text{env}}}$. Начальными векторами служат признаки наблюдений.

3) Получение составляющей по основному коду. Пусть $o^{[1]}, \dots, o^{[K]}$ – путь от верхнего уровня классификатора до основного кода $\kappa_0(v)$ (путь кода меньшей глубины дополняется до длины K повторением самого кода). Вектор накапливается вдоль пути по правилу (4):

$$h^{[k]} = \alpha_0^{[k]}\, h^{[k-1]} + \alpha_1^{[k]}\, F\big(h_{o^{[k]}}\big), \quad k = 2, \dots, K \tag{3}$$

где $h^{[1]} \in \mathbb{R}^d$ – настраиваемое представление категории верхнего уровня; $F\colon \mathbb{R}^{d_O} \to \mathbb{R}^d$ – настраиваемое аффинное преобразование; $\alpha_0^{[k]}, \alpha_1^{[k]} \geq 0,\ \alpha_0^{[k]} + \alpha_1^{[k]} = 1$ – веса, с которыми объединяются накопленный вектор и представление очередного кода пути; они вычисляются настраиваемым отображением по этим двум векторам и представлению окружения наблюдения.

На уровнях, добавленных повторением кода, полагается $h^{[k]} = h^{[k-1]}$. Составляющей по основному коду служит $h_v^{\text{hier}} = h^{[K]}$. Поскольку веса зависят от h_v^{env}, у компаний с одним и тем же основным кодом, но разным окружением уровни классификатора входят в составляющую с разными весами.

4) Получение составляющей по дополнительным кодам по правилу (5):

$$h_v^{\text{extra}} = \textstyle\sum_{o \in \kappa_1(v)} \beta_v(o)\, h_o, \qquad \beta_v(o) = \frac{\exp \zeta_v(o)}{\sum_{o' \in \kappa_1(v)} \exp \zeta_v(o')}, \qquad \zeta_v(o) = \frac{\langle P(h_v^{\text{env}}), h_o \rangle}{\sqrt{d_O}} \tag{4}$$

где $P\colon \mathbb{R}^{d_{\text{env}}} \to \mathbb{R}^{d_O}$ – настраиваемое аффинное преобразование.

Код получает тем больший вес, чем лучше он согласуется с окружением компании. Если основной или дополнительные коды наблюдению не присвоены, соответствующая составляющая полагается нулевой.

5) Получение представления наблюдения (6) и расчет оценки по правилу (1):

$$h_v = H_C(v) = \Phi\big(\big[h_v^{\text{env}};\, h_v^{\text{hier}};\, h_v^{\text{extra}}\big]\big) \tag{5}$$

где $[\cdot]$ – операция конкатенации векторов; $\Phi\colon \mathbb{R}^{d_{\text{env}}+d+d_O} \to \mathbb{R}^{d_C}$ – настраиваемое линейное преобразование.

В расчетах в качестве g используется композиция линейных преобразований с нелинейными функциями между ними и размерностями промежуточных слоев не более d_C. При $Y = \{0,1\}$ последней применяется логистическая функция, и оценка принимает значения из интервала $(0; 1)$.

Множество D^* разбивается на обучающую часть D^*_{train}, проверочную D^*_{val} и тестовую D^*_{test}. Параметры Θ находятся минимизацией критерия (7):

$$\mathcal{L}(\Theta) = \mathcal{L}_{\text{task}}(\Theta) + \lambda_{\text{link}}\, \mathcal{L}_{\text{link}}(\Theta) + \lambda_{\text{okved}}\, \mathcal{L}_{\text{okved}}(\Theta) \tag{6}$$

где $\mathcal{L}_{\text{task}}$ – среднее значение функции потерь, сравнивающей оценку $\hat{y}$ со значениями y на обучающей части; $\mathcal{L}_{\text{link}}$ – слагаемое, которое тем меньше, чем ближе представления окружения наблюдений, соединенных связью, по сравнению с произвольными парами наблюдений того же снимка; $\mathcal{L}_{\text{okved}}$ – такое же слагаемое для представлений кодов, соединенных дополнительной связью в G_O; $\lambda_{\text{link}}, \lambda_{\text{okved}} \geq 0$ – множители, задающие вклад соответствующих слагаемых $\mathcal{L}$.

Размерности d_O, d_{env}, d, d_C, числа слоев L_O и L_C, множители λ_{link}, λ_{okved}, скорость обучения η и предельное число шагов $t_{\max}$ задаются до выполнения алгоритма. Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать начальные значения параметров $\Theta^{(0)}$.

Шаг 2. Выполнить шаги вычисление 1)–5) на снимках, содержащих наблюдения из D^*_{train}.

Шаг 3. Вычислить значение критерия (7).

Шаг 4. Вычислить градиент $\nabla\mathcal{L}$ и изменить параметры по правилу градиентного спуска (в расчетах применяется алгоритм Adam [6] с величиной шага, определяемой по каждой компоненте Θ отдельно).

Шаг 5. Вычислить показатель качества оценки (1) на D^*_{val}; если он превосходит наибольшее достигнутое значение, сохранить текущие значения параметров.

Шаг 6. Если наибольшее значение показателя обновлялось за заданное число последних шагов и число шагов меньше $t_{\max}$, перейти к шагу 2; иначе принять сохраненные значения за Θ^*.

После настройки представление любого наблюдения модели, в том числе не входящего в D, получается выполнением действий 1)–5) при $\Theta = \Theta^*$. Критерий (7) не является выпуклым по Θ, поэтому градиентный спуск обеспечивает лишь локальный минимум, зависящий от начальных значений.

Градиент в шаге 4 вычисляется автоматическим дифференцированием, число операций которого не более чем в постоянное число раз превышает число операций вычисления самого критерия [7]. Поэтому порядок числа операций одного шага определяется действиями 1)–5), вычислением критерия (7) и изменением параметров, и для него справедлива оценка (8):

$$O\left(\mathcal{N}_{\text{base}} + \sum_{s \in S_{\text{train}}} \left(\left|E_C^{(s)}\right| \mathcal{N}_{\text{edge}} + \left|V_C^{(s)}\right| \mathcal{N}_{\text{node}}\right)\right) \quad (7)$$

где S_{train} – множество номеров снимков, содержащих наблюдения из D^*_{train}; $\mathcal{N}_{\text{base}}$ – число операций, не зависящее от числа наблюдений и связей (действие 1), расчет $\mathcal{L}_{\text{okved}}$ и изменение параметров); $\mathcal{N}_{\text{edge}}$ – число операций, приходящихся на одну связь снимка (агрегация по соседям при свертке в действии 2), расчет $\mathcal{L}_{\text{link}}$); $\mathcal{N}_{\text{node}}$ – число операций, приходящихся на одно наблюдение (действия 3)–5) и расчет $\mathcal{L}_{\text{task}}$).

Затраты на одну связь и на одно наблюдение определяются размерностями представлений, числом слоев свертки, числом видов связей, глубиной классификатора и наибольшим числом дополнительных кодов наблюдения, а $\mathcal{N}_{\text{base}}$ – размером расширенного графа кодов и числа настраиваемых параметров. Затраты на граф кодов от числа компаний не зависят, поскольку число вершин этого графа задано классификатором. Таким образом, число операций шага растет линейно с числом наблюдений и связей.

4. Программная реализация

Алгоритм реализован в комплексе проблемно–ориентированных программ на языке Python, состоящем из четырех подсистем. Подсистема подготовки данных собирает сведения о компаниях, присвоенных им кодах и связях между ними и строит по ним расширенный граф кодов G_O и снимки состояния $G_C^{(s)}$ с векторами признаков наблюдений. Вычислительное ядро выполняет действия 1)–5), вычисляет критерий (7) и выполняет шаги 1–6 алгоритма. Подсистема оценивания вычисляет показатель качества на тестовой части D^*_{test}, и проверяет значимость различий этого показателя между вариантами решения. Подсистема управления расчетами записывает последовательность этапов, версии исходных данных и промежуточных результатов и начальные значения генератора псевдослучайных чисел, что позволяет повторить любой расчет.

Готовыми программными средствами выполняются только операции общего назначения. Свертка (2)–(3) реализована средствами пакета PyTorch Geometric [8]. Построение расширенного графа кодов, вычисление составляющих по основному и дополнительным кодам и настройка параметров реализованы автором. При переходе к другой прикладной задаче заменяются решающее правило g и слагаемое $\mathcal{L}_{\text{task}}$, а части, выполняющие действия 1)–4), не меняются.

Комплексом решены несколько прикладных задач. В задаче оценки вероятности дефолта заемщика по данным бюро кредитных историй представления, построенные алгоритмом, повысили среднее значение коэффициента Джини с 0,5941 до 0,6323 по сравнению с наилучшим из известных способов кодирования основного кода при тех же признаках и том же решающем правиле. В задаче оценки риска несостоятельности контрагента по общедоступным государственным реестрам коэффициент Джини вырос с 0,2438 до 0,2605 по сравнению с решением на том же графе связей, в котором представления кодов берутся из таблицы без расширенного графа кодов, а составляющие по основному и дополнительным кодам не строятся.

5. Заключение

На практике отраслевая принадлежность компании описывается только набором присвоенных ей кодов ОКВЭД, без учета положения этих кодов в классификаторе и связей компании. В работе ставилась задача построить векторное представление наблюдения, то есть компании на заданном промежутке, которое учитывает и коды, и их положение в классификаторе, и связи компании. Представление должно быть определено для любой компании, иметь размерность меньше числа кодов ОКВЭД и обеспечивать наибольшее качество решения прикладной задачи.

Для решения задачи предложен алгоритм, который строит представление компании из трех частей. Первая описывает окружение компании и вычисляется по признакам самой компании и связанных с ней компаний. Вторая описывает основной код и накапливается вдоль пути от верхнего уровня классификатора до этого кода. Третья объединяет дополнительные коды. Векторы кодов вычисляются на расширенном графе кодов, а вес, с которым каждый уровень классификатора и каждый дополнительный код входят в представление, зависит от окружения компании. Параметры алгоритма находятся минимизацией критерия, в который наряду с расхождением на размеченных объектах входят слагаемые, сближающие представления связанных наблюдений и связанных кодов. Получена оценка вычислительной сложности алгоритма. Алгоритм реализован в комплексе проблемно–ориентированных программ.

Алгоритм проверен на реальных данных в двух прикладных задачах. По сравнению с решениями, отличающимися только способом учета отраслевой принадлежности, представления, построенные алгоритмом, повысили коэффициент Джини на 0,038 в задаче оценки вероятности дефолта заемщика и на 0,017 в задаче оценки риска несостоятельности контрагента по общедоступным государственным реестрам.

Литература

1. Блохин Н.В., Макрушин С.В. Построение векторного представления отраслей эконо-мики с помощью графовых нейронных сетей // Информационно–измерительные и управляющие системы. 2023. Т. 21, № 5. С. 7–15. DOI: 10.18127/j20700814–202305–02.
2. Блохин Н.В., Макрушин С.В. Построение эмбеддингов компаний на основе векторного представления отраслей экономики и связей между компаниями // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2025. Т. 27, № 2. С. 5–12. DOI: 10.18127/j19998554–202502–01.
3. Блохин Н.В. Построение иерархических векторных представлений кодов ОКВЭД с применением полносвязных адаптеров // Нелинейный мир. 2025. Т. 23, № 1. С. 59–71. DOI: 10.18127/j20700970–202501–07.
4. Schlichtkrull M., Kipf T.N., Bloem P., et al. Modeling Relational Data with Graph Convolu-tional Networks // The Semantic Web. ESWC 2018. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10843. Cham: Springer, 2018. P. 593–607. DOI: 10.1007/978–3–319–93417–4_38.
5. Hamilton W.L., Ying R., Leskovec J. Inductive Representation Learning on Large Graphs // Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NIPS 2017). 2017. P. 1025–1035.
6. Kingma D.P., Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization // 3rd International Con-ference on Learning Representations (ICLR 2015). 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.
7. Baydin A.G., Pearlmutter B.A., Radul A.A., Siskind J.M. Automatic Differentiation in Ma-chine Learning: a Survey // Journal of Machine Learning Research. 2018. Vol. 18, No. 153. P. 1–43.
8. Fey M., Lenssen J.E. Fast Graph Representation Learning with PyTorch Geometric // ICLR 2019 Workshop on Representation Learning on Graphs and Manifolds. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1903.02428.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННЫЙ РЕШАТЕЛЬ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА–ПИТАЕВСКОГО

Л.Н. Валеева, И. Никитин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Рассматривается единый нейросетевой решатель семейства двумерных нестационарных задач Гросса–Питаевского с варьируемыми параметрами нелинейного взаимодействия и удерживающего потенциала. Пространственно-временные координаты и физические параметры подаются на вход модели, аппроксимирующей комплексную волновую функцию в заданной параметрической области. Обучение сочетает численные траектории метода расщепления Фурье и невязку исходного уравнения в независимо сэмплируемых точках. Сравниваются Residual PINN и физически-информированная сеть Колмогорова–Арнольда; для стабилизации используются нормализация, многотраекторные батчи, расширение временного интервала и балансировка компонент функции потерь.

Ключевые слова: уравнение Гросса–Питаевского, физически-информированные нейронные сети, параметрические дифференциальные уравнения, PINN, Kolmogorov–Arnold Network.

1. Введение

Уравнение Гросса–Питаевского является основной среднеполевой моделью динамики слабовзаимодействующего бозе-конденсата и представляет собой нелинейное уравнение Шрёдингера [1]. Для его численного решения разработаны эффективные конечно-разностные и спектральные методы; в частности, методы расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье позволяют с высокой точностью рассчитывать нестационарную динамику [1, 2].

Для одного фиксированного набора физических параметров такой расчёт является сравнительно недорогим. Однако исследование зависимости динамики от интенсивности нелинейного взаимодействия и геометрии удерживающего потенциала требует многократного решения прямой задачи. Этот режим характерен для сканирования пространства параметров, оптимизации и обратных задач, где прямой решатель вызывается на каждой итерации процедуры восстановления.

Физически-информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) включают исходное дифференциальное уравнение непосредственно в функцию потерь [3]. В классической постановке PINN строится для одной начально-краевой задачи. В настоящей работе параметры физической системы также подаются на вход сети, так что одна модель аппроксимирует не отдельную траекторию, а параметрическое семейство решений. Основной задачей является построение такого решателя для двумерного нестационарного уравнения Гросса–Питаевского и исследование устойчивой схемы его обучения. Особое внимание уделяется согласованию ошибки по численным данным и физической невязки, поскольку для PINN характерен дисбаланс градиентов различных компонент функции потерь [4].

2. Постановка задачи и численные данные

Рассматривается безразмерное двумерное нестационарное уравнение Гросса–Питаевского

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + V(x,y)\psi + g|\psi|^2\psi \qquad (1)$$

где внешнее поле задаётся анизотропной гармонической ловушкой

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) \quad (2)$$

Здесь g характеризует интенсивность нелинейного взаимодействия, а частоты ωx и ωy определяют удерживающий потенциал. Параметр задачи имеет вид μ=(g,ωx,ωy). Решение рассматривается в области (x,y)∈[-5,5]^2 на временном интервале t∈[0,5] с периодическими граничными условиями. Начальное состояние задаётся нормированным гауссовским профилем.

Эталонные решения генерируются методом расщепления Фурье: кинетическая часть уравнения вычисляется в спектральном пространстве, а потенциальная и нелинейная части – в координатном. Сформирован набор из 150 траекторий, соответствующих различным комбинациям g, частоты ωx и ωy. Для каждой траектории сохраняются действительная и мнимая части ψ=u+iv и соответствующие физические параметры. Разбиение на обучающую и тестовую выборки выполняется по целым траекториям, поэтому комбинации параметров, используемые при проверке, не участвуют в оптимизации сети.

Искомая параметрическая модель задаётся отображением

$$\left(x, y, t, g, \omega_x, \omega_y\right) \mapsto \hat{\psi}_\theta\left(x, y, t; g, \omega_x, \omega_y\right) = u_\theta + i v_\theta \quad (3)$$

Начальное условие и аналитический вид потенциала фиксированы; поэтому модель является конечномерным параметрическим суррогатом прямой динамической задачи, а не оператором для произвольных начальных функций.

3. Физически-информированное обучение

Пространственно-временные координаты нормализуются, физические параметры g, ωx, ωy и компоненты решения стандартизируются по обучающей выборке. При вычислении физической невязки производные пересчитываются в исходные координаты с учётом масштабирования. Функция потерь объединяет ошибку по численным данным и невязку уравнения:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda_f \mathcal{L}_{\text{phys}} \quad (4)$$

Ошибка по данным задаётся среднеквадратичным отклонением действительной и мнимой компонент от численного решения. Для построения физической части подставим ψ=u+iv в (1). Действительная и мнимая компоненты невязки имеют вид

$$f_u = -v_t + \frac{1}{2}\Delta u - Vu - g(u^2 + v^2)u \quad (5a)$$

$$f_v = u_t + \frac{1}{2}\Delta v - Vv - g(u^2 + v^2)v \quad (5b)$$

Производные вычисляются автоматическим дифференцированием, а физическая ошибка определяется средним значением суммы квадратов двух компонент невязки в коллокационных точках. Эти точки сэмплируются непрерывно внутри расчётной области и не обязаны совпадать с узлами сетки, использованной численным методом. На каждом шаге обучения случайно выбираются четыре траектории; для каждой используются 2048 точек численного решения и 8192 коллокационные точки. Таким образом, одно обновление параметров сети одновременно учитывает несколько физических режимов.

При прямом суммировании компонент (4) наблюдается существенный дисбаланс градиентов: физическая часть содержит производные первого и второго порядка и кубическую нелинейность, поэтому её масштаб может заметно отличаться от масштаба ошибки по данным. Для оценки относительного веса используется отношение максимальных модулей градиентов

$$\hat{\lambda}_f = \frac{\max\left|\nabla_\theta \mathcal{L}_{\text{data}}\right|}{\max\left|\nabla_\theta \mathcal{L}_{\text{phys}}\right| + \varepsilon} \quad (6)$$

с последующим экспоненциальным сглаживанием коэффициента. Дополнительно исследовались фиксированные малые значения λ_f. Вторая мера стабилизации связана с причинной структурой динамической задачи: обучение начинается на коротком интервале времени, после чего верхняя граница последовательно увеличивается до t=5. Такая схема близка к причинным стратегиям обучения эволюционных PINN [5] и уменьшает ошибку на поздних временах.

4. Архитектуры и результаты

Основная архитектура представляет собой полносвязную остаточную сеть (Residual PINN) со скрытой шириной 96. Остаточные связи улучшают распространение градиента, а для пространственных координат используются периодические признаки, согласованные с граничными условиями. Модель сначала оптимизируется методом Adam, после чего выполняется дооптимизация L-BFGS.

В качестве альтернативы исследована физически-информированная сеть Колмогорова–Арнольда (PiKAN). В сетях KAN фиксированные функции активации заменяются обучаемыми одномерными функциями на рёбрах [6]. Используется конфигурация из четырёх скрытых слоёв шириной 48. Для PiKAN также рассматривалось жёсткое включение известного начального состояния в представление решения, при котором сеть аппроксимирует только его динамическое изменение. Применение KAN в physics-informed постановках исследуется в современных работах по решению прямых и обратных задач для PDE [7].

Таблица 1. Основные характеристики исследованных моделей

Модель	Архитектура	Оптимизация	Относит. ошибка	Невязка PDE
Residual PINN	ширина 96	Adam + L-BFGS	порядка 10^{-2}	10^{-4}--$5\cdot10^{-4}$
PiKAN	4 слоя, ширина 48	Adam	порядка 10^{-2}	порядка 10^{-3}

Качество оценивается по относительной L2-ошибке комплексной волновой функции, ошибке плотности $|\psi|^2$, невязке уравнения на независимых коллокационных точках и сохранению нормы. Для лучших конфигураций относительная ошибка решения имеет порядок 10^{-2}, тогда как средняя физическая невязка Residual PINN достигает порядка 10^{-4}--$5\cdot10^{-4}$. Наиболее устойчивое обучение получено для остаточной архитектуры. PiKAN воспроизводит основную динамику с сопоставимым порядком ошибки по решению, однако сильнее зависит от регуляризации и настройки физической части функции потерь и в проведённых экспериментах не даёт устойчивого преимущества перед Residual PINN.

Увеличение веса физической компоненты не приводит к монотонному уменьшению ошибки относительно численной траектории. При доминировании физической компоненты сеть может уменьшать локальную невязку уравнения, одновременно отклоняясь от решения, определяемого начальным условием. Поэтому физическая невязка используется как дополнительное ограничение, а не как единственный критерий качества. Параметрическое обобщение проверяется на комбинациях g, частоты ωx и ωy, полностью исключённых из обучения, что отделяет интерполяцию по физическим параметрам от восстановления пространственно-временных точек уже известной траектории.

5. Заключение

Построен единый физически-информированный нейросетевой решатель семейства двумерных нестационарных задач Гросса–Питаевского. Коэффициент нелинейного взаимодействия и параметры анизотропного потенциала включены непосредственно во вход модели, что позволяет одной сети аппроксимировать решения для различных физических конфигураций. Обучение основано на совместном использовании 150 численных траекторий и невязки исходного уравнения в независимо сэмплируемых точках. Нормализация, многотраекторное сэмплирование, постепенное расширение временного интервала и балансировка компонент функции потерь обеспечивают устойчивость оптимизации. Сравнение Residual PINN и PiKAN показывает, что для рассматриваемой задачи качество определяется не только выразительностью архитектуры, но и устойчивостью вычисления производных и совместной оптимизации численной и физической частей. Полученный прямой дифференцируемый решатель предназначен для последующего использования в обратных задачах восстановления физических параметров и при переходе к стационарной спектральной постановке уравнения Гросса–Питаевского.

Литература

1. Bao W., Cai Y. Mathematical theory and numerical methods for Bose–Einstein condensation // Kinetic and Related Models. 2013. Vol. 6, No. 1. P. 1–135.
2. Bao W., Jaksch D., Markowich P.A. Numerical solution of the Gross–Pitaevskii equation for Bose–Einstein condensation // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 187, No. 1. P. 318–342.
3. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learn-ing framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differ-ential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707.
4. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks // SIAM Journal on Scientific Computing. 2021. Vol. 43, No. 5. P. A3055–A3081. DOI: 10.1137/20M1318043.
5. Wang S., Sankaran S., Perdikaris P. Respecting causality is all you need for training physics-informed neural networks // arXiv:2203.07404. 2022.
6. Liu Z., Wang Y., Vaidya S. et al. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks // arXiv:2404.19756. 2024.
7. Wang Y., Sun J., Bai J. et al. Kolmogorov–Arnold-Informed neural network: A physics-informed deep learning framework for solving forward and inverse problems based on Kolmogorov–Arnold Networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer-ing. 2025. Vol. 433. Art. 117518. DOI: 10.1016/j.cma.2024.117518.

ПОИСК АНОМАЛИЙ И ОБНАРУЖЕНИЕ ИХ ПРЕДЫСТОРИИ В ПОТОКОВЫХ ДАННЫХ ПРОМЫШЛЕННОГО ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ

А.А. Валиулин, М.Л. Цымблер

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

В работе рассматриваются задачи поиска аномалий в потоковых временных рядах, возникающих в промышленном интернете вещей, а также отслеживания предыстории возникновения аномалий. Поиск аномалий базируется на концепции матричного профиля (МП) временного ряда (массива, элементами которого являются расстояния до ближайших соседей подпоследовательностей исходного ряда) – аномалии полагаются локальными максимумами МП. Для вычисления МП потокового ряда предлагается параллельный алгоритм, в котором обработка накопленных данных распределяется между несколькими GPU. Блочная организация вычислений позволяет независимо сопоставлять поступающий сегмент с ранее обработанными частями ряда. Для обнаружения предыстории обнаруженной аномалии применяется обратное отслеживание по индексам ближайших соседей, позволяющее восстановить эволюционную цепочку сигнала. Эксперименты показали, что предложенный алгоритм в 2 раза опережает ранее предложенный авторами данной работы алгоритм для одного графического процессора и более чем в 20 раз – параллельный алгоритм SCAMP вычисления МП в режиме пакетной обработки. Проведено тематическое исследование разработанного алгоритма на реальном наборе данных XJTU-SY (виброускорение подшипника), показавшее возможность обнаружения предыстории устойчивой неисправности в работе подшипника.

Ключевые слова: промышленный интернет вещей, потоковые временные ряды, мотивы, аномалии, матричный профиль, обратное отслеживание, StreaMP++, GPU.

1. Введение

В промышленном интернете вещей многочисленные датчики формируют непрерывные потоки измерений, отражающих изменение состояния оборудования. При мониторинге важно не только обнаружить необычный фрагмент сигнала, но и определить, является ли он одиночным событием или продолжением ранее начавшегося процесса. При этом аномальность сигнала сама по себе не свидетельствует о неисправности оборудования и требует интерпретации с учетом предшествующих состояний и показаний других измерительных каналов. Поэтому актуальной является задача обнаружения аномального состояния в потоковом режиме с одновременным восстановлением предыстории аномалии.

Одним из актуальных подходов к поиску аномалий во временных рядах является концепция матричного профиля (МП) временного ряда [1]. МП определяется как массив, элементами которого являются расстояния до ближайших соседей подпоследовательностей исходного ряда. Аномалии полагаются локальными максимумами МП.

В данной работе рассмотрен алгоритм вычисления МП временного ряда, элементы которого поступают на обработку непрерывным потоком, с помощью нескольких графических процессоров, его применение для поиска аномалий и обнаружения их предыстории (цепочки предшествующих аномалии подпоследовательностей).

Работа структурирована следующим образом. В разделе 2 рассмотрены используемые в работе термины и приведен краткий обзор алгоритмов вычисления матричного профиля. Раздел 3 посвящен вычислению матричного профиля потокового временного ряда на нескольких GPU, включая блочную организацию вычислений и обнаружение предыстории аномалий методом обратного отслеживания. В разделе 4 представлены результаты вычислительных эксперимен-

тов по оценке производительности алгоритма и восстановлению предыстории аномального состояния на данных XJTU-SY. Заключение содержит резюме работы

2. Контекст исследования

В данном разделе кратко и неформально рассмотрены понятия, составляющие базис предлагаемого подхода, а также дан краткий обзор литературы по тематике исследования.

Временной ряд представляет собой упорядоченную во времени последовательность числовых значений. Его *подпоследовательностью* длины m называется фрагмент из m последовательных элементов ряда. *Ближайшим соседом* данной подпоследовательности является подпоследовательность, не являющаяся ее *тривиальным совпадением* (не имеющая с ней более половины общих точек от ее длины) и имеющая минимальное расстояние до нее. В качестве функции расстояния используется, как правило, z-нормализованное евклидово расстояние.

Матричный профиль (МП) P_T временного ряда T представляет собой массив, элементы которого содержат расстояния от соответствующих подпоследовательностей ряда до их ближайших соседей [1]. *Индекс МП* содержит позиции ближайших соседей в исходном временном ряде. Локальные максимумы МП характеризуют аномальные подпоследовательности.

При вычислении *МП самосоединения* поиск ближайших соседей выполняется среди подпоследовательностей одного временного ряда. *МП соединения двух рядов* A и B определяется аналогично, однако ближайший сосед каждой подпоследовательности ряда A выбирается среди подпоследовательностей ряда B. В дальнейшем операции вычисления МП самосоединения и профиля соединения обозначаются SelfJoinMP и JoinMP соответственно.

Для описания последовательного изменения формы сигнала используются ближайшие соседи слева и справа. *Ближайшим соседом слева* является наиболее похожая подпоследовательность, расположенная ранее рассматриваемой подпоследовательности, а *ближайшим соседом справа* – наиболее похожая подпоследовательность, расположенная позднее. *Цепочка* представляет собой упорядоченный набор подпоследовательностей (*звеньев*), в котором два любых соседних звена взаимно являются друг другу левым и правым ближайшими соседями [2]. Индексы звеньев используются при обнаружении предыстории аномального состояния.

Для вычисления матричного профиля разработаны как последовательные, так и параллельные алгоритмы [1]. Алгоритм SCAMP [3] использует GPU и ориентирован на обработку временного ряда в пакетном режиме. Потоковый алгоритм STOMPI [1] выполняет инкрементальное обновление профиля, но не использует параллельные вычисления. Ранее разработанный авторами алгоритм StreaMP [4] сочетает сегментную обработку потокового ряда с вычислениями на графическом процессоре. Алгоритм обрабатывает поступающие сегменты и обновляет ранее вычисленный матричный профиль без полного пересчета накопленного временного ряда. Однако при увеличении длины накопленного временного ряда возрастает объем вычислений, необходимых для сопоставления поступающих данных с ранее обработанной частью ряда. В настоящей работе алгоритм StreaMP модифицирован для организации вычислений на нескольких GPU (модификация получила название StreaMP++).

3. Вычисление матричного профиля на нескольких GPU

Алгоритм StreaMP++, как и его предшественник, использует сегментную обработку поступающих данных, но объединяет ранее поступившие сегменты в блоки и распределяет операции сопоставления нового сегмента с накопленными блоками между доступными GPU. Это позволяет выполнять наиболее затратную часть вычислений параллельно и отделить обработку поступающих данных от обновления МП накопленного временного ряда.

3.1. Блочная организация вычислений

Идущие подряд сегменты накопленного временного ряда объединяются в блоки $T^{(1)}$, $T^{(2)}$,..., $T^{(k)}$. Поступивший сегмент S содержит область перекрытия длиной $m-1$ с накопленной частью временного ряда, что позволяет учитывать подпоследовательности, пересекающие

границу между сегментами. Общая схема вычислений алгоритма StreaMP++ показана на рис. 1. Накопленный временной ряд T представлен блоками $T^{(1)}$, $T^{(2)}$,..., $T^{(k)}$, а S обозначает поступивший сегмент. Для сегмента S вычисляется профиль самосоединения P_S с помощью операции SelfJoinMP. Для каждого накопленного блока независимо выполняется операция JoinMP, в результате которой формируются МП соединения $P_{T^{(1)}S}$, $P_{T^{(2)}S}$, ..., $P_{T^{(k)}S}$. Эти операции распределяются между доступными GPU и могут выполняться параллельно.

Полученные МП соединения, МП нового сегмента S и ранее вычисленные МП блоков $P_{T^{(1)}}$, $P_{T^{(2)}}$, ..., $P_{T^{(k)}}$ передаются на CPU. Операция MergeMP объединяет полученные результаты, сохраняя для каждой подпоследовательности минимальное расстояние и соответствующий ему индекс ближайшего соседа. В результате формируется обновленный МП P_T, после чего часть сегмента S, не входящая в область перекрытия, присоединяется к накопленному временному ряду.

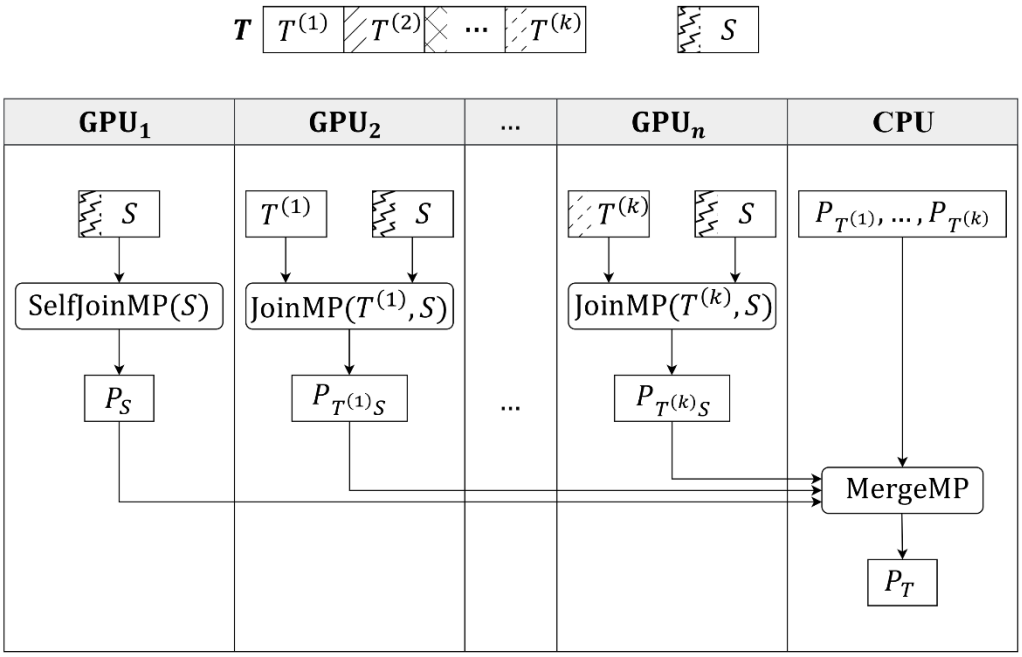


Рис. 1. Схема вычислений алгоритма StreaMP++

3.2. Обнаружение предыстории аномалий

После обнаружения аномалии выполняется процедура *обратного отслеживания* (BackTracing), позволяющая определить, предшествовала ли аномалии *цепочка* логически связанных изменений сигнала. Начиная с текущей аномальной подпоследовательности, алгоритм последовательно переходит к ее ближайшим соседям слева, а связь между соседними звеньями проверяет с помощью индексов ближайших соседей справа. В результате формируется направленная во времени цепочка подпоследовательностей [2], описывающая возможную предысторию аномального состояния. Привязка цепочки к текущей аномалии позволяет отличать потенциально значимую предысторию аномального состояния от цепочек, соответствующих повторяющимся штатным режимам.

При многоканальном мониторинге цепочки строятся для каждого измерительного канала независимо, после чего сопоставляются на общей временной шкале. Точное совпадение звеньев по времени не является обязательным, поскольку различные сенсоры могут реагировать на один физический процесс с задержкой. Наличие цепочки, связанной с текущей аномалией, и подтверждающих изменений в других каналах может использоваться для формирования интерпретируемого предупреждения. При этом задача системы состоит не в автоматическом определении причины неисправности, а в предоставлении специалисту информации о последовательности изменений для последующей диагностики и принятия решения.

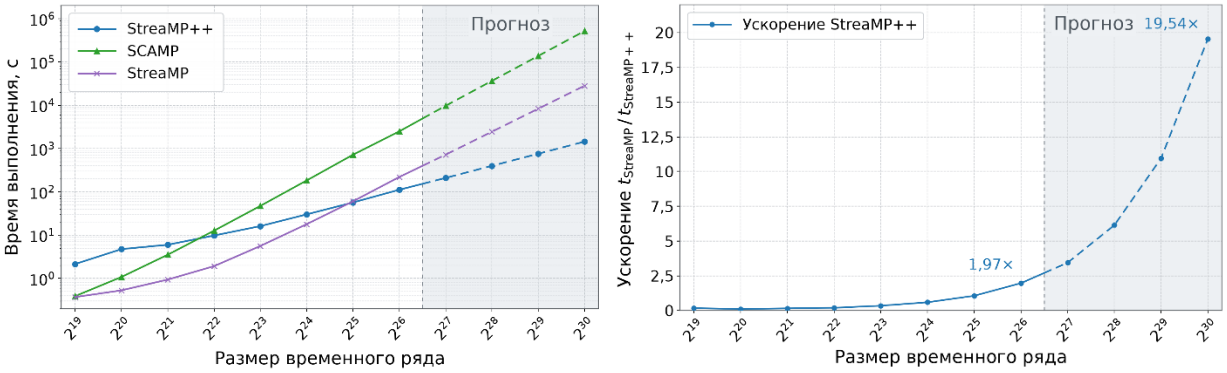
4. Вычислительные эксперименты

Проведены две серии экспериментов. Первая посвящена исследованию производительности алгоритма StreaMP++ при увеличении длины накопленного временного ряда и числа используемых GPU. Во второй исследуется возможность восстановления предыстории аномальных состояний на данных промышленного мониторинга.

4.1. Производительность алгоритма StreaMP++

Поскольку поиск аномалий опирается на концепцию МП, экспериментальная оценка направлена на исследование производительности его обновления. Сравниваются алгоритмы StreaMP++, StreaMP [4] и SCAMP [3].

Эксперименты проводились на синтетических временных рядах для длины подпоследовательности $m = 256$. Вычисления выполнялись на GPU NVIDIA Tesla V100 в конфигурациях с двумя и четырьмя ускорителями. Для двух GPU исследовались ряды длиной от 2^{16} до 2^{24}, для четырех GPU от 2^{16} до 2^{26}. Экспериментальные измерения выполнялись для временных рядов длиной до 2^{26}. Для оценки тенденции дальнейшего масштабирования дополнительно построен прогноз времени выполнения StreaMP++, StreaMP и SCAMP для рядов длиной от 2^{27} до 2^{30}. Прогноз построен путем экстраполяции степенной регрессии, параметры которой оценены методом наименьших квадратов в логарифмических координатах на основе экспериментально измеренных значений времени выполнения для длин ряда. Прогнозируемые значения рассматриваются отдельно от экспериментально измеренных результатов. Для потоковых алгоритмов измерялось время обработки последнего сегмента данных, а для SCAMP время повторного вычисления матричного профиля всего накопленного ряда.



а) б)

Рис. 2. Производительность StreaMP++, StreaMP и SCAMP: а) экспериментальные и прогнозируемые значения для четырех GPU; б) ускорение StreaMP++ относительно StreaMP

На рис. 2а представлено время выполнения алгоритмов. Длина ряда и время выполнения показаны в логарифмических шкалах. На рис. 2б приведено ускорение StreaMP++ относительно StreaMP, вычисленное как отношение времени выполнения StreaMP к времени выполнения StreaMP++ при одинаковом числе GPU. Значения выше единицы соответствуют преимуществу StreaMP++, ниже единицы преимуществу StreaMP.

В конфигурации с двумя GPU алгоритм StreaMP++ уступает StreaMP на всем исследованном диапазоне длин, что связано с накладными расходами блочной организации вычислений. При использовании четырех GPU преимущество StreaMP++ появляется с увеличением длины накопленного временного ряда. Для наибольшего экспериментально исследованного ряда длиной 2^{26} время выполнения StreaMP++ составляет 111,7 с, StreaMP - 220,1 с, а SCAMP - около 2494 с. Таким образом, алгоритм StreaMP++ обеспечивает ускорение в 1,97 раза относительно StreaMP и приблизительно в 22,3 раза относительно полного пересчета матричного профиля алгоритмом SCAMP.

Полученные результаты показывают, что блочная организация алгоритма StreaMP++ создает дополнительные накладные расходы на сравнительно коротких рядах, однако ее эффек-

тивность возрастает с увеличением длины накопленного временного ряда и числа используемых GPU.

Прогноз для рядов длиной от 2^{27} до 2^{30} показывает дальнейшее увеличение различий между алгоритмами. Для ряда длиной 2^{30} прогнозируемое время выполнения составляет около 1444 с для StreaMP++, 28,2 тыс. с для StreaMP и 518,8 тыс. с для SCAMP. При таких значениях ожидаемое ускорение StreaMP++ составляет около 19,5 раза относительно StreaMP и около 359 раз относительно SCAMP. Прогнозируемые значения не заменяют экспериментальную проверку и характеризуют только ожидаемую тенденцию масштабирования алгоритмов.

4.2. Восстановление предыстории аномалий

Для проверки обратного отслеживания использовалась экспериментальная траектория деградации подшипника Bearing1_1 из набора данных XJTU-SY [5]. Наблюдения обрабатывались последовательно, без использования будущей части временного ряда.

Для вертикального канала вибрации подшипника Bearing1_1 из набора XJTU-SY обнаружена цепочка из пяти звеньев. По мере продвижения вдоль цепочки возрастают амплитуда и нерегулярность колебаний, а последнее звено совпадает с началом устойчивого дефектного режима. Первое звено цепочки соответствует состоянию, зарегистрированному примерно за 20 минут до начала устойчивого дефектного режима. Расположение найденных звеньев и граница дефектного режима показаны на рис. 3. Полученный результат показывает, что обратное отслеживание позволяет связать обнаруженную аномалию с предшествующими изменениями сигнала и тем самым дополнить ее временным контекстом.

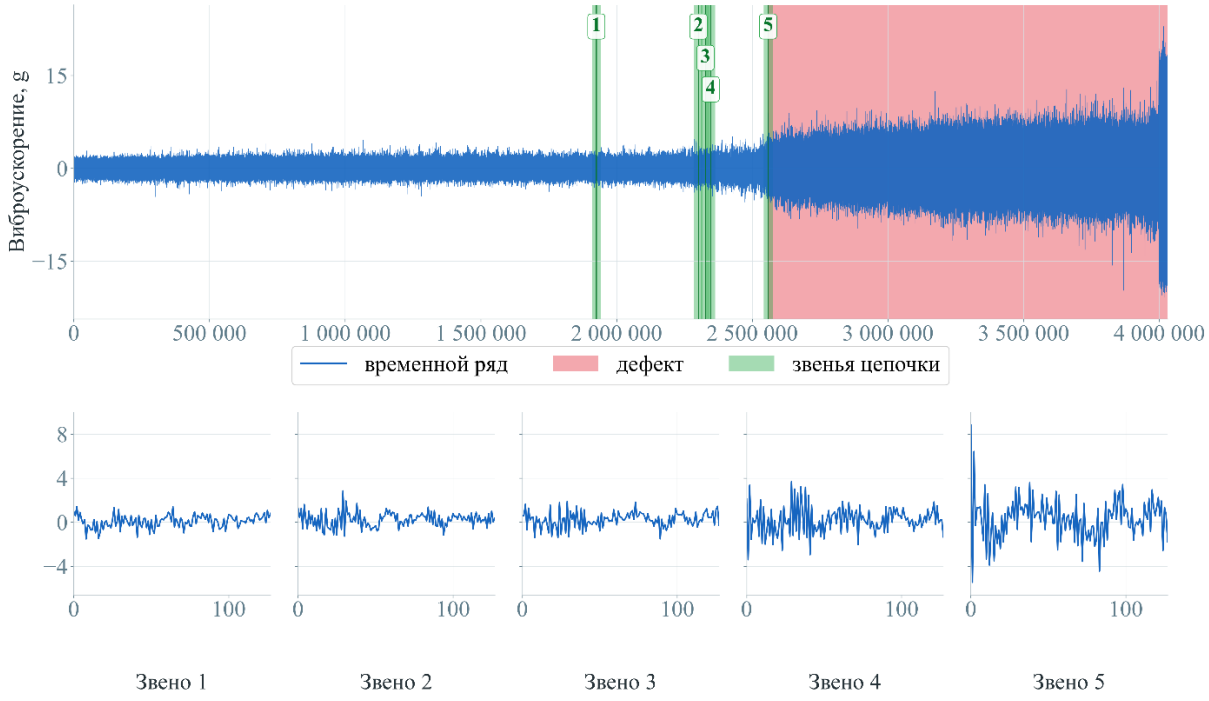


Рис. 3. Предыстория дефектного режима подшипника

5. Заключение

В работе предложен подход к потоковому обнаружению аномальных состояний и анализу их предыстории на основе матричного профиля. Для вычисления матричного профиля используется алгоритм StreaMP++, распределяющий наиболее затратные операции обработки накопленного временного ряда между несколькими графическими процессорами.

Экспериментально показано, что для ряда длиной 2^{26} при использовании четырех GPU алгоритм StreaMP++ сокращает время обработки почти в 2 раза по сравнению со StreaMP и более чем в 20 раз по сравнению с полным пересчетом профиля у алгоритма SCAMP. Прогноз быст-

родействия алгоритма для более длинных рядов указывает на дальнейшее увеличение преимущества StreaMP++; вычислительные эксперименты, в которых ожидается подтверждение прогнозных значений, проводятся в настоящее время.

Сохраняемые при вычислении матричного профиля индексы ближайших соседей позволяют выполнять обратное отслеживание от обнаруженной аномалии и восстанавливать цепочку предшествующих ей состояний. На данных XJTU-SY восстановлена цепочка изменений вибрационного сигнала, предшествующая устойчивому дефектному режиму подшипника. Полученные результаты подтверждают перспективность использования алгоритма StreaMP++ для мониторинга и анализа потоковых данных в приложениях промышленного интернета вещей.

Литература

1. Yeh C.M., Zhu Y., Ulanova L., Begum N., Ding Y., Dau H.A., Zimmerman Z., Silva D.F., Mueen A., Keogh E. Time series joins, motifs, discords and shapelets: A unifying view that exploits the matrix profile // Data Mining and Knowledge Discovery. 2018. Vol. 32, No. 1. P. 83-123. DOI: 10.1007/s10618-017-0519-9.
2. Zhu Y., Imamura M., Nikovski D., Keogh E.J. Introducing time series chains: A new primitive for time series data mining // Knowledge and Information Systems. 2019. Vol. 60, No. 2. P. 1135-1161. DOI: 10.1007/s10115-018-1224-8.
3. Zimmerman Z., Kamgar K., Senobari N.S. et al. Matrix profile XIV: Scaling time series motif discovery with GPUs to break a quintillion pairwise comparisons a day and beyond // Proc. ACM Symposium on Cloud Computing. 2019. P. 74-86. DOI: 10.1145/3357223.3362721.
4. Valiulin A., Zymbler M. GPU-Accelerated Matrix Profile Computing for Streaming Time Series // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2026. Vol. 47, No. 6. P. 3010–3021. DOI: 10.1134/S1995080226618795.
5. B. Wang, Y. Lei, N. Li and N. Li, "A Hybrid Prognostics Approach for Estimating Remaining Useful Life of Rolling Element Bearings," in IEEE Transactions on Reliability, vol. 69, no. 1, pp. 401-412, March 2020, DOI: 10.1109/TR.2018.2882682.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ[1*]

Е.Н. Варсеева, И.Г. Лебедев, К.А. Баркалов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается использование параллельных вычислений для настройки параметров математической модели процесса низкотемпературной паровой конверсии углеводородов, входящих в состав попутного нефтяного газа. Для указанного химического процесса необходимо сформировать его кинетическую модель, то есть определить соответствующие кинетические параметры реакций. Для этого решается обратная задача, в которой ищутся значения кинетических параметров на основе экспериментальных данных. С формальной точки зрения обратная задача химической кинетики является задачей глобальной оптимизации. Для ее решения был использован параллельный информационно-статистический алгоритм глобального поиска в сочетании с локальным уточнением лучшего решения. Алгоритм является детерминированным и основан на предположении липшицевости целевой функции. При этом решение многомерных задач сводится к решению эквивалентных им одномерных задач с использованием кривой Пеано. Распараллеливание вычислений выполнено по схеме «мастер-рабочие» с применением общей памяти. Восстановленные кинетические константы обеспечили надежное математическое описание процесса низкотемпературной паровой конверсии легких углеводородов.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многоэкстремальные функции, параллельные вычисления, химическая кинетика, обратные задачи.

1. Введение

Сжигание попутного нефтяного газа (ПНГ) на текущий момент остается актуальной проблемой российской нефтедобывающей промышленности. Одним из наиболее перспективных способов эффективной утилизации попутного газа является его использование непосредственно на месте добычи. Однако исходный ПНГ не может быть использован в качестве топлива из-за высокого содержания в нем C_2-углеводородов. Для решения проблемы утилизации ПНГ предлагается применять низкотемпературную паровую конверсию (НТПК) C_{2+}-углеводородов с преимущественным образованием метан-водородных смесей [4, 9].

Исследования, проведенные в институте катализа СО РАН, показали, что родиевые катализаторы, нанесенные на смешанные оксиды церия-циркония, проявляют высокую активность и стабильность в процессе НТПК пропана [4, 10]. Однако для более детального понимания кинетики процесса НТПК углеводородов на Rh катализаторах и оптимизации условий его проведения нужно построить и проанализировать математическую модель указанного процесса.

2. Содержательная постановка задачи

Для описания низкотемпературной паровой конверсии пропана достаточно учесть следующие реакции:

$$\begin{gathered} C_3H_8 + 6H_2O \rightleftharpoons 3CO_2 + 10H_2, \\ C_3H_8 + H_2 \rightleftharpoons C_2H_6 + CH_4, \\ C_2H_6 + H_2 \rightleftharpoons 2CH_4, \\ CO_2 + 4H_2 \rightleftharpoons CH_4 + 2H_2O \end{gathered} \tag{1}$$

[1*] Работа выполнена при поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (проект Минобрнауки России № 075-02-2026-1346).

Математическое моделирование НТПК проводилось с использованием механизма Ленгмюра–Хиншельвуда для задания скоростей некоторых реакций:

$$\begin{cases} w_1 = k_1 \cdot \dfrac{P_{C_3H_8} \cdot P_{H_2O}}{\left(P_{H_2O} + \alpha \cdot \sqrt{P_{H_2}}\right)^2} \\ w_2 = k_2 \cdot P_{C_3H_8} \cdot P_{H_2}, \\ w_3 = k_4 \cdot \dfrac{\sqrt{P_{H_2}} \cdot P_{C_2H_6}}{\left(P_{H_2O} + \alpha \cdot \sqrt{P_{H_2}}\right)^2}, \\ w_4 = k_4 \cdot P_{CO_2} \cdot P_{H_2} - k_{-4} \cdot P_{H_2O} \cdot P_{CH_4}, \end{cases} \quad (2)$$

где P_X — парциальное давление вещества X, атм; w_i — скорость i-ой реакции, атм/(л·с); k_i— константа скорости i-ой реакции; t — время, с; α — отношение констант адсорбции H_2 и H_2O на выбранном катализаторе.

Система дифференциальных уравнений для описания кинетики НТПК пропана записывается в виде:

$$\begin{cases} u \cdot \dfrac{dP_{C_3H_8}}{dl} = -w_1 - w_2, \\ u \cdot \dfrac{dP_{H_2O}}{dl} = -6w_1 + 2w_4, \\ u \cdot \dfrac{dP_{CO_2}}{dl} = 3w_1 - w_4, \\ u \cdot \dfrac{dP_{H_2}}{dl} = 10w_1 - w_2 - w_3 - 4w_4, \\ u \cdot \dfrac{dP_{CH_4}}{dl} = w_2 + 2w_3 + w_4, \\ u \cdot \dfrac{dP_{C_2H_6}}{dl} = w_2 - w_2, \end{cases} \quad (3)$$

где u — линейная скорость потока реакционной смеси, м/с; l — высота слоя катализатора, м.

Прямая задача химической кинетики представляет собой задачу Коши для системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x' = f(x,t), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_{cont}], \quad (4)$$

где $x(t)$ — вещественная n-мерная функция, представляющая собой парциальные давления веществ; x_0 — вектор начальных условий; t_0 — начальный момент времени; t_{cont} — время контакта с катализатором.

Для решения прямой задачи при различных температурах реакции был реализован модифицированный метод Рунге–Кутты 4 порядка точности в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{gathered} F_1 = f(x_i) \cdot h, \\ F_2 = f(x_i + F_1/3) \cdot h, \\ F_3 = f(x_i + (F_1 + F_2)/6) \cdot h, \\ F_4 = f(x_i + (F_1 + 3 \cdot F_3)/8) \cdot h, \\ x_{s+1} = x_i + (F_1 - 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4)/2, \\ F_5 = f(x_{i+1}) \cdot h, \\ x_1^* = x_i + (F_1 + 4 \cdot F_4 + F_5)/6. \end{gathered} \quad (5)$$

При построении кинетической модели решается обратная задача химической кинетики: по экспериментальным данным о динамике процесса восстанавливаются численные параметры модели [2, 3]. В данной работе в качестве критерия минимизации была использована целевая функция вида [3]:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P}_i - \tilde{P}_i\right| \cdot v_i, \quad (6)$$

где $\overline{P}_i$, $\tilde{P}_i$ — экспериментальные и расчетные значения парциальных давлений веществ, атм; v_i — весовые коэффициенты; n — количество измеряемых веществ. Требуется найти набор констант скоростей k, при котором значение функции (6) минимально.

3. Описание параллельного алгоритма глобального поиска

Теоретической основой данного алгоритма служит информационно-статистический подход [8]. Суть подхода заключается в редукции исходной многомерной задачи к эквивалентной одномерной задаче [5, 8]. Параллельный алгоритм глобального поиска использует кривую Пеано, отображающую единичный отрезок [0, 1] на N-мерный куб D. С помощью такого отображения исходная многомерная задача сводится к одномерной задаче минимизации функции $f(x) = \varphi(y(x))$, удовлетворяющей равномерному условию Гёльдера [7, 8].

Вычислительная схема параллельного алгоритма глобального поиска состоит в следующем. Первые p испытаний выполняются в граничных точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, а также в произвольных внутренних точках. Предположим, что завершено $n \geq 1$ итераций метода, в ходе которых проведены испытания в $s = s(n)$ точках x_i. Точки для проведения испытаний на следующей итерации определяются согласно следующим правилам:

Перенумеровать прообразы всех точек, в которых уже проведены испытания, по возрастанию их координат: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = 1$, и сопоставить им вычисленные z_i значения $z_i = \varphi(y(x_i))$.

Вычислить максимальное абсолютное значение разделенных разностей: $\mu = \max\frac{|z_i - z_{i-1}|}{\Delta_i}$, где $\Delta_i = (x_i - x_{i-1})^{1/N}$. Если $\mu = 0$, полагаем $\mu = 1$.

Для каждого интервала (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq s$, вычислить величину, называемую характеристикой интервала:

$$R(i) = r\mu\Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r\mu\Delta_i} - 2(z_i + z_{i-1}),$$

где вещественное число $r > 1$ является параметром алгоритма.

Упорядочить характеристики $R(i)$ по убыванию и выбрать p интервалов, которым соответствуют наибольшие характеристики.

Провести новые испытания параллельно в точках, вычисляемых по формуле:

$$x^{s+j} = \frac{x_{t_j} + x_{t_j - 1}}{2} - sign(z_{t_j} - z_{t_j - 1})\frac{1}{2r}\left[\frac{z_{t_j} - z_{t_j - 1}}{\mu}\right]^2.$$

Алгоритм завершает свою работу, если условие $\Delta_{t_j} < \varepsilon$ выполняется хотя бы для одного номера интервала. После определения с помощью параллельного алгоритма точки, являющейся грубой оценкой глобального минимума, из нее запускается локальный метод Хука–Дживса [1]. Его вычислительные правила основаны на чередовании исследующего поиска (для выбора направления) и поиска в выбранном направлении (поиска по образцу). Распараллеливание было организовано с использованием общей памяти и синхронной схемы «мастер-рабочие» с применением технологии OpenMP [5, 6].

4. Результаты решения прикладной задачи

Вычислительные эксперименты проводились на узле суперкомпьютера «Лобачевский» (2 процессора Intel Xeon Platinum 8558, 2048 Gb RAM). Все алгоритмы реализованы на языке программирования C++ с поддержкой OpenMP.

Были получены экспериментальные данные для 18 различных температур проведения реакции. Для каждой из этих температур решалась обратная задача и выбирались константы скоростей реакции, минимизирующие функцию (6). В качестве весовых коэффициентов v_i были использованы значения $v_i = 1.0$ $(1 \leq i \leq 5)$, $v_6 = 4.4$, что соответствует большему влиянию последнего вещества (C_2H_6).

Параллельный алгоритм запускался со следующими параметрами: плотность построения развертки $m = 10$, параметр надежности $r = 1.5$, точность глобального поиска $\varepsilon = 10^{-2}$, ло-

кального уточнения $\delta = 10^{-4}$. В таблице 1 приведены усредненные оценки времени работы и ускорения параллельного алгоритма.

Таблица 1. Зависимость времени решения и ускорения от числа потоков

Число потоков, p	Время решений, с	Ускорение
1	1170.00	-
2	600.27	1.95
4	308.34	3.79
8	162.82	7.19
16	87.95	13.30
32	54.43	21.50
64	50.80	23.20
96	47.90	24.42

После получения набора констант скоростей для каждой температуры осуществлялся поиск предэкспоненциального множителя k_0 и энергии активации E_a с помощью метода наименьших квадратов к соотношению, полученному логарифмированием уравнения Аррениуса:

$$\ln(k) = \ln(k_0) - \frac{E_a}{RT}, \qquad (7)$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – температура, К.

Рассчитанные величины k_0 и E_a для всех стадий приведены в таблице 2.

Таблица 2. Рассчитанные кинетические параметры реакций

№ реакции	$\ln(k_0)$	E_a, кДж/моль
1	15.09	73.28
2	4.65	7.51
3	3.19	8.88
4	4.28	5.87
4'	10.6	57.31

Полученные значения энергии активации были сопоставлены со значениями, представленными в других работах по исследованию процесса паровой конверсии углеводородов на родиевых катализаторах. Для родиевых катализаторов наблюдаемые энергии активации в процессах конверсии пропана и этана обычно составляют 20-70 кДж/моль, конверсия метана характеризуется более высокими значениями (40-90 кДж/моль). Энергии активации, полученные в нашем исследовании, соответствуют литературным данным, что указывает на корректность используемого приближения. Расчетные парциальные давления были пересчитаны с учетом k_0 и E_a.

Таблица 3. Средние абсолютные отклонения и максимальные экспериментальные давления

Вещество	ε_i, атм	P_{max}, атм
C_3H	0.009	0.060
H_2O	0.013	0.370
CO_2	0.010	0.049
H_2	0.015	0.079
CH_4	0.062	0.626
C_2H_6	0.006	0.030

Статистические характеристики можно считать хорошими для H_2O и CH_4. Качественное соответствие модели экспериментальным данным является приемлемым, модель соответствует

эксперименту и может использоваться для прогнозирования состава продуктов паровой конверсии углеводородов.

5. Заключение

Результатом проведенного исследования является решение задачи настройки кинетических параметров для процесса низкотемпературной паровой конверсии пропана на родиевом катализаторе. Найденные кинетические параметры будут использоваться для получения газовых смесей с необходимыми характеристиками. Анализ ускорения показал эффективность алгоритма: при использовании 96 потоков ускорение составило 24.42. Сложности с достижением линейного ускорения объясняются применением синхронной схемы распараллеливания и последовательным выполнением локального поиска на завершающем этапе [6]. В планы дальнейших работ входит реализация асинхронной схемы проведения испытаний и параллельная реализация метода локального поиска, что способно повысить эффективность распараллеливания в целом. Также предполагается усложнение полученной модели для учета реакций паровой конверсии более тяжелых углеводородов (бутана, пентана).

Литература

1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 535 с.
2. Губайдуллин И.М., Рябов В.В., Тихонова М.В. Применение индексного метода глобальной оптимизации при решении обратных задач химической кинетики // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, № 1. С. 137–145.
3. Мазитов А.А., Осипова А.Г., Ахметов И.В., Губайдуллин И.М. Решение обратной задачи химической кинетики на примере реакции синтеза бензилиденбензиламина // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 3. С. 145–152.
4. Урлуков А.С., Усков С.И., Потемкин Д.И. и др. Оптимизация состава Rh-содержащих катализаторов для применения в низкотемпературной паровой конверсии легких углеводородов // Экология и промышленность России. 2023. Т. 27, № 6. С. 17–23.
5. Barkalov K., Lebedev I. Solving multidimensional global optimization problems using graphics accelerators // Supercomputing: Communications in Computer and Information Science. Vol. 687. Cham: Springer, 2016. P. 224–235. DOI: 10.1007/978-3-319-55669-7_18.
6. Barkalov K., Lebedev I., Karchkov D. Analysis and elimination of bottlenecks in parallel algorithm for solving global optimization problems // Supercomputing: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13708. Cham: Springer, 2022. P. 18–32. DOI: 10.1007/978-3-031-22941-1_2.
7. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E. Global search based on efficient diagonal partitions and a set of Lipschitz constants // SIAM Journal on Optimization. 2006. Vol. 16, No. 3. P. 910–937. DOI: 10.1137/040621132.
8. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 416 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-4677-1.
9. Urlukov A.S., Uskov S.I., Sobyanin V.A., et al. Ethane formation via catalytic low-temperature steam reforming of C3+-alkanes // Chemical Engineering Journal. 2022. Vol. 446. P. 136993. DOI: 10.1016/j.cej.2022.136993.
10. Schädel B.T., Duisberg M., Deutschmann O. Steam reforming of methane, ethane, propane, butane, and natural gas over a rhodium-based catalyst // Catalysis Today. 2009. Vol. 142, No. 1–2. P. 42–51. DOI: 10.1016/j.cattod.2009.01.008.

ГИБРИДНЫЙ ПОДХОД К АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОТЛАДКЕ ФРАГМЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ НА ОСНОВЕ КОМБИНАЦИИ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА[1*]

А.Ю. Власенко[1,2,3], М.А. Мичуров[1,2]

[1]ИВМиМГ СО РАН
[2]Новосибирский государственный университет
[3]Новосибирский государственный технический университет

Одним из методов повышения производительности программ численного моделирования является распараллеливание, а целевой архитектурой зачастую являются мультикомпьютеры. Поскольку реализация эффективных параллельных программ для мультикомпьютеров требует специальной квалификации, активно разрабатываются подходы и средства программирования, призванные упростить этот процесс для прикладных исследователей. Одним из таких средств является система LuNA, поддерживающая технологию фрагментированного программирования. В докладе пойдет речь о гибридном подходе к автоматизированной отладке программ в системе LuNA, объединяющем статический и динамический анализ.

Ключевые слова: параллельное программирование, автоматизация отладки программ, статический анализ, динамический анализ, система LuNA.

1. Введение

Разработка эффективных параллельных программ для мультикомпьютеров является сложной задачей, требующей специальной квалификации. Разработчик должен уметь корректно реализовать не только прикладной алгоритм, но и взаимодействие между выполняющимися параллельно процессами и потоками. При этом зачастую требуется обеспечение нефункциональных свойств программы: экономное использование памяти, низкая нагрузка на коммуникационную сеть, автоматическая настройка на доступные ресурсы и др. Эти проблемы можно решить путем повышения уровня программирования, например, за счет использования подхода автоматического конструирования параллельных программ. Данный подход реализуют системы Legion [1], LuNA [2], Charm++ [3] и т.п., которые в большей или меньшей степени берут на себя работу по конструированию параллельной программы «приемлемого» качества, позволяя пользователю сосредоточиться на реализации прикладного алгоритма.

Помимо автоматизации конструирования программ логично также автоматизировать и другие аспекты разработки, такие как отладка, на которую по различным оценкам уходит значительная доля времени разработчика [4]. В текущей работе предлагается гибридный подход к отладке на основе комбинации статического и динамического анализа. Идея объединения этих методов описана, например, в работе [5]: подход предполагает проверку ограничений (возможно, добавленных в код автоматически) в статике в той мере, насколько это возможно, и генерацию эффективных проверок времени выполнения тогда, когда статическая проверка невозможна. Для системы LuNA, являющейся предметом исследования данной работы, уже существует ряд средств автоматизированной отладки, реализующих преимущественно подход статического анализа [6]. Данный подход оказывается весьма полезным на практике, но, очевидно, у него есть и свои недостатки, главный из которых – невозможность точной аппроксимации поведения программы в общем случае. Для программ, поведение которых (и, как следствие, наличие ошибок в которых) зависит от конкретных значений во время выполнения, лучше подходит метод динамического анализа. В данной работе с целью сокращения накладных расходов на обна-

[1*] Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН FWNM-2025-0005.

ружение ошибок во время выполнения LuNA-программ предлагается использовать информацию, полученную в результате статического анализа, для исключения ненужных проверок.

2. Гибридный подход к отладке в системе LuNA

LuNA – это система автоматического конструирования параллельных программ численного моделирования, поддерживающая технологию фрагментированного программирования (ТФП) [2]. В ТФП прикладной алгоритм представляется множеством фрагментов вычислений (ФВ) – триплетов вида (in, op, out), где in и out – конечные множества входных и выходных фрагментов данных (ФД) соответственно, а op – операция, вычисляющая значения out по in. Таким образом, выполнение фрагментированного алгоритма подразумевает выполнение всех ФВ по мере удовлетворения информационных зависимостей. Подход фрагментированного программирования, а также его реализация в системе LuNA, позволяют разработчику абстрагироваться от типичных задач параллельного программирования (реализация коммуникаций, балансировка нагрузки и т.п.) и сосредоточиться на реализации прикладного алгоритма.

При этом LuNA-программам свойственны свои семантические ошибки. К таким ошибкам относятся, например, попытки использования неинициализированных ФД (часто из-за несовпадения диапазонов инициализированных и используемых индексов элементов массива), использование ФД неправильного типа и модификация входных параметров подпрограмм. О наличии или отсутствии таких ошибок алгоритмы статического анализа часто не могут дать однозначный ответ, а встраивание в саму систему проверок на всевозможные варианты этих ошибок не является целесообразным, а для некоторых ошибок невозможно вовсе. Так, например, нельзя оценить правильность работы операций с ФД пользовательских типов, поскольку именно пользователь решает, что и как будет записано или прочитано из соответствующего буфера памяти. Решением здесь выступает автоматизированное инструментирование кода программ – встраивание в код проверок времени выполнния на типичные (распространенные) ошибочные ситуации. Как места встраивания проверок, так и их необходимость в каждом конкретном случае определяется с помощью алгоритмов статического анализа, а также с помощью пользовательских аннотаций. Данный подход опирается на полученные ранее результаты в области отладки LuNA-программ [6]. Схема работы программного средства отладки, реализующего предложенный подход, представлена на рис. 1.

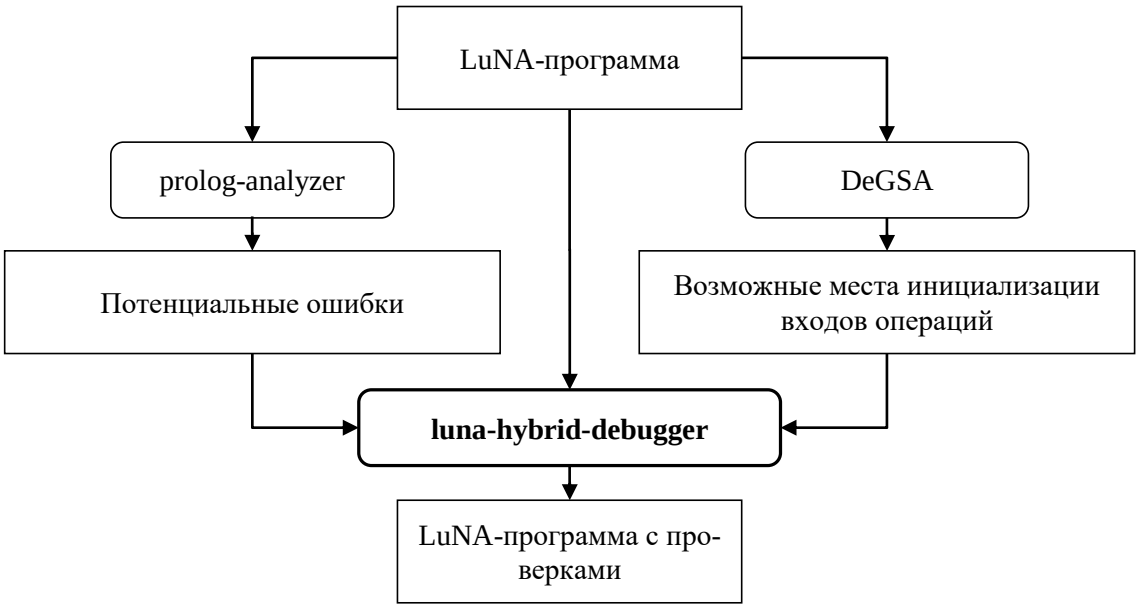


Рис. 1. Схема работы предложенного средства отладки

На схеме на рис. 1 prolog-analyzer и DeGSA [6] – уже существующие средства статического анализа LuNA-программ. Prolog-analyzer предоставляет информацию об ошибках, связанных с возможным использованием неинициализированных данных, а DeGSA выполняет анализ с использованием графа зависимостей по данным. Luna-hybrid-debugger реализует предложенный

гибридный подход к отладке и встраивает необходимые проверки времени выполнения в код LuNA-программы. Информация об обнаруженных ошибках сохраняется на диск.

Обнаружение некоторых ошибок опирается на предоставленные пользователем с помощью механизма аннотаций “подсказки”, что позволяет повысить точность обнаружения ошибок и дает пользователю возможность явно контролировать покрытие кодовой базы проверками.

Отдельно отметим, что LuNA-программа на самом деле состоит из двух частей – описания фрагментированного алгоритма на высокоуровневом языке LuNA и реализаций операций на языке C++. Для обнаружения семантических ошибок, упомянутых выше, необходимо анализировать как код на LuNA, так и на C++, причем для эффективной генерации некоторых проверок недостаточно ограничиться анализом какой-то одной части. Так, например, при генерации проверок пользовательских типов необходимо принять во внимание как аннотации в C++, так и возможные зависимости по данным между операциями, которые допускаются конкретным фрагментированным алгоритмом на LuNA. На рис. 2 представлен пример использования аннотаций для указания пользовательских типов для входных и выходных параметров операций, а также фрагменты сгенерированного в их телах кода.

```
#pragma user_type(edge, Edge)
#pragma user_type(copy, Edge)
void copy_edge(const InputDF &edge, OutputDF &copy) {
    copy.dbg_set_user_type("Edge");
    _assert(edge.dbg_user_type_str() == "Edge", ...);
    // ...
}

#pragma user_type(subgridDF, Subgrid)
void check_subgrid(const InputDF &subgridDF, OutputDF &error) {
    _assert(subgridDF.dbg_user_type_str() == "Subgrid", ...);
    // ...
}
```

Рис. 2. Пример использования аннотаций для управления генерацией проверок времени выполнения

Здесь операция copy_edge имеет входной параметр edge и выходной параметр copy, для которых указан один и тот же тип – Edge. В зависимости от типа параметра – входной или выходной – генерируется либо проверка пользовательского типа, либо его присваивание. Для выходного параметра error операции check_subgrid нет необходимости указывать пользовательский тип, поскольку ему присваивается значение поддерживаемого системой LuNA примитивного типа (в данном примере это вещественное число). В случае, когда в результате анализа графа зависимостей по данным была получена информация о возможных местах инициализации входных параметров операций, часть проверок пользовательских типов может быть выполнена статически, а соответствующие проверки времени выполнения не будут генерироваться.

3. Результаты

Предложен гибридный подход к автоматизированной отладке фрагментированных программ в системе LuNA на основе комбинации статического и динамического анализа. Предложенный подход частично реализован в программном средстве отладки[1], тестирование которого продемонстрировало возможность обнаруживать семантические ошибки в случаях, когда “не справляются” имеющиеся алгоритмы статического анализа и встроенные в систему LuNA механизмы обнаружения ошибок в пользовательском коде.

В докладе будет описан процесс использования реализованного средства отладки, а также будут представлены конкретные примеры ошибочных программ, демонстрирующие целесообразность его применения.

[1] https://github.com/m-michurov/luna-hybrid-debugger

Литература

1. Bauer M., Treichler S., Slaughter E., et al. Legion: Expressing locality and independence with logical regions // SC '12: Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, Salt Lake City, UT, USA. 2012. P. 1–11. DOI: 10.1109/SC.2012.71.
2. Перепелкин В.А. Система LuNA автоматического конструирования параллельных программ численного моделирования на мультикомпьютерах // Проблемы информатики. 2020. № 1. С. 66–74. DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10004.
3. Kale L.V., Krishnan S. Charm++: Parallel Programming with Message-Driven Objects // Parallel Programming using C++. 1996. P. 175–213.
4. Alaboudi A., LaToza T.D. An exploratory study of debugging episodes // arXiv preprint arXiv:2105.02162. – 2021.
5. Herhut S. et al. From contracts towards dependent types: Proofs by partial evaluation // Symposium on Implementation and Application of Functional Languages. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. – С. 254-273.
6. Власенко А.Ю., Мичуров М.А., Царев В.Д., Курбатов М.А. Построение комплекса автоматизированной отладки фрагментированных программ // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2024. Т. 22, № 1. С. 5–20. DOI 10.25205/1818-7900-2024-22-1-5-20.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ОДНОЧАСТОТНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА[1*]

И.В. Володин[1], А.А. Алабужев[1,2]

[1]Институт механики сплошных сред УрО РАН,
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет

Численно на основе фазово-полевого метода решеточных уравнений Больцмана моделируются течения с деформируемой межфазной границей при вертикальном вибрационном воздействии. Рассмотрены задачи возникновения гравитационно-капиллярных волн и левитации протяженного слоя тяжелой жидкости в легкой фракции. Полученные результаты находятся в количественном согласии с дисперсионным соотношением для поверхностных волн и согласуются с экспериментальными данными по вибрационной стабилизации жидких слоев.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, вертикальные вибрации, межфазная граница, левитация жидкости

1. Введение

Вертикальное и другие виды вибрационного воздействия давно используются для управления устойчивостью и формой границ раздела несмешивающихся жидкостей. Вибрации способны как разрушать, так и динамически стабилизировать межфазные структуры, порождая новые равновесные конфигурации вплоть до инвертированной плавучести погруженных тел [1–4].

Особенность численного моделирования задач со свободной границей в вибрационных полях заключается в необходимости одновременного разрешения нескольких физически различных, но взаимосвязанных явлений. К ним относятся эволюция подвижной деформируемой границы раздела фаз с учетом поверхностного натяжения, а также взаимодействие компонентов, обладающих существенно различающимися физическими свойствами, такими как плотность и вязкость. Дополнительную сложность создает нестационарное внешнее силовое воздействие, обусловленное вибрацией. Оно модулирует эффективное поле массовых сил и может приводить к движению и деформации межфазной границы.

В данной работе представлены результаты моделирования межфазной границы, динамика которой определяется вертикальным вибрационным воздействием. Задачи моделируются численно методом решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) с фазово-полевым описанием границы раздела на основе консервативного уравнения Аллена–Кана [5–8]. Рассмотрены задачи возникновения гравитационно-капиллярных волн и левитации жидкости в легкой фракции под воздействием периодических вертикальных вибраций.

2. Макроскопическое описание задачи

Для рассматриваемых задач макроскопическое описание двухкомпонентной системы несмешивающихся жидкостей со свободно деформируемой границей раздела в изотермической постановке включает уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и локальное консервативное уравнение Аллена–Кана.

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0,$$

[1*] Работа И.В. Володина поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (номер государственной темы 124021600038-9).

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F_s}+\boldsymbol{G},$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\nabla(\phi\boldsymbol{v})=\nabla\left[M\left(1-\frac{4\phi(1-\phi)}{W|\nabla\phi|}\right)\nabla\phi\right],$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость жидкости, p – поле давления, ϕ – параметр порядка, M – параметр мобильности, W – толщина границы раздела, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость жидкости, $\boldsymbol{F_s}$ – сила поверхностного натяжения, $\boldsymbol{G}$ – внешняя объемная сила.

Вертикальное вибрационное воздействие с частотой Ω и амплитудой B учитывается введением модулированного по времени ускорения свободного падения в вертикальную компоненту объемной силы $\boldsymbol{G}$:

$$G_y=-\rho g+\rho \mathrm{B}\Omega^2\sin(\Omega t).$$

Система уравнений, приведенная выше и граничные условия, которым соответствуют твердые горизонтальные стенки и периодические условия, поставленные на боковые стенки, определяют макроскопическую постановку задачи.

Описание дискретного LBM алгоритма можно найти в [6, 7]. С помощью разложения Чепмена-Энского можно показать, что дискретная схема сводится к макроскопическим уравнениям [5, 6, 8].

К основным управляющим параметрам задачи относятся число Бонда (Bo) и число Вебера (We), определяемые следующим образом:

$$\mathrm{Bo}=\frac{(\rho_l-\rho_g)gL}{\gamma},\ \mathrm{We}=\frac{(\rho_l-\rho_g)(\mathrm{B}\Omega)^2L}{\gamma},$$

где ρ_l и ρ_g – плотности тяжелой и легкой жидкости, соответственно, g – значение гравитационного ускорения, γ – значение коэффициента поверхностного натяжения между легкой и тяжелой жидкостями, L – характерный размер задачи.

3. Моделирование гравитационно-капиллярных волн

Рассмотрено возбуждение гравитационно-капиллярных волн на первоначально плоской межфазной границе при $\mathrm{Bo}=160$. Тяжелая жидкость располагается снизу с нулевым начальным распределением поля скорости. Соотношение плотностей составляет $\rho_r=\rho_l/\rho_g=6$, соотношение кинематических вязкостей $\nu_r=1$.

Задача решалась на вычислительной области с продольным размером $N_x=400$ и вертикальным размером $N_y=200$ (400x200). На рис. 1 показаны мгновенные распределения плотности, полученные приблизительно за один период колебаний при $\mathrm{We}\approx 57$. Черным цветом обозначена тяжелая жидкость, светлым – легкая.

Аналитическая оценка длины волны λ через дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн:

$$\Omega^2=kg+\frac{\gamma}{\rho_l}k^3,$$

где значение волнового числа $k=2\pi/\lambda$ совпадает с полученным в численном расчете.

4. Левитация тяжелого слоя жидкости

В работах [1–3] экспериментально показано, что вертикальные вибрации способны динамически стабилизировать границу раздела жидкостей в поле силы тяжести, создавая новые равновесные конфигурации, в том числе левитацию протяженного слоя тяжелой жидкости в толще более легкой фазы.

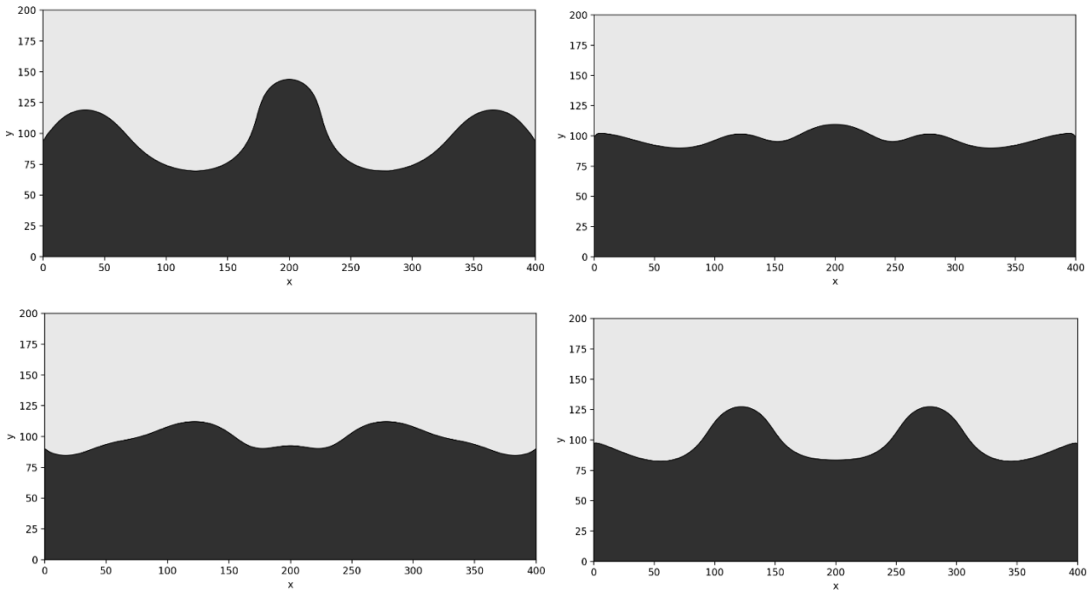


Рис. 1. Возникновение гравитационно-капиллярных волн при $\mathrm{We} \approx 57, \mathrm{Bo} \approx 160$

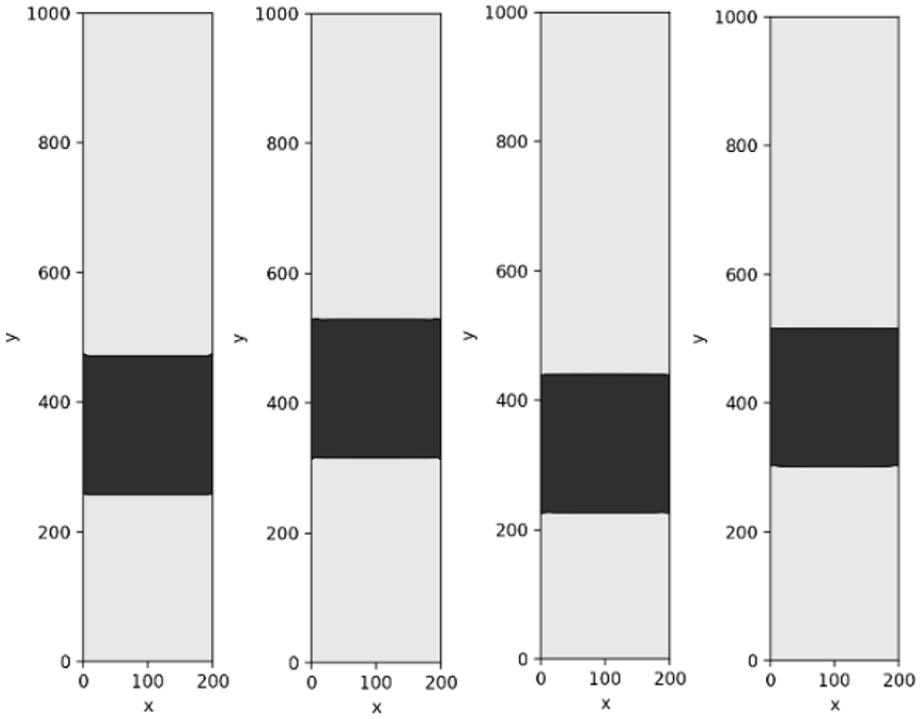


Рис. 2. Левитация тяжелой жидкости в легкой среде при $\mathrm{We} \approx 6 \cdot 10^7, \mathrm{Bo} = 12 \cdot 10^4$

В работе [3] неподвижный сосуд длины L, заполненный слоями воздуха и силиконового масла, приводился в движение вертикальными гармоническими колебаниями с частотой $f_v = \Omega/2\pi$. После начала вибраций в нижнюю часть сосуда вводился воздух, так, что тяжелая жидкость оказывалась заключена между двумя слоями воздуха и стабилизировалась вибрацией.

Для определения условия левитации сопоставлялись вибрационная ($v_{vibr} = B\Omega$) и критическая ($v_* = \sqrt{gL/\pi}$) скорости. Слой устойчиво левитирует при соблюдении условия $v_{vibr} > v_*$.

Для воспроизведения этой конфигурации нами была рассмотрена трехслойная система. Тяжелый слой при начале численного эксперимента располагался между $y = N_y/4$ и $y = N_y/4 + N_y/5$, начальное распределение поля скорости нулевое, задача решалась на области с

размерами 200×1000 с параметрами $\rho_r = 1000$, $\nu_r = 10, \mathrm{Bo} \approx 12 \cdot 10^4$ при значениях числа Вебера: $\mathrm{We} = 0$ и $\mathrm{We} \approx 6 \cdot 10^7$.

На боковых границах для поля скорости задавалось условие свободного скольжения, а для параметра порядка – условие отсутствия потока. Данные граничные условия соответствуют рассматриваемой упрощенной постановке задачи. Перспективным направлением дальнейшего развития алгоритма является разработка специального типа граничных условий, учитывающих различие коэффициентов поверхностного натяжения для разных сред.

При $\mathrm{We} = 0$ тяжелая жидкость, как и ожидается, опускается на дно сосуда. При $\mathrm{We} \approx 6 \cdot 10^7$ и выполнении условия $v_{vibr} > v_*$ устанавливается стационарное колебательное движение слоя. Результаты приведены на рис. 2, где черным цветом обозначена тяжелая жидкость, светлым – легкая.

5. Заключение

В работе методом решеточных уравнений Больцмана исследована динамика межфазной границы двух несмешивающихся жидкостей под действием вертикальных вибраций. Рассмотрено возникновение гравитационно-капиллярных волн и динамическая стабилизация слоя тяжелой жидкости в легкой среде.

Показано, что предложенная численная модель воспроизводит характерные волновые процессы и позволяет описывать левитацию тяжелой жидкости при выполнении соответствующего условия вибрационной стабилизации.

Литература

1. Брискман В.А. Параметрическая стабилизация поверхности жидкости // Доклады Академии наук СССР, 1976, т. 226, № 5, с. 1041.
2. Безденежных Н.А., Брискман В.А., Черепанов А.А., Шаров М.Т. Управление устойчивостью поверхности жидкости с помощью переменных полей // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. АН СССР, УрО, Свердловск, 1983, с. 37-56.
3. Apffel B., Novkoski F., Eddi A., Fort E. Floating under a levitating liquid // Nature. 2020. Vol. 585, P. 48–52. DOI: 10.1038/s41586-020-2643-8.
4. Apffel B., Wilkinson C., Fort E. Liquid interface shaping and transport phenomena induced by spatially inhomogeneous vibrations // European Physical Journal Plus. 2022. Vol. 137. Art. 328. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02537-6.
5. Geier M., Fakhari A., Lee T. Conservative phase-field lattice Boltzmann model for interface tracking equation // Physical Review E. 2015. Vol. 91. Art. 063309. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.063309.
6. Liang H., Xu J., Chen J., Wang H., Chai Z., Shi B. Phase-field-based lattice Boltzmann modeling of large-density-ratio two-phase flows // Physical Review E. 2018. Vol. 97. Art. 033309. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.033309.
7. Volodin I., Alabuzhev A. Lattice Boltzmann simulation of interfacial dynamics induced by vertical vibrational force // Physics of Fluids. 2026. Vol. 38. Art. 092135. DOI: 10.1063/5.0336810.
8. Inamuro T., Yoshino M., Suzuki K. An Introduction to the Lattice Boltzmann Method: A Numerical Method for Complex Boundary and Moving Boundary Flows. World Scientific, 2021. DOI: 10.1142/12375.

О ДИНАМИЧЕСКОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ИСТОЧНИКОВ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.А. Воробьева

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается система уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении. Изучается вопрос о динамическом восстановлении источников электрического поля, роль которых играют сторонние токи. Формулируется регуляризирующий алгоритм восстановления проекции сторонних токов на подпространство потенциальных векторных полей по данным измерений электрических полей.

Ключевые слова: квазистационарные приближения, системы уравнений Максвелла, обратные задачи об источнике, динамическая регуляризация.

При решении широкого класса прикладных задач используются квазистационарные модели электромагнитных процессов; в частности, при изучении проблем атмосферного электричества для описания электрических полей применяется квазистационарное электрическое приближение, в котором делается предположение о потенциальности электрического поля [1-5]. Среди них одной из важных проблем атмосферного электричества является решение обратных задач о восстановлении источников электрических полей: в соответствии с классической работой Вильсона [6-7], источниками электрических полей являются грозовые облака атмосферы, поддерживающие квазистационарный ток глобальной атмосферной электрической цепи [8-9]. В настоящей работе изучается задача о динамическом восстановлении источников по измеренным электрическим полям с использованием методов динамической регуляризации, развитых в работах [18-19].

Рассмотрим область $\Omega \subset R^3$, диффеоморфную шаровому слою с границей $\partial\Omega=\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — поверхность земли, Γ_2 — верхняя граница атмосферы. Физической основой модели служат уравнения Максвелла и закон Ома [10]; в квазистационарном приближении система уравнений Максвелла записывается в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}=0, \quad \operatorname{div} \vec{H}=0, \quad \operatorname{div} \vec{E}=4\pi\rho, \tag{1}$$

дополняется обобщённым законом Ома [3]

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}+\vec{J}^{\,\mathrm{ext}} \tag{2}$$

и граничным условием идеального проводника $\vec{E}_\tau|_\Gamma=0$; здесь $\sigma(x,t)$ — удельная проводимость, $\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ — объёмная плотность сторонних токов (источников поля). Умножая (1) на c и подставляя (2), получаем

$$c \operatorname{rot} \vec{H}=\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+4\pi\sigma\vec{E}+4\pi\vec{J}^{\,\mathrm{ext}} \tag{3}$$

Поскольку $\operatorname{rot} \vec{E}=0$, поле потенциально: $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$.

Введём используемые функциональные пространства: $(L_2(\Omega))^3$ со скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})=\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx$; гильбертово пространство $H(\mathrm{rot};\Omega)=\{\vec{u}\in(L_2(\Omega))^3:\operatorname{rot}\vec{u}\in(L_2(\Omega))^3\}$ со скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})_{H(\mathrm{rot};\Omega)}=\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx+\int_\Omega \operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\,dx$ и его замкнутое подпространство $\mathrm{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)=\{\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega):\operatorname{rot}\vec{u}=0\}$ [13-14]; пространство $V(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega):u|_{\Gamma_1}=0,\ u|_{\Gamma_2}=\mathrm{const}\}$ со скалярным произведением $(u,v)_{V(\Omega)}=(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)_{L_2(\Omega)}$ и подпространство $\operatorname{grad}V(\Omega)=\{\operatorname{grad}u:u\in V(\Omega)\}\subset(L_2(\Omega))^3$. В силу модифицированного неравенства Фридрихса [15] для любых $u\in V(\Omega)$ выполнено $\int_\Omega |u|^2\,dx\le C\int_\Omega|\operatorname{grad}u|^2\,dx$ с постоянной C, зависящей только от Ω; следовательно, $V(\Omega)$ с введённым скалярным произведением является гильбертовым пространством. Заметим, что уравнение (3) не разрешено относительно производной по времени и относится к классу псевдопараболических уравнений соболевского типа [11-12]

Подставляя закон Ома в (3) и переходя к вариационной формулировке [3], получаем задачу: найти функцию $\varphi \in C^1([0,T];V(\Omega))$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)\,dx+4\pi\int_\Omega \sigma\,(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)dx=4\pi\int_\Omega \left(\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}\cdot\operatorname{grad}\psi\right)dx \quad \forall\,\psi\in V(\Omega) \qquad (4)$$

и начальному условию $\varphi|_{t=0}=\varphi_0\in V(\Omega)$; выбор пробных функций $\psi\in V(\Omega)$ обеспечивает выполнение граничных условий $\varphi|_{\Gamma_1}=0$, $\varphi|_{\Gamma_2}=C(t)$ с неизвестной функцией $C(t)$ и закона сохранения заряда на Γ_2 [3-4]. Полученная вариационная постановка удобна для построения проекционно-разностных схем (метода Бубнова– Галёркина) [17].

Теорема 1 ([3], теорема 1)**.** *Существует, и притом единственная, функция* $\varphi\in C^1([0,T];V(\Omega))$, *удовлетворяющая интегральному тождеству* (4) *и начальному условию* $\varphi|_{t=0}=\varphi_0$ *для любой функции* $\psi\in V(\Omega)$.

Более общие краевые условия и доказательство корректности в пространствах Соболева приведены в [4].

В настоящей работе ставится задача о динамическом восстановлении $\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ по результатам измерений напряжённости электрического поля: в каждый момент времени $t\in[0,T]$ произведено измерение распределения напряжённости поля с точностью $\delta>0$; измеренное значение обозначим $\vec{E}_\delta(t,x)$, причём предполагается, что $\|\vec{E}_\delta(t,\cdot)-\vec{E}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)^3}\le\delta$ при всех $t\in[0,T]$. Непосредственное вычисление $\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ из соотношения (3) по измеренным значениям является некорректной задачей, поскольку $\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ выражается через производную $\partial\vec{E}/\partial t$, т. е. задача сводится к численному дифференцированию по t; для её решения применяется регуляризующий алгоритм, состоящий в рассмотрении однопараметрического семейства вспомогательных задач с параметром $\alpha>0$ (схема динамической регуляризации, [18-19]:

$$\frac{d\vec{E}^{\,\delta,\alpha}}{dt}+4\pi\sigma\vec{E}^{\,\delta,\alpha}+\frac{1}{\alpha}\vec{E}^{\,\delta,\alpha}=\frac{1}{\alpha}\vec{E}_\delta, \qquad \vec{E}^{\,\delta,\alpha}(0)=\vec{E}_\delta(0) \qquad (5)$$

Уравнение (5) получается из (3) заменой правой части $c\operatorname{rot}\vec{H}-4\pi\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ на $\frac{1}{\alpha}(\vec{E}_\delta-\vec{E}^{\,\delta,\alpha})$.

Пусть $\Pi:(L_2(\Omega))^3\to\operatorname{grad}V(\Omega)$ — оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства $(L_2(\Omega))^3$ на его замкнутое подпространство $\operatorname{grad}V(\Omega)$; оценки скалярных производных векторных полей, необходимые для обоснования сходимости, приведены в [16].

Теорема 2. *Если согласование параметра выбрано так, что* $\alpha=\alpha(\delta)\to0$ *и* $\delta/\alpha(\delta)\to0$ *при* $\delta\to0$, *то* $\|\frac{d\vec{E}^{\,\delta,\alpha}}{dt}-\frac{d\vec{E}}{dt}\|_{L_2(0,T;\,\operatorname{grad}V(\Omega))}\underset{\delta\to0}{\to}0$, *и, следовательно,* $\|\Pi\left(\frac{d\vec{E}^{\,\delta,\alpha}}{dt}+4\pi\sigma\vec{E}^{\,\delta,\alpha}\right)-4\pi\,\Pi\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}\|_{L_2(0,T;\,\operatorname{grad}V(\Omega))}\underset{\delta\to0}{\to}0$.

Таким образом, по измеренным значениям напряжённости восстанавливается не весь вектор $\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$, а лишь его проекция $\Pi\vec{J}^{\,\mathrm{ext}}$ на подпространство $\operatorname{grad}V(\Omega)$.

Литература

1. Mareev E.A., Anisimov S.V. Global Electric Circuit as an Open Dissipative System // Proc. 12th Int. Conf. on Atmospheric Electricity. Versailles, 2003. P. 797–800.
2. Mareev E.A., Anisimov S.V. Lifetime of the Energy in the Global Electric Circuit // Proc. 13th Int. Conf. on Atmospheric Electricity. Beijing, 2007.
3. Жидков А.А., Калинин А.В. Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 6 (1). С. 150–158.
4. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 449, No. 1. P. 136–160. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.01.025.
5. Browning G.L., Tzur I., Roble R.G. A Global Time-Dependent Model of Thunderstorm Electricity. Part I: Mathematical Properties of the Physical and Numerical Models // J. Atmos. Sci. 1987. Vol. 44, No. 15. P. 2166–2177.

6. Wilson C.T.R. Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Philos. Trans. R. Soc. Lond. A. 1921. Vol. 221. P. 73–115.
7. Wilson C.T.R. The electric field of a thundercloud and some of its effects // Proc. Phys. Soc. Lond. 1924. Vol. 37. P. 32D–37D.
8. Морозов В.Н. Распределение электрического поля, созданного нестационарным током грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью // Прикладная метеорология. 2006. Вып. 8 (555).
9. llingworth A.J., Latham J. Calculations of Electric Field Growth within a Cloud of Finite Dimensions // J. Atmos. Sci. 1975. Vol. 32. P. 2206–2209.
10. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
11. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
12. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск: Наука, 1986.
13. Темам Р. Уравнения Навье– Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
14. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms. Berlin: Springer, 1986.
15. Гаевски Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные неравенства. М.: Мир, 1978.
16. Калинин А.В. Оценки скалярных производных векторных полей и их применение в математической физике. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007.
17. Марчук Г.И., Агошков В. И. Введение в проекционно-разностные методы. М.: Наука, 1981.
18. Осипов Ю.С., Васильев Ф. П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 236 с.
19. Максимов В.И. Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 771–780.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЫ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО РАЗРЯДА В ГЕЛИИ С СОЧЕТАНИЕМ КИНЕТИЧЕСКОГО, ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДОВ[1*]

А.А. Галиев, Х. Нуриддинов, А.И. Сайфутдинов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева

Предложен гибридный метод моделирования высокочастотного индукционного разряда в гелии, объединяющий расширенную гидродинамическую модель и суррогатную модель на основе глубокой нейронной сети. Нейросеть аппроксимирует кинетические коэффициенты, получаемые из решения уравнения Больцмана, и позволяет существенно сократить вычислительные затраты при сохранении точности описания разряда.

Ключевые слова: индуктивно-связанная плазма, ВЧИ-разряд, уравнение Больцмана, функция распределения электронов по энергиям, глубокие нейронные сети, гелиевая плазма.

1. Введение

Использование физико-математических моделей индуктивно-связанной плазмы (ICP) необходимо для оптимизации и разработки плазменных реакторов, используемых в технологии микроэлектроники, нанесения покрытий и обработке материалов [1]. Необходимая точность расчета концентрации частиц, электронной энергии и поглощаемой мощности достигается корректным описанием кинетики электронов [2]. Наиболее физически обоснованным является подход решения кинетического уравнения Больцмана для функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) в двухчленном Лоренцовом приближении. Однако его использование в самосогласованной многомерной модели разряда требует значительной вычислительной мощности. Использование Максвелловской ФРЭЭ значительно ускоряет расчет, но в условиях работы с неравновесной плазмы может привести к появлению заметных ошибок в скоростях возбуждения и ионизации [3,4].

Цель работы представленной работы заключается в разработке и проверке использования модели на основе глубокой нейронной сети (DNN), которая воспроизводит результаты кинетического расчёта и используется в качестве замыкающего соотношения расширенной гидродинамической модели ВЧИ-разряда в гелии.

2. Постановка задачи и методика

Приведена осесимметричная модель высокочастотного индукционного (ВЧИ) реактора, возбуждаемого с частотой 13,56 МГц. В качестве рабочего газа использовался гелий при давлении 0,02 – 02 Торр. Расчет электромагнитного поля происходил в частотной области, в то время как распределение поглощённой мощности использовалось как источник энергии электронов. Для электронов, ионов и возбуждённых частиц решались уравнения непрерывности в диффузионно-дрейфовом приближении, уравнение энергии электронов и уравнение Пуассона для электростатического поля.

В работе используется десять плазмохимических реакций: упругое рассеяние электронов, возбуждение и девозбуждение метастабильных состояний He(T) и He(S), прямая и ступенчатая ионизация, а также пеннинговская ионизация. Константы скоростей электронно-атомных реакций рассчитывались путем решения уравнений Больцмана в двухчленном приближении. Кине-

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 26-12-00342.

тические коэффициенты определялись интегрированием сечений процессов по вычисленной ФРЭЭ.

Формирование обучающей выборки нейронной сети выполнено при помощи параметрического сканирования локальных состояний плазмы. Входами для DNN являлись мольные доли He(T) и He(S), степень ионизации и средняя энергия электронов. Первые три параметра изменялись в диапазоне 10^{-6}–10^{-3}, средняя энергия – от 1,5 до 20 эВ. По примерно 500 решениям уравнения Больцмана обучалась полносвязная сеть с архитектурой 4–32–64–64–32–12. Сеть предсказывала восемь констант скоростей и транспортные коэффициенты, необходимые для замыкания гидродинамической модели.

3. Результаты и обсуждение

Результаты сравнения расчета DNN с прямым решением уравнения Больцмана показали, что ошибка для основных кинетических коэффициентов составляет 1 – 5 % во всем рассмотренном диапазоне энергий, а в области 8 – 20 эВ снижается до 1 – 2%. При энергиях 1,5 – 4 эВ погрешность для коэффициентов возбуждения и прямой ионизации может достигать 20%, однако абсолютные значения этих коэффициентов не превышают 10^{-22} м^3/с. Поэтому их вклад в интегральный баланс частиц в данном режиме пренебрежимо мал.

Проверка работы гибридной модели проведена в гелии при 0,2 Торр и прикладываемой мощности 500 Вт. При прямом решении уравнения Больцмана максимальная концентрация электронов составила $3{,}52\cdot10^{17}$ м$^{-3}$, а при использовании DNN – $3{,}48\cdot10^{17}$ м$^{-3}$. Для метастабильных атомов He(T) соответствующие значения равны $1{,}31\cdot10^{18}$ и $1{,}29\cdot10^{18}$ м$^{-3}$, для He(S) – $8{,}00\cdot10^{17}$ и $8{,}06\cdot10^{17}$ м$^{-3}$. Расхождение эталонных и нейросетевых пространственных распределений и максимальных концентраций составляет не более 1,5%.

Для сравнения, использование максвелловской ФРЭЭ приводит к отличию максимумов концентраций электронов до 17 %, He(T) – до 15 %, He(S) – до 13 %. Это связано с тем, что реальная неравновесная ФРЭЭ в гелиевой плазме отличается от максвелловской: неупругие процессы изменяют форму высокоэнергетического хвоста распределения и, следовательно, скорости пороговых процессов. DNN не вводит это физическое упрощение, а воспроизводит кинетическую зависимость коэффициентов от локального состояния плазмы.

Практическая эффективность метода подтверждена сравнением времени расчёта. Самосогласованное моделирование с DNN заняло 6314 с (1 ч 45 мин), тогда как вариант с прямым решением уравнения Больцмана в процессе расчёта потребовал около 87103 с (примерно 24 ч 11 мин) на вычислительной станции на базе процессора Intel Core i9-10940X. Таким образом, нейросетевая аппроксимация обеспечила ускорение более чем в 13 раз. При серийных параметрических расчётах выигрыш возрастает, поскольку однажды обученная сеть может многократно использоваться для различных режимов и геометрий в пределах области обучения.

4. Заключение

Разработан гибридный подход к моделированию ВЧИ-разряда в гелии, который предусматривает использование предсказания DNN-модели для замены более затратного решения уравнения Больцмана. Сформированная модель обеспечивает точное воспроизведение кинетических коэффициентов и пространственных распределений концентраций частиц: отличие от эталонного кинетического расчёта не превышает 1,5 %. Одновременно достигается сокращение времени вычислений более чем в 13 раз.

Предлагаемый подход совмещает в себе физическую достоверность кинетического описания с производительностью гидродинамической модели. Он перспективен для многопараметрической оптимизации ВЧИ-реакторов, построения цифровых двойников и задач управления плазменными технологическими процессами. Дальнейшее развитие метода связано с расширением обучающей выборки, включением газовых смесей и оценкой неопределённости нейросетевых предсказаний.

Литература

1. Myakonkikh, A.V., Kuzmenko, V.O., Efremov, A.M., & Rudenko, K.V.On the Correctness of the Model Description of Plasma Composition in an SF6+He+O2 Mixture // Russian Microelectronics. – 2025. – Vol. 54. – №. 5. – P. 467-476. DOI: 10.1134/S1063739725600608
2. Lopaev, D.V., Volynets, A.V., Zyryanov, S.M., Zotovich, A.I., and Rakhimov, A.T., Actinometry of O, N and F atoms, J. Phys. D: Appl. Phys., 2017, Vol. 50, №. 7, P. 075202. DOI: 10.1088/1361-6463/50/7/075202
3. Saifutdinov A.I., Sysoev S.S. Numerical simulation and experimental diagnostics of fast elec-tron kinetics and plasma parameters in a microhollow cathode discharges in helium // Plasma Sources Science and Technology. – 2023. – Vol. 32. – №. 11. – P. 114001. DOI: 10.1088/1361-6595/ad05f6
4. Bogdanov, E.A., Demidov, V.I., Kudryavtsev, A.A., Saifutdinov, A.I. Is the negativeglow plasma of a direct current glow discharge negatively charged? // Physics of plasmas. – 2015. – Vol. 22. – №. 2. DOI: 10.1063/1.4907192

СИНТЕТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНО ДОСТИЖИМОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НА УСКОРИТЕЛЯХ MOORE THREADS S80 И S70

Ган Ю, М.А. Кривов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе представлены предварительные результаты по разработке набора тестов для комплексных замеров производительности графических ускорителей MTT S80 и S70 от китайской компании Moore Threads. Основная цель заключается в достижении близкой к пиковой производительности, поэтому рассматриваемые тесты не ориентированы на решение каких-либо прикладных задач, однако позволяют оценить зрелость компилятора, драйверов и сопутствующей экосистемы MUSA. Набор тестов разделён на несколько категорий, покрывающих целочисленные операции, вычисления с плавающей запятой, атомарные операции, тригонометрические функции, а также работу с различными уровнями иерархии памяти. Так как MUSA имеет высокую степень совместимости с CUDA, то полностью аналогичное тестирование независимо было проведено для ускорителей NVIDIA GeForce 1080 Ti, GeForce 2080 Ti и GeForce 3090. Исходные коды разработанных тестов доступны в репозитории проекта https://github.com/msu-graphics-group/moore-threads-benchmark.

Ключевые слова: GPGPU, MUSA, CUDA, MTT S80, MTT S70

1. Введение

Ускорители вычислений от ряда китайских компаний, таких как Huawei [1], MetaX, Cambricon, Biren, Lisuan и Iluvatar постепенно переходят из категории инженерных образцов в полноценные аппаратные решения, применяемые для задач искусственного интеллекта и, чуть в меньшей степени, в классических высокопроизводительных вычислениях. В силу геополитических ограничений, достижения этих компаний практически не находят отражения в рецензируемой академической литературе, освещаясь исключительно в маркетинговых материалах и технических обзорах.

В отличие от названных компаний, Moore Threads [2] позиционирует свои графические ускорители как массовый продукт для потребительского и профессионального сегментов. Вследствие этого исследователи имеют реальную возможность приобрести данные устройства и использовать их в качестве альтернативы решениям от NVIDIA. Наш опыт показывает, что на текущем этапе подобный переход с CUDA на MUSA сложно признать целесообразным, так как из-за ряда аппаратных и программных ограничений их использование отчасти напоминает работу с первыми CUDA-совместимыми ускорителями NVIDIA, такими как GeForce 8800 GTX и Tesla C1060 (2007-2009 года).

С другой стороны, нельзя не признать постоянное повышение стабильности экосистемы MUSA, в силу чего независимые оценки их применимости для научных расчётов начинают представлять отдельный интерес. Наш проект по разработке синтетических тестов нацелен на решение данной проблемы и позволяет количественно оценить, какую долю от пиковой производительности удаётся достичь при вычислениях, имитирующих прикладные задачи.

2. Технические характеристики

Рассматриваемые ускорители имеют полностью идентичные корпуса и системы охлаждения (рис. 1), единственным их отличием является разъём для подключения дополнительного питания. Модель MTT S70 ограничивается одним 8-контактным разъёмом стандарта PCI-SIG (до 150 Ватт), в то время как в комплекте с MTT S80 идёт переходник для подключения двух подобных кабелей (до 300 Ватт). При установке этих ускорителей могут возникнуть опреде-

лённые технические сложности, так как они совместимы далеко не со всеми процессорами и материнскими платами. Более того, использование экосистемы MUSA и их самих как вычислительных устройств становится возможным в том и только в том случае, когда они работают в составе компьютера на базе центрального процессора от компании Intel и операционной системы Ubuntu 24.04. В нашем случае в роли тестовой системы выступали процессор Intel Core i5-14600K и материнская плата с чипсетом Intel B760, для которых дополнительно потребовалось обновить UEFI до актуальной версии, а также включить опцию Resizable BAR.

Рис. 1. Фотографии ускорителей Moore Threads MTT S80 и S70, использованных для проведения тестирования

Отдельной проблемой оказалось определение точных технических характеристик, так как в разных источниках указана немного разная информация. Мы предполагаем, что для марки MTT S70 использовались различные чипы, что и привело к наблюдаемым противоречиям. В Табл. 1 представлены данные, которые нам удалось получить и обобщить с помощью утилиты musaInfo. Для сравнения в ней также содержатся характеристики аналогичных ускорителей NVIDIA.

Таблица 1. Технические характеристики использованных ускорителей Moore Threads и NVIDIA. Здесь и далее сокращение GF означает GeForce

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
Количество SIMT ядер	4096	3584	10496	4352	3584
Базовая частота, *ГГц* (ядро / память)	1.8 / 7	1.6 / 7	1.4 / 9.75	1.35 / 7	1.48 / 5.5
Производительность, *ТФлопс* (FP32 / FP64)	14.7 / 0.12	11.5 / 0.09	29.3 / 0.46	11.75 / 0.37	10.6 / 0.3
Объём и тип памяти, *ГБ*	16 (GDDR6)	7 (GDDR6)	24 (GDDR6X)	11 (GDDR6)	11 (GDDR5X)
Пропускная способность памяти, ГБ/с	448	392	936	616	484
Интерфейс	PCI-E 5.0	PCI-E 4.0	PCI-E 4.0	PCI-E 3.0	PCI-E 3.0
Архитектура, год выпуска	Chunxiao, 2022		Ampere, 2020	Turing, 2018	Pascal, 2017

Тестирование проводилось с использованием наборов разработчика MUSA 4.2.0 и CUDA 13.0, а также драйверов версий 3.1.0 и 580.126.09 соответственно. При работе с ускорителями Moore Threads наблюдались определённые технические трудности, начиная от конфликтов с системными библиотеками и заканчивая глобальными ошибками драйвера после подключения к компьютеру по протоколу ssh. В последнем случае работоспособность системы удавалось восстановить только после авторизации в графическую оболочку, удалённая перезагрузка не оказывала никакого эффекта. Логично ожидать, что озвученные особенности будут постепенно устраняться в следующих версиях драйвера.

3. Методология

Хотя экосистема CUDA развивается почти двадцать лет, подходящего под наши задачи набора тестов обнаружить не удалось. Идейно схожий и крайне известный бенчмарк SHOC [3] больше не развивается, поэтому сделанные с его помощью выводы могут оказаться следствием

оптимизации под устаревшие архитектуры. Относительно современный набор тестов CUDAMicroBench [4] нацелен на оценку производительности при выполнении характерных паттернов вычислений, например, таких как перемножение матрицы на вектор, что является тестированием более высокого уровня. Аналогичное замечание можно сделать и про популярный пакет Rodinia [5]. Стоит признать, что существуют достаточно близкие работы типа [6] о низкоуровневом тестировании архитектур ускорителей NVIDIA, однако воспроизвести эти результаты для MTT S80 и S70 мы не смогли из-за закрытости исходных кодов.

Представляемый нами набор тестов повторяет идеи SHOC, но с возможностью подмены CUDA на MUSA или HIP на этапе компиляции. В остальном они точно также многократно проводят однотипные действия, после чего затраченные на их выполнение времена сортируются, с каждого из концов отсекается по 10% для исключения возможных выбросов, а результатом теста считается усреднённое значение для оставшихся 80%. В случаях, когда входные данные могут иметь несколько конфигураций, тест проводятся для каждой из них, после чего выбирается наилучший результат. Чтобы обеспечить воспроизводимость, мы также отключали динамическое повышение частоты ядра и памяти ускорителя. В зависимости от сути теста, его результат может быть представлен с использованием подходящих метрик, таких как микросекунды, ГБ/с, ТФлоп/с, ТИнтОп/с или просто оп/с.

4. Результаты

В данном разделе приведены абсолютные значения замеров производительности MTT S80 и S70 в сравнении с тремя ускорителями NVIDIA, выпущенными в 2017, 2018 и 2020 годах. Важно подчеркнуть, что исходный код используемых тестов и ядер идентичен для их CUDA и MUSA версий.

4.1. Накладные расходы

Оценка стоимости «нулевого действия», такого как, например, выделение или копирование одного байта, позволяет наглядно оценить, насколько зрелой является сопутствующая ускорителям экосистема. Хотя для большинства задач подобные затраты на порядки меньше времени самих расчётов, они могут оказаться отдельной проблемой при вычислениях на нескольких ускорителях из-за необходимости небольших, но частых синхронизаций.

Таблица 2. Накладные расходы при вызове соответствующих функций для данных минимального размера, *микросекунды*

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
cudaEventCreate()	0.53	0.57	0.14	0.14	0.19
cudaEventRecord()	0.017	0.017	0.0016	0.0015	0.0013
cudaDeviceSynchronize()	6.8	7.4	0.57	0.59	0.59
cudaMalloc()	7.8	8	14.6	6	14
cudaMemcpy(), d2d	18.9	18.9	2.3	2.2	1.8
cudaMemcpy(), h2d	18.3	18.9	3.6	3.6	3.5
cudaMemcpyAsync(), h2d	99.1	105.9	3.6	6.3	5.8

Приведённые в таблице 2 замеры наглядно демонстрируют, что стоимость «нулевого действия» на картах Moore Threads практически всегда в 5-10 раз больше. Единственным исключением оказалось асинхронное копирование, которое на MTT выполнялось даже в 5-6 раз дольше, чем обычное синхронное.

4.2. Пропускная способность

Более актуальным тестом является оценка пропускной способности при копировании блоков разного размера. Стоит напомнить, что все пять ускорителей поочерёдно устанавливались в

один и тот же компьютер, поэтому наблюдаемые отличия не являются следствием каких-либо аппаратных особенностей самой системы.

Таблица 3. Пропускная способность различных уровней иерархии памяти, *ГБ/с*

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
Global, *d2d*	197.9	171.8	419.4	267.5	177.5
Shared, *read / write, ×10³*	1.5 / 1.2	1.1 / 0.95	8.6 / 8.7	6.5 / 6.6	6.2 / 6.6
Pageable, *h2d / d2h*	25.6 / 26.3	19.1 / 23.4	17.8 / 13.7	12 / 12.9	12.1 / 12.9
Pinned, *h2d / d2h*	32.8 / 41.7	23.7 / 26.1	24 / 26.4	13 / 13.2	13 / 13.2
Managed, *h2d / d2h*	32.8 / 41.3	23.7 / 26.1	19.9 / 13.9	12 / 12.9	12.1 / 13

Согласно результатам из таблицы 3, ускорители MTT копируют данные в разы медленнее. Причём отставание наблюдается как при пересылках внутри чипа (разделяемая память), так и при обращениях к размещённой на плате памяти формата GDDR6 (глобальная память). Отличия в пропускной способности при обмене данными по интерфейсу PCI-E объясняются поддержкой разных его стандартов: PCI-E 5.0 для MTT 80, PCI-E 4.0 для MTT S70 и GeForce 3090, и PCI- E 3.0 для GeForce 2080 Ti и GeForce 1080 Ti.

4.3. Вычислительная мощность

Количество вычислительных операций, выполняемых в секунду, являются самым распространённым тестом, который обычно используется для прямого сравнения различных вычислительных систем и архитектур. В нашем случае ядра были составлены таким образом, чтобы одно и тоже действие многократно выполнялось всеми нитями, но при этом компилятор не имел возможность провести его оптимизацию.

Таблица 4. Вычислительная производительность при работе с разными базовыми типами. В каждой ячейке приведены замеры для операций типа ADD / MAD , *ГФлопс и ГИнтОпс*

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
FP64	114.5 / 114.6	89 / 89.1	234.1 / 468.1	175.1 / 350.3	216.8 / 433.7
FP32, *×10³*	5.6 / 11.3	4.4 / 8.8	15.9 / 30.1	6.6 / 13.3	6.5 / 12.5
FP16, *×10³*	5.6 / 11.2	4.3 / 8.7	16.7 / 33	11.7 / 22.5	0.1 / 0.2
FP16x2, *×10³*	5.4 / 10.8	4.2 / 8.4	17.8 / 35.5	13.3 / 26.4	0.1 / 0.2
INT32, *×10³*	1.6 / 2.3	1.2 / 1.8	8.6 / 24.2	6.5 / 18.5	6.6 / 5
UINT32, *×10³*	1.6 / 2.3	1.2 / 1.8	8.6 / 24.2	6.5 / 18.2	6.7 / 5

Интересным наблюдением об архитектуре MTT, которое можно сделать по таблице 4, является отсутствие ускорения при переходе от операций типа ADD к MAD в вычислениях с двойной точностью. Некоторые источники предполагали, что двойная точность ими не поддерживается в принципе, однако наши показали, что это не так. Отдельно стоит отметить, что половинная точность демонстрирует точно такую же производительность, как и одинарная.

4.4. Атомарные операции

Для многих алгоритмов требуются барьерные синхронизации или частые взаимодействия между отдельными нитями, которые проще всего организовать с помощью атомарных операций. К сожалению, не все архитектуры обеспечивают их эффективную аппаратную реализацию, поэтому мы провели соответствующие тесты для ускорителей Moore Threads.

Таблица 5. Производительность при выполнении атомарных операций для типа UINT32. В каждой ячейке приведены замеры над глобальной / разделяемой памятью, *ГОп/с*

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
	каждая нить обращается к уникальному адресу				
Add	error / 187.2	error / 145.6	284.8 / 2.1×10^3	209.9 / 1.7×10^3	79.1 / 1.7×10^3
Exchange	24 / 187.3	21.4 / 145.6	276.8 / 2.1×10^3	210.4 / 1.7×10^3	79.1 / 1.7×10^3
CAS	8.9 / 184	7.9 / 143	122.7 / 1.9×10^3	101 / 835.1	38.7 / 857.7
	все нити блока обращаются к одному и тому же адресу				
Add	1.7 / 38.1	1.5 / 29.7	30.6 / 139	24.3 / 52.4	27.1 / 53
Exchange	1.7 / 38.1	1.5 / 29.7	30.1 / 134	24.3 / 52.4	27.2 / 53.8
CAS	1.7 / 38.1	1.5 / 29.7	28.3 / 65.4	24.1 / 26.1	27.4 / 53.6

Несмотря на сопоставимую вычислительную мощность, ускорители MTT выполняют атомарные операции в десятки раз медленнее (Табл. 5), следствием чего становится необходимость дополнительной оптимизации ядер под них. Например, любая редукция, которую на картах NVIDIA обычно реализуют через атомарные операции, потребует возвращения на классическую схему с выделением буфера и вызовом нескольких ядер.

4.5. Специальные функции

В некоторых классах задач необходимо выполнение тригонометрических операций, которые могут быть вычислены как аппаратно благодаря модулю SFU, так и с помощью программной эмуляции. Наши тесты оценивают производительность именно первого варианта, что соответствует случаям, когда скорость расчётов важнее точности.

Таблица 6. Производительность основных специальных функций в одинарной точности, *ГОп/с*

	MTT S80	**MTT S70**	**GF 3090**	**GF 2080 Ti**	**GF 1080 Ti**
sin()	153.2	119.2	2.2×10^3	1.7×10^3	1.7×10^3
cos()	153.3	119.1	2.2×10^3	1.7×10^3	1.7×10^3
exp()	350.8	270.5	2.1×10^3	1.5×10^3	1.1×10^3
log()	455.5	354.2	2.2×10^3	1.6×10^3	1.5×10^3

Также, как и в случае с атомарными операциями, на ускорителях MTT специальные функции вычисляются на порядок медленнее (см. таблицу 6), чем в аналогах от NVIDIA. Другим отличием оказалась зависимость скорости от типа функции. Так, например, на вызов синуса требуется в три раза больше времени, чем на логарифм.

Литература

1. Liao H. et al. Ascend: A Scalable and Unified Architecture for Ubiquitous Deep Neural Network Computing // Proceedings of HPCA 2021, IEEE, 2021. P. 789-801.
2. Cheng K. et al. MusaCoder: Native GPU Kernel Generation with Full-Stack Training on Moore Threads GPU. URL: https://arxiv.org/pdf/2606.04847 (дата обращения: 05.10.2026)
3. Danalis A. et al. The scalable heterogeneous computing (SHOC) benchmark suite // Proceedings of the 3rd workshop on general-purpose computation on GPUs, 2010. P. 63-74.
4. Yi X. et al. CUDAMicroBench: Microbenchmarks to assist CUDA performance programming // Proceedings of IPDPSW 2021, IEEE, 2021. P. 397-406.
5. Che S. et al. Rodinia: A benchmark suite for heterogeneous computing // 2009 IEEE international symposium on workload characterization, IISWC 2009, IEEE, 2009. P. 44-54.
6. Bari M. et al. Is data placement optimization still relevant on newer gpus? Technical Report LLNL-CONF-757796. Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL). 2018.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ЛЕСА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА

А.А. Герасимов, М.И. Порфирьев, И.Г. Лебедев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Данная работа посвящена решению задач многомерной глобальной оптимизации с применением случайного леса для выявления областей притяжения локальных минимумов. Описывается модификация алгоритма глобального поиска, методами машинного обучения и методом локального поиска Хука-Дживса для нахождения экстремумов. Искомая функция удовлетворяет условию Липшица с неизвестной константой. Для подтверждения теории были приведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие ускорение при решении серии тестовых задач.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, условие Липшица, машинное обучение, случайный лес, локальная оптимизация, глобальный поиск, деревья решений, кривые Пеано, многоэкстремальные функции.

1. Введение

В задачах современной вычислительной математики значительное внимание уделяется анализу функций, обладающих специфическими свойствами ограниченного роста. Решаемая задача состоит в поиске глобального минимума многомерных функций, что формально записывается как:

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow min, \text{где } x_1, \dots, x_n \in D.$$

Особый интерес представляет класс липшицевых функций. Липшицевыми функциями называются функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$$

В таком случае рост функции можно оценить прямыми. Работа с подобными функциями требует применения надежных методов поиска экстремумов и построения суррогатных моделей.

2. Глобальный поиск, кривые Пеано и локальная оптимизация

Для решения поставленной задачи используется алгоритм глобального поиска (GSA), направленный на исследование всего пространства допустимых решений с целью нахождения абсолютного оптимума функции [1]. В отличие от локальных методов, которые могут «застрять» в локальном минимуме, глобальный поиск использует стратегии для обхода всей области определения.

Алгоритм глобального поиска относится к классу характеристических методов, он строит последовательность испытаний (вычислений значения функции f в конкретной течке), сужая интервалы неопределённости; очередная точка испытания выбирается в интервале с наибольшей характеристикой, что обеспечивает гарантированную сходимость к глобальному минимуму. Каждая итерация использует только значения функции, т.е. метод является методом нулевого порядка.

Для решения многомерных задач с ограничениями применяется метод сведения исходной многомерной области к одномерному отрезку $x \in [0, 1]$. В качестве основы для построения плотных разверток используются кривые Пеано [2, 3]. Это позволяет применять одномерные характеристические правила к многомерным задачам ценой потери части информации о локализации экстремума.

Поскольку глобальный поиск часто бывает вычислительно затратным на финальных этапах сходимости, его комбинируют с методами локального поиска. В нашей работе применяется метод Хука-Дживса [4], для локального поиска экстремума, это прямой метод нулевого порядка,

выполняющий покоординатный поиск с исследующим и ускоряющим шагом. Локальный метод запускается из точки, признанной окрестностью локального минимума, и уточняет решение до заданной точности ε.

3. Использование случайного леса для аппроксимации

Для аппроксимации исследуемых функций применяются ансамблевые методы машинного обучения, а именно случайный лес [5, 6, 7], программная реализация которого взята из библиотеки OpenCV [5, 8]. На рис. 1 приведен пример исходной целевой функции и ее аппроксимация случайным лесом. В ансамбле каждое дерево независимо берёт случайную выборку с возвращением из исходных точек, найденных глобальным поиском. Сами деревья устроены как бинарные деревья, в корне которых хранится вся выборка точек испытаний. Разбиение точек происходит по случайному набору переменных (в нашем случае используется N/2 переменных). В каждом узле выбирается граница, чтобы полученные подмножества были как можно более приближены к своему среднему значению, которое также обязательно хранится в узле. На рис. 2 приведен пример случайного леса для простой функции. Для обеспечения требуемой точности были установлены строгие параметры: 10 деревьев, максимум глубины 6, минимум 10 точек в листе. Порог точности установлен на 0.1, суррогатные разделения не используются. Остановка построения происходит, если изменение среднеквадратичной ошибки при разбиении становится меньше 0.01.

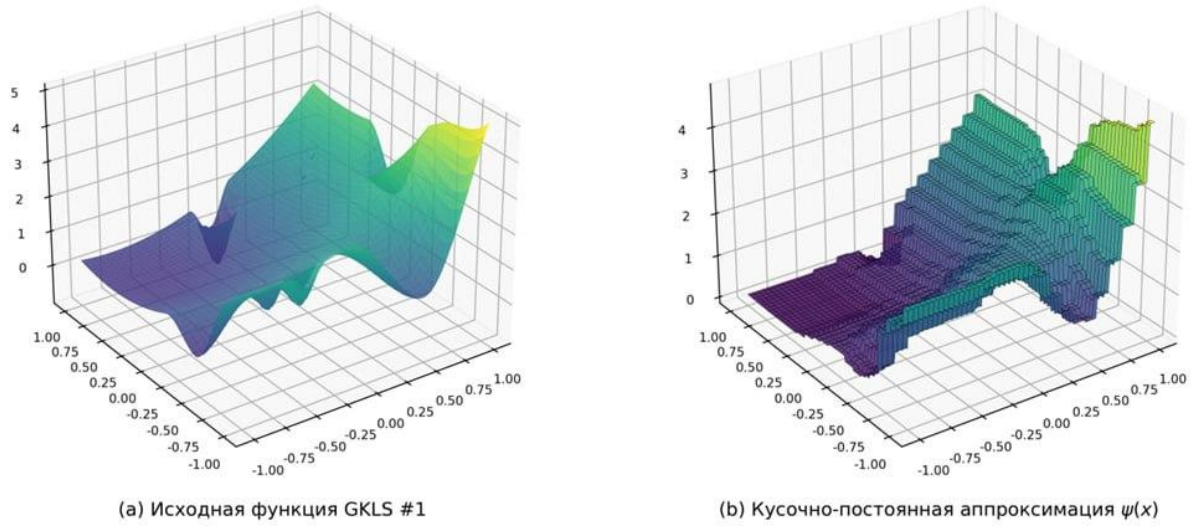


Рис. 1. Аппроксимация функции «Случайным лесом»

Следует отметить, что построение ансамбля требует накопления достаточного числа точек испытаний: при малом их количестве ошибка аппроксимации велика, и решение о запуске локального метода может быть принято неверно [9]. Это приводит к дополнительным накладным расходам.

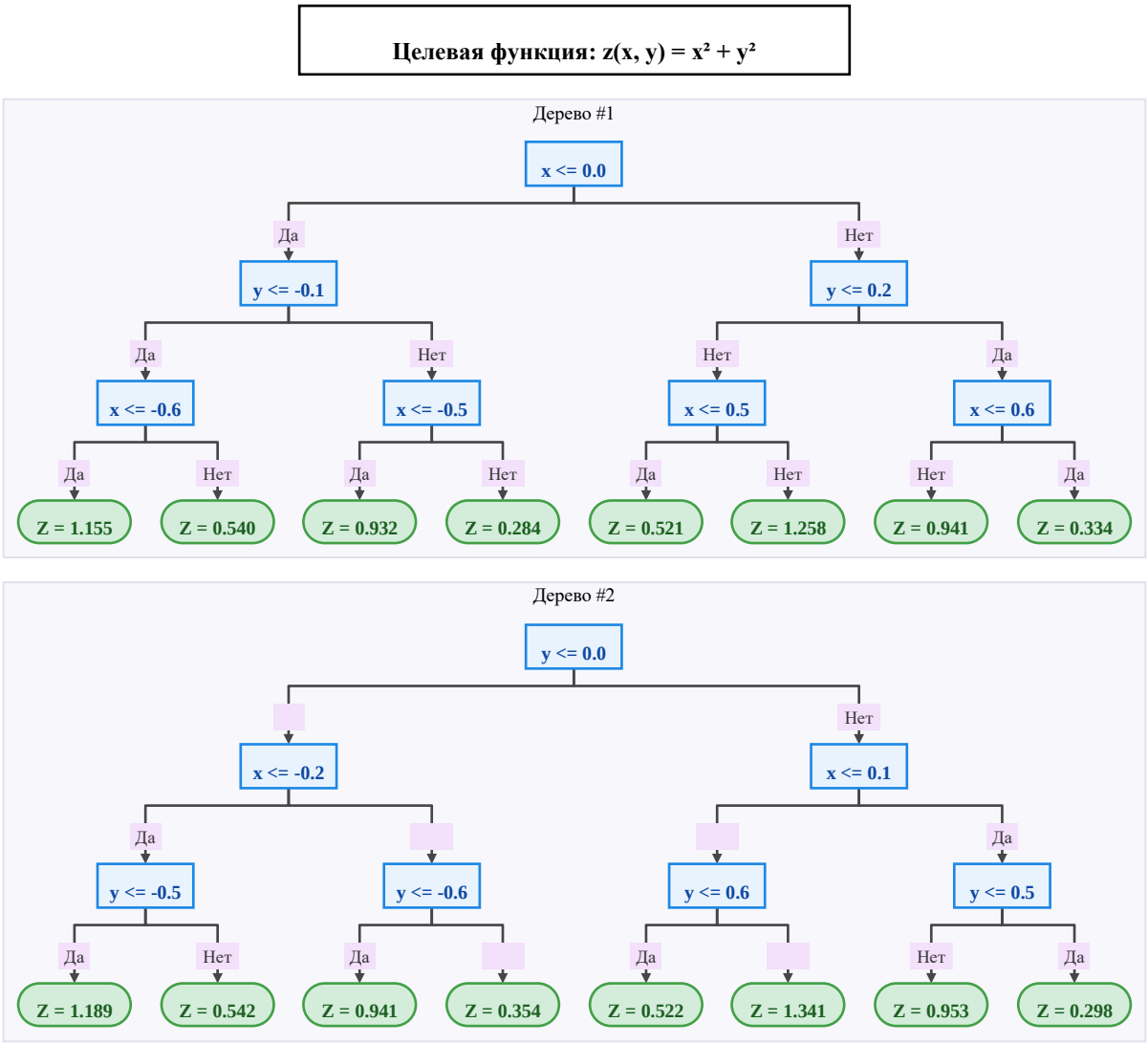


Рис. 2. Пример структуры деревьев решений

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительные эксперименты проводились на функциях класса GKLS [2, 10]. Размерность функций варьировалась в пределах $N \in \{2, \dots, 5\}$, а заданная погрешность составляла $\varepsilon \in \{0.0003, 0.0562\}$. Характеристики ПК, на котором проводились расчёты: процессор AMD Ryzen 5 5600 6-core, ОЗУ 16 ГБ. При проведении экспериментов был изменён критерий остановки алгоритма для оценки быстроты сходимости к оптимуму.

В Таблица 1 приведено сравнение алгоритма глобального минимума и его модификации с использованием леса решений для ускорения сходимости.

Таблица 1. Сравнение работы алгоритмов для различных размерностей N

N и тип задачи	Iterations (GSA)	Iterations (GSA + RF)	Time (GSA), сек.	Time (GSA + RF), сек.
N = 2 (среднее)	4033	**790**	0.85	**0.66**
N = 2 (hard)	7006	**1035**	1.41	**0.92**
N = 2 (simple)	1061	**546**	**0.29**	0.39
N = 3 (среднее)	12986	**2129**	3.15	**2.11**
N = 3 (hard)	19967	**2641**	4.79	**2.77**
N = 3 (simple)	6005	**1618**	1.50	**1.44**
N = 4 (среднее)	70815	**14201**	**14.16**	37.89
N = 4 (hard)	101053	**18525**	**19.77**	49.79
N = 4 (simple)	40578	**9878**	**8.54**	25.98
N = 5 (среднее)	634487	**62595**	146.41	**116.37**
N = 5 (hard)	1164965	**103801**	270	**174.98**
N = 5 (simple)	104009	**21390**	**22.81**	57.75

Результаты показывают, что гибридный алгоритм с использованием случайного леса сокращает число итераций по сравнению с GSA в 3–11 раз на всех рассмотренных размерностях. Выигрыш монотонно растёт с размерностью: при $N = 2$ сокращение составляет ≈5 раз, при $N = 5$ – уже ≈10–11 раз (например, 634 487 → 62 595 для задач средней сложности).

Однако по времени картина неоднородна. Для N = 2, 3 и для задач средней сложности при N = 5 гибрид быстрее (например, 146.41 с → 116.37 с). Для N = 4 и для простых задач N = 5 гибрид медленнее в 2–2,8 раза (37.89 с против 14.16 с). Причина – накладные расходы на обучение случайного леса и синхронность запусков локального метода: на простых задачах GSA сходится быстро сам по себе, и эти расходы не окупаются [1]. Таким образом, гибридный метод целесообразно применять к задачам, где число испытаний GSA велико (сложные многоэкстремальные задачи больших размерностей), а не к простым задачам.

5. Заключение

В работе рассмотрен гибридный алгоритм глобальной оптимизации липшицевых функций, в котором решение о запуске локального метода Хука-Дживса принимается на основе аппроксимации целевой функции, построенной случайным лесом. Численные эксперименты, на классе задач GKLS, показали, что такой подход позволяет сократить число испытаний, необходимых для достижения оптимума, в 3–11 раз, причём выигрыш растёт с размерностью задачи. По времени выигрыш достигается на сложных задачах больших размерностей; на простых задачах накладные расходы на построение и обучение ансамбля превышают экономию.

Литература

1. Sysoyev A., Barkalov K., Sovrasov V., Lebedev I., Gergel V. Globalizer – A Parallel Software System for Solving Global Optimization Problems // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10421. P. 492–499. DOI: 10.1007/978-3-319-62932-2_47.
2. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978. 240 с.
3. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
4. Hooke R., Jeeves T.A. "Direct Search" Solution of Numerical and Statistical Problems // Journal of the ACM. 1961. Vol. 8, No. 2. P. 212–229. DOI: 10.1145/321062.321069.
5. Brahmbhatt S. Practical OpenCV. New York: Apress, 2013. 244 p. DOI: 10.1007/978-1-4302-6080-6.
6. Breiman L. Random Forests // Machine Learning. 2001. Vol. 45, No. 1. P. 5–32. DOI: 10.1023/A:1010933404324.
7. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. New York: Springer, 2001. 533 p. DOI: 10.1007/978-0-387-21606-5.

8. OpenCV (Open Source Computer Vision) Documentation. URL: https://docs.opencv.org/4.x/dc/dd6/ml_intro.html (дата обращения: 10.07.2022).
9. Barkalov K.A., Lebedev I.G., Silenko D.I. On Using the Decision Trees to Identify the Local Extrema in Parallel Global Optimization Algorithm // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12, № 3. С. 5–18. DOI: 10.14529/cmse230301.
10. Gaviano M., Lera D., Kvasov D.E., Sergeyev Y.D. Software for Generation of Classes of Test Functions with Known Local and Global Minima for Global Optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29, No. 4. P. 469–480. DOI: 10.1145/962437.962444.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ С КАЛИБРОВАННОЙ ОЦЕНКОЙ ДОСТОВЕРНОСТИ РЕШЕНИЙ

Д.А. Голичников

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассматривается задача автоматического контроля качества сварных соединений по изображениям поверхности шва от двух камер разного класса и по профилям валика от лазерного триангуляционного датчика. Разметку задают кодами ГОСТ Р ИСО 6520-1 с измеренными параметрами дефектов, уровень качества по ГОСТ ISO 5817 вычисляет нормативное отображение, а система выдаёт множество допустимых уровней с заданной вероятностью покрытия, которую обеспечивает конформное прогнозирование. На корпусе RIAWELC эта гарантия удерживается, пока данные обменяемы, и разрушается при сдвиге тракта съёмки; размер адаптивного конформного множества при этом растёт с 1,00 до 2,10 и обнаруживает, что модель вышла за область применимости.

Ключевые слова: контроль качества сварных соединений, машинное зрение, лазерная профилометрия, конформное прогнозирование, уровни качества, кросс-сенсорный перенос, малые выборки.

1. Введение

Роботизация дуговой сварки сократила время, которое занимает шов, но приёмочный визуальный контроль так и остался за человеком. Из-за этого проседают и производительность, и воспроизводимость решений. Автоматизации при этом ничто не мешает: ГОСТ Р ИСО 17637-2024 прямо допускает телевизионные камеры как средство визуального контроля [1]. Отечественные работы по распознаванию дефектов на снимках поверхности шва опираются на геометрические признаки [4], зарубежные используют сверточные нейронные сети и на кураторских корпусах доводят точность классификации до 0,99 [6].

Высокая точность на фиксированном корпусе ещё не делает классификатор средством контроля. При переносе на другие условия съёмки или на другую камеру она заметно падает, а заявленные показатели редко сопровождают протоколом переноса. Сеть выдаёт метки классов, тогда как по ГОСТ ISO 5817 приёмочное решение формулируют в уровнях качества B, C и D через измеренные размеры дефектов, отнесённые к номинальным размерам соединения [3]. Уверенность современных глубоких сетей систематически расходится с тем, как часто они на самом деле ошибаются [11], поэтому высокий балл сам по себе не гарантирует верного решения. К этому добавляется дефицит данных: на отлаженном производстве дефекты редки, и учиться приходится на малых несбалансированных выборках [5]. Доклад устраняет эти разрывы на уровне постановки задачи, иллюстрирует её главное требование вычислительным экспериментом и описывает установку, на которой постановка воплощается.

2. Постановка задачи

Контролю подлежит элемент сварного соединения, то есть участок шва заданной контрольной длины вместе с прилегающей зоной. Сведения о нём доставляют три канала. Два оптических: от основной камеры высокого разрешения приходят изображения поверхности, составляющие пространство X_1, а камера массового класса набирает пространство X_2. Третий канал геометрический: последовательности поперечных профилей валика, которые записывает лазерный триангуляционный датчик, образуют пространство $X_п$. Наблюдение элемента записывают точкой $x = (x_1, x_2, x_п)$ произведения $X = X_1 \times X_2 \times X_п$. В эксплуатации редко работают все три канала сразу, и постановку дополняет вектор доступности $\mu \in \{0, 1\}^3$. Полный набор, $\mu = (1,$

1, 1), участвует в построении обучающей выборки, а в рабочем режиме достаточно одной недорогой камеры, $\mu = (0, 1, 0)$. Благодаря такому вектору кросс-сенсорный перенос входит в общую схему и не требует отдельной постановки.

Разметку элемента задают не меткой класса, а конечным множеством описаний дефектов $Y = \{(c_k, g_k, \vartheta_k)\}$, $k = 1, \ldots, K$. Здесь c_k кодирует дефект по алфавиту ГОСТ Р ИСО 6520-1 [2], g_k задаёт его геометрию в координатах канала, а ϑ_k собирает измеренные параметры (высоту, длину, диаметр, глубину подреза и другие величины), состав которых зависит от кода. Бездефектный элемент получает $Y = \emptyset$. Параметрическая форма разметки продиктована самим стандартом: для каждого кода c и уровня $l \in \{\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$ ГОСТ ISO 5817 задаёт предикат допустимости $\varphi_{c,l}(\vartheta; \Theta)$, а его пределы выражены через вектор номинальных параметров соединения Θ, куда входят толщина, ширина шва, катет и тип соединения [3]. Уровень качества элемента вычисляет отображение

$$q(Y, \Theta) = \max\{l \in \{\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\} : \varphi_{c_k, l}(\vartheta_k; \Theta) = 1, k = 1, \ldots, K\} \tag{1}$$

где уровни упорядочены как D < C < B; если нарушены уже предикаты уровня D, элемент относят к браку. Отображение q закреплено стандартом и обучению не подлежит. Поэтому статистическая часть задачи сводится к оценке разметки по наблюдению и отделяется от нормативной.

Пусть $S = \{(x_i, Y_i)\}$, $i = 1, \ldots, n$, обозначает обучающую выборку малого объёма с резким перевесом бездефектных элементов. На ней требуется решить три задачи обработки информации. Первая: по наблюдению x оценить разметку $\hat{Y}(x)$, то есть обнаружить, локализовать и измерить дефекты. Качество оценки показывают сразу два показателя: метрики обнаружения, устойчивые к несбалансированности, и погрешность измерения параметров ϑ, через которые проходит приёмочное решение (1). Вторая задача: построить множественнозначное отображение $\Gamma_\alpha: X \to 2^L$, $L = \{\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \text{брак}\}$, с гарантией покрытия

$$P\{q(Y, \Theta) \in \Gamma_\alpha(x)\} \geq 1 - \alpha \tag{2}$$

которая при заданном уровне α выполняется без предположений о виде распределения. Такую гарантию обеспечивает конформное прогнозирование, причём от данных оно требует только одного: обменяемости калибровочной выборки с эксплуатационным потоком [9]. Одноэлементное множество $\Gamma_\alpha(x)$ отвечает уверенному решению; если же в множестве несколько уровней, значит, информации не хватило, и элемент уходит на подтверждающий контроль физическими методами. Пропуск недопустимого дефекта и ложная отбраковка неравноценны, поэтому отображение ограничивают дополнительно: вероятность того, что для бракованного элемента уровень «брак» не вошёл в $\Gamma_\alpha(x)$, не превышает β; при этом ограничении минимизируют долю ложной отбраковки.

Третья задача касается переноса. Модель обучают при $\mu = (1, 1, 1)$, и профилометр здесь служит учителем: его измерения с известной погрешностью задают эталонные значения геометрических параметров ϑ, которые по одному снимку восстановить нельзя. Работать модель должна при $\mu = (0, 1, 0)$, и гарантия (2) должна при этом сохраниться. Смена канала нарушает обменяемость, поэтому гарантию восстанавливают перекалибровкой на выборке целевого канала; объём этой выборки должен быть кратно меньше исходной разметки.

От известных постановок предложенную отличают три черты: выход как множество уровней качества с гарантией покрытия вместо бинарной метки, параметрическая разметка в нормативной таксономии и учёт частичной доступности каналов через вектор μ, при котором перенос с дорогого сенсора на недорогой входит в постановку, а не остаётся отдельной задачей.

3. Вычислительный эксперимент

Свойства гарантии (2) проверяли на открытом корпусе радиографических изображений RIAWELC [7]. Он содержит 24 407 фрагментов размером 224×224 четырёх классов, с авторским разбиением на обучающую, валидационную и тестовую части. Измеренных параметров дефектов в корпусе нет, поэтому конформную надстройку строили над классами, а не над уровнями качества, и эксперимент иллюстрирует поведение гарантии, а не решает задачу целиком. Классификатор ResNet50 с весами ImageNet дообучали в два этапа: две эпохи выходного

слоя и четыре эпохи всей сети. На тестовой части он показал точность 0,9975 при macro-F1 0,9974, что воспроизводит опубликованный уровень для той же пары модели и корпуса [6]. Смену тракта съёмки, в том числе переход на камеру другого класса, имитировали тремя уровнями деградации изображений: сжимали контраст, искажали гамму, добавляли гауссов шум и расфокусировку. Конформную надстройку с $\alpha = 0{,}1$ калибровали на 2000 примерах валидационной части, с двумя функциями несоответствия: пороговой по вероятности истинного класса (LAC) и адаптивной по накопленной вероятности (APS) [10], после температурного масштабирования логитов [11]. Результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Точность классификации и характеристики конформных множеств при сдвиге тракта съёмки

Уровень сдвига	Точность	LAC: покрытие	LAC: размер	APS: покрытие	APS: размер
нет	0,9975	0,923	1,00	0,999	1,00
слабый	0,9599	0,600	1,00	0,980	1,10
средний	0,8547	0,451	1,00	0,936	1,38
сильный	0,6222	0,354	1,00	0,853	2,10

Без сдвига оба варианта дают покрытие не ниже целевого 0,90: пока обменяемость соблюдена, гарантия (2) работает. Под сдвигом пороговый вариант отказывает молча. Покрытие LAC падает до 0,354, а множества по-прежнему одноэлементные, потому что сеть, которую довели до высокой точности, продолжает ошибаться с высокой уверенностью. Адаптивный вариант сдаёт позиции медленнее и переводит дефицит информации в наблюдаемую величину: средний размер множества растёт с 1,00 до 2,10. Этот размер и есть индикатор того, что модель вышла за область, в которой её можно применять. При сильном сдвиге, впрочем, и APS сдаётся: покрытие падает до 0,853. Теория это объясняет: нарушенную обменяемость не компенсирует выбор функции несоответствия, и при смене тракта съёмки конформную надстройку приходится калибровать заново.

Реальный межкорпусный сдвиг оказался жёстче любого имитированного. Ту же модель без дообучения применили к 11 433 фрагментам серии Welds корпуса GDXray [8] с бинарной разметкой из открытого кода-компаньона [12]; 4528 из них бездефектны. Класс «без дефекта» модель не предсказала ни разу: сбалансированная точность составила 0,500, что в производстве означает стопроцентную ложную отбраковку. Покрытие конформных множеств с порогами исходного корпуса упало примерно до 0,60 при целевом 0,90. Оба результата объясняют, зачем в третьей задаче нужна перекалибровка на целевом канале.

4. Экспериментальная установка

Постановка воплощается на роботизированной сварочной ячейке НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Манипулятор Yaskawa AR1440 работает со сварочным источником AOTAI ATIG400P(HW), который реализует аргонодуговую сварку неплавящимся электродом с горячей присадочной проволокой. Для контроля ячейку оснащают блоком датчиков на фланце манипулятора. В блок входят лазерный триангуляционный профилометр LS2D производства НПП «Призма», цветная камера 5 Мп и камера 1,6 Мп массового класса, а также кольцевой и линейные осветители, которые работают в режиме строба. Снимают в отдельном контрольном проходе, когда дуга уже погашена, а оптика защищена от её излучения. Камеры и профилометр запускают синхронно, поэтому кадры и профили ложатся на общую шкалу времени и на координату вдоль шва. Погрешность профилометра контролируют по ступенчатой мере, и его измерения дают эталонную разметку геометрических параметров, по которой учатся оценки с изображений. Две камеры разного класса дают возможность проверить, сохраняется ли гарантия (2) при переносе модели на недорогой сенсор.

5. Заключение

Задача автоматического контроля качества сварных соединений сформулирована как задача обработки разнородной измерительной информации, которая приходит от камер и лазерного

профилометра. На её основе лежат три опоры: параметрическая разметка в кодах ГОСТ Р ИСО 6520-1, нормативное отображение в уровни качества ГОСТ ISO 5817 и требование гарантии покрытия для множества допустимых уровней. Вычислительный эксперимент показал, что гарантия удерживается, пока обменяемость соблюдена, и разрушается при сдвиге тракта съёмки. Точечная оценка уверенности этого не улавливает, а размер адаптивного конформного множества улавливает. Дальше остаётся собрать на описанной установке корпус с синхронной регистрацией изображений двух камер и профилей, разметить его по кодам стандарта, перейти от классов дефектов к уровням качества и решить задачу переноса на недорогую камеру.

Литература

1. ГОСТ Р ИСО 17637-2024. Неразрушающий контроль сварных швов. Визуальный контроль соединений, выполненных сваркой плавлением. М.: Российский институт стандартизации, 2024.
2. ГОСТ Р ИСО 6520-1-2012. Сварка и родственные процессы. Классификация дефектов геометрии и сплошности в металлических материалах. Часть 1. Сварка плавлением. М.: Стандартинформ, 2014.
3. ГОСТ ISO 5817-2025. Сварка. Сварные соединения из стали, никеля, титана и их сплавов, полученные сваркой плавлением (исключая лучевые способы сварки). Уровни качества. М.: Российский институт стандартизации, 2025.
4. Муравьев С.В., Погадаева Е.Ю. Автоматизированное распознавание дефектов сварных соединений при визуальном контроле с использованием геометрических признаков // Дефектоскопия. 2020. № 3. С. 49–57. DOI: 10.31857/S0130308220030069.
5. Парасич А.В., Парасич В.А., Парасич И.В. Формирование обучающей выборки в задачах машинного обучения. Обзор // Информационно-управляющие системы. 2021. № 4. С. 61–70. DOI: 10.31799/1684-8853-2021-4-61-70.
6. Palma-Ramírez D., Ross-Veitía B.D., Font-Ariosa P., et al. Deep convolutional neural network for weld defect classification in radiographic images // Heliyon. 2024. Vol. 10, No. 9. Art. e30590. DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e30590.
7. Totino B., Spagnolo F., Perri S. RIAWELC: A Novel Dataset of Radiographic Images for Automatic Weld Defects Classification // International Journal of Electrical and Computer Engineering Research. 2023. Vol. 3, No. 1. P. 13–17. DOI: 10.53375/ijecer.2023.320.
8. Mery D., Riffo V., Zscherpel U., et al. GDXray: The Database of X-ray Images for Nondestructive Testing // Journal of Nondestructive Evaluation. 2015. Vol. 34, No. 4. Art. 42. DOI: 10.1007/s10921-015-0315-7.
9. Lei J., G'Sell M., Rinaldo A., et al. Distribution-Free Predictive Inference for Regression // Journal of the American Statistical Association. 2018. Vol. 113, No. 523. P. 1094–1111. DOI: 10.1080/01621459.2017.1307116.
10. Romano Y., Sesia M., Candès E.J. Classification with Valid and Adaptive Coverage // Advances in Neural Information Processing Systems 33 (NeurIPS 2020). 2020. P. 3581–3591.
11. Guo C., Pleiss G., Sun Y., Weinberger K.Q. On Calibration of Modern Neural Networks // Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning (ICML 2017). PMLR, 2017. Vol. 70. P. 1321–1330.
12. pyxvis: код-компаньон книги Mery D. «Computer Vision for X-Ray Testing». URL: https://github.com/computervision-xray-testing/pyxvis (дата обращения: 13.08.2026).

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФУЗИИ В ЗАДАЧАХ С СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ[1*]

А.В. Грезина, В.С. Метрикин, А.Г. Панасенко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В настоящей работе впервые рассматриваются новые нелинейные математические модели, представляющие собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения примеси в бесконечном однородном твердом теле, в котором находится источник примеси малых размеров, обладающий сферической симметрией. Показано, что рассматриваемые в работе нелинейные модели предсказывают конечную скорость распространения примеси в твердом теле и достаточно адекватно определяют динамику распространения примеси в твердом теле. Предложены методики нахождения начальных условий для решения и критерии достоверности найденных решений.

Ключевые слова: нелинейная теория диффузии, правило размерности, примесь в твердом теле, уравнения в частных производных, математическая модель в обыкновенных дифференциальных уравнениях, численное моделирование.

1. Введение

Известно [1-10], что используемые в современной промышленности материалы являются многокомпонентными. В этой связи возникают множество актуальных задач, связанных с проблемой изучения динамики распределения в основном материале желательной или нежелательной примеси и как ее концентрация меняется с течением времени.

К работам, посвященным диффузии в твердых телах, охватывающим широкую область применения относятся классические труды [1,2]. Более специализированные исследования представлены в работах [3-21]. Так, например, в работе [3] изучены упруго диффузионные эффекты в материалах, а в работах [4,8] изучены зависимости процесса диффузии от высоких температур. В этом случае контактирующие материалы могут полностью растворяться друг в друге, образуя зоны с непрерывным рядом твердых растворов. Такие явления наблюдаются, например, при цементации изделий из углеродистых сталей [7-12]. Скорости диффузии в объеме и по границам зерен существенно различаются. Это приводит к изменению по времени структуры материалов и проявляется в таких явлениях, как ползучесть [9], спекание [10], рекристаллизация [11,12].

При понижении температуры диффузия замедляется, но ускоренная диффузия по границам в тонких металлических пленках приводит к их деградации и функциональным изменениям элементов микроэлектроники [13,14]. При этом проявляется эффект диффузии по границам зерен в материалах с ультразернистой структурой [15,16]. При изучении диффузии в однородных средах с простой геометрией можно ограничиться аналитическими методами [22], а для сложной геометрии приходиться привлекать численно-аналитические методы [23].

Основой этих методов является закон Фика [24-25] и предположение, что коэффициент диффузии является постоянной, не зависящей от концентрации примеси величиной. Это приводит к удобным для описания диффузии линейным дифференциальным уравнениям. Однако решения этих уравнений предсказывают бесконечную скорость диффузии, что противоречит реальным процессам. Чтобы снять это противоречие в работах [26-27] была предложена и обоснована нелинейная модель диффузии и решена одномерная задача для полупространства с условием, что на границе – поддерживается постоянное значение концентрации примеси.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания по технологическому запросу (проект № FSWR-2026-0019).

В работе [28] решались две нелинейные задачи для полупространства, но с измененными условиями на границе, а именно, что имеется мгновенный «точечный» источник примеси и источник с постоянной плотностью потока примеси.

В данной работе основное внимание уделяется развитию нелинейной теории диффузии для бесконечной однородной среды с центральной симметрией для двух случаев:

1.В начале координат помещается мгновенный «точечный» источник примеси.

2.В начале координат находится источник примеси постоянной мощности.

2. Математическая модель

Предположим, что источником примеси является малый объект, находящийся в однородной среде с линейными размерами, значительно превышающими расстояния, на которые перемещаются части примеси от его источника за время наблюдения. В математической модели для таких ситуаций используются предположения, что точечный источник находится в начале координат, а коэффициент диффузии является скалярной величиной (константой). Кроме того, как известно, основой нелинейной теории диффузии является утверждение, что плотность потока примеси зависит не только от градиента концентрации C, но и от самой концентрации, а именно [26]:

$$\vec{j} = -\beta C grad C, \tag{1}$$

где β – коэффициент нелинейной диффузии.

Закон сохранения числа частиц примеси в среде в сферической системе координат с учетом (1) приводит, как известно [22], к нелинейному уравнению диффузии вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \beta \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 C \frac{\partial C}{\partial r}\right) = 0 \text{ для } r, t > 0. \tag{2}$$

2.1. Модель с мгновенным «точечным» источником

Предположим, что в центре системы ($r = 0$) при $t = 0$ появляется M частиц примеси.

Ищем распределение примеси в пространстве при $t > 0$. Вводя новые безразмерные

$$\xi = \frac{r}{(\beta t)^{\frac{1}{5}}}, \tag{3}$$

$$\varphi(\eta) = (C(r,t)(bt)^{\frac{3}{5}})/M, \tag{4}$$

перепишем уравнение (2) при $r > 0,\ t > 0$ в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$3\eta\varphi + \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} + 10\varphi \frac{d\varphi}{d\eta} + 5\eta\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 + 5\eta\varphi \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = 0, \eta = \frac{\xi}{\sqrt{M}}\ . \tag{5}$$

Граничные условия для решения уравнения (5) получим, используя (3), (4) и уравнение (5):

$$\varphi(0) = const, \frac{d\varphi(0)}{d\eta} = 0. \tag{6}$$

Численное решение дифференциального уравнения (5) с граничными условиями (6) представлено на рисунке 1. Здесь $\varphi(0) = 0{,}1$.

На рис. 1 по вертикали приведены значения функции $\varphi(\eta)$ (красным цветом), ее производная $\frac{d\varphi}{d\eta}$ (синим цветом) и значение интеграла $J = \int_0^\eta \varphi(\eta)\,\eta^2 d\eta$ (зеленым цветом), а по горизонтали – значение безразмерной координаты η в теле. Из анализа формы графика $\varphi(\eta)$ на рисунке 1 можно предположить, что кривую $\varphi(\eta)$ возможно аппроксимировать в виде параболы $\varphi(\eta) = a + b\eta^2$, где a и b постоянные. Подставляя $\varphi(\eta)$ в (5), получим, что оно является одним из частных решений уравнения (5) при $b = -0{,}1$ и при произвольном "a".

Константу "a" можно найти из закона сохранения числа частиц в образце:

$$M = \int_0^\infty C(r,t)\,4\pi r^2 dr = 4\pi M^{5/2} \int_0^{\eta_m} \varphi(\eta)\,\eta^2 d\eta, \tag{7}$$

где η_m находится из условия $\varphi(\eta_m) = 0$. Откуда получаем, что

$$\eta_m = \sqrt{10a}\,. \tag{8}$$

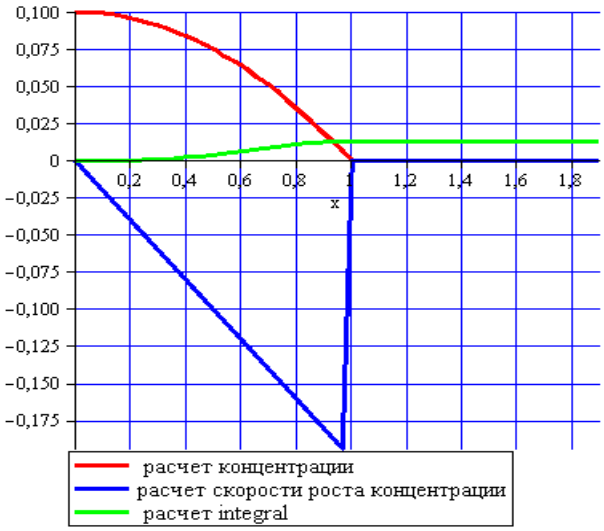


Рис.1. Распределение примеси в модели с мгновенным «точечным» источником

Для $\varphi(0) = a = 0{,}1$, $\eta_m = 1$. Интеграл J от координаты η при $\eta > \eta_m$ не должен изменяться, что и подтверждается рисунком 1.

Используя (7),(8) и вид интеграла J, находим

$$a = \frac{1}{10}\left(\frac{150}{8\pi}\right)^{2/5} \cdot \frac{1}{M^{\frac{3}{5}}}, \tag{9}$$

Для расчета распределения концентрации примеси в пространстве имеем

$$C(r,t) = \frac{a \cdot M}{(\beta t)^{\frac{3}{5}}} - 0{,}1 \cdot \frac{r^{\,2}}{\beta t}, \tag{10}$$

а максимальное расстояние r_m, на которое распространяется примесь от источника за время t, определяется формулой

$$r_m = \sqrt{10aM}(\beta t)^{1/5}. \tag{11}$$

2.2. Модель с «точечным» источником постоянной мощности

Предполагается, что в начале координат находится источник примеси $M(t) = \omega t$, где ω – число возникающих частиц примеси в единицу времени.

Вводя безразмерную переменную

$$\xi = r/(\beta \omega t^2)^{\frac{1}{5}}, \tag{12}$$

и заменяя $C(r,t)$ в уравнении (2) через новую функцию $f(\xi)$

$$C(r,t) = \sqrt{\frac{\omega}{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot f(\xi), \tag{13}$$

получим при $t > 0$, $\xi > 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\xi)$ в следующем виде

$$f\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + \frac{2}{5}\xi^{\frac{3}{2}}\frac{df}{d\xi} = 0. \tag{14}$$

Начальное условие $f(0)$ для уравнения (14) можно вычислить, если учтем, что поток W(r) частиц через сферу радиуса r определяется следующим образом

$$W(r) = j(r)4\pi r^2 \tag{15}$$

и по условиям задачи принимает значение $W(0) = \omega$.

После подстановки (1) и (13) в (15) и предельного перехода при $r \to 0$, будем иметь

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{16}$$

Начальное значение производной $f'(0)$ подбирается так, чтобы выполнялся закон сохранения числа частиц:

$$\omega t = 4\pi \int_0^\infty C(r,t)\, r^2 dr, \tag{17}$$

которое приводится к условию

$$\int_0^{\infty} f(\xi)\,\xi^{3/2} d\xi = \frac{1}{4\pi}. \qquad (18)$$

Результаты численного решения уравнения (16) представлены на рисунке 2. На рисунке 2 по горизонтали отложены значения ξ, а по вертикали – f(ξ) (красным цветом), $\frac{df}{d\xi}$ (синим цветом) и интеграл $\int_0^{\xi} f(\xi)\,\xi^{3/2} d\xi$ (зеленым цветом).

На рисунке 2 по горизонтали отложены значения ξ, а по вертикали – f(ξ) (красным цветом), $\frac{df}{d\xi}$ (синим цветом) и интеграл $\int_0^{\xi} f(\xi)\,\xi^{3/2} d\xi$ (зеленым цветом).

Из рисунка 2 видно, что выбранное значение $f'(0) = -0{,}225$ приводит к выполнению условия (18), поэтому f(ξ) является графическим решением уравнения (14).

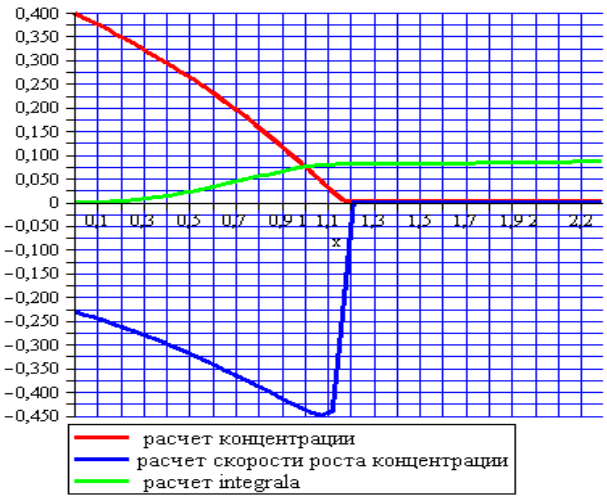


Рис.2. Распределение примеси в модели с «точечным» источником постоянной мощности

3. Заключение

1. Разработаны и исследованы новые нелинейные математические модели, представляющие собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения примеси в бесконечном однородном твердом теле, в котором находится источник примеси малых размеров, обладающий сферической симметрией.

2. Предложена новая методика, основанная на правиле размерности, отыскания решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс распространения примеси в твердом теле.

3. Полученные численно-аналитические решения дифференциальных уравнений в частных производных позволили впервые определить в произвольный момент времени концентрационный профиль при конечной скорости распространения примеси.

Литература

1. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. Пер. с англ. / Г. Готтштайн. – Москва: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2011. – 400 с.
2. Мерер Х. Диффузия в твердых телах. Пер. с англ. / Х. Мерер. – Москва: Интеллект, 2011. – 536 с.
3. Земсков А.В., Тарпаковский Д.В. Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды. Проблемы прочности и пластичности. 2018.Т80. №1.
4. Теория и технология азотирования / Ю. М. Лахтин, Я. Д. Коган, Г.И. Шпис, З. Бемер. – Москва: Металлургия, 1991. – 320 с.
5. Лахтин Ю.М. Химико-термическая обработка металлов / Ю.М. Лахтин, Б.Н. Арзамасов. – Москва: Металлургия, 1985. – 256 с.

6. Процессы взаимной диффузии в сплавах / И.Б. Боровский, К.П. Гуров, И.Д. Марчукова, Ю. Э. Угасте. – Москва: Наука, 1973. – 360 с.
7. Гуров К.П. Взаимная диффузия в многофазных металлических системах: учебное пособие / К.П. Гуров, Б.А. Карташкин, Ю.Э. Угасте. – Москва: Наука, 1981. – 350 с.
8. Попов А. А. Теоретические основы химико-термической обработки стали / А. А. Попов. – Москва: Металлургиздат, 1962. – 120 с.
9. Cobble R. // J. Appl. Phys.1963. V.34. P.1679.
10. Гегузин Я.Е. Физика спекания. – М.: Наука.1976.
11. Горелик С.С. Рекристаллизация металлов и сплавов. – М.: Металлургия. 1978.
12. Бокштейн С.З., Гинзбург С.С., Кишкин С.Т., Разумовский И.М., Строганов Б.Г. Авторадиография поверхностей раздела и структурная стабильность сплавов. – М.: Металлургия.1987. – 272с.
13. Поут Дж., Ту К., Мейер Дж. Тонкие плёнки. Взаимная диффузия и реакции; Пер. с англ. – М.; Мир.1982. – 338с.
14. Glickman E.E., Nathan M.//J.Appl.Phys.1999. V. 85. P. 3185.
15. Gleiter H.//Progress Mater. Sci. 1989. V. 33(4). P. 223.
16. Зернограничная диффузия и свойства наноструктурных материалов. /Под ред. Ю.Р. Колобова, Р.З. Валиева. - Новосибирск; Наука. 2001. – 232с.
17. Болтакс Б.И. Диффузия в полупроводниках. М. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1961. – 462 с.
18. Ваксман Ю.Ф., Ницук Ю.А., Яцун В.В., Насибов А.С., Шапкин П.В. Оптическое поглощение и диффузия железа в монокристаллах ZnSe // Физика и техника полупроводников. 2010. Т.44. вып. 4. С. 463-466.
19. Umit Demirbas, Alphan Sennaroglu. Mehmet Somer. Synthesis and characterization of diffusion-doped Cr2+: ZnSe and Fe2+: ZnSe // Optical Materials. 2006. V28. P.231-240.
20. Ильичев Н.Н., Шапкин П.В., Гулямова Э.С., Кулевский Л.А., Насибов А.С. Определение коэффициента диффузии Fe2+ в монокристаллическом ZnSe // Неорганические материалы. 2010. Т. 46. № 2. С.149-153.
21. Русаков Г.М., Лобанов М.Л., Ларионова К.В. Расчёт коэффициентов примесной диффузии методом разложения концентрационного профиля в ряд Фурье//Физика металлов и металловедение. 2001. Т. 91. С.14-16.
22. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. «Наука». Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 724 с.
23. Игумнов Л.А., Грезина А.В., Метрикин В.С., Панасенко А.Г. Численно – аналитическое моделирование диффузионных процессов в ограниченных многокомпонентных твердых телах.//Проблемы прочности и пластичности. Издательство Нижегородского университета. Т. 80, № 3, 2018. С. 336-348.
24. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.П. Сборник задач по математической физике. – четвертое издание, исправленное – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 688 с.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
26. Грезина А.В., Метрикин В.С., Панасенко А.Г. Нелинейные эффекты в теории диффузии примеси в твердом теле // Дифференциальные уравнения и процессы управления – 2022, N. 4. С.115-125.
27. Aleksandra V. Grezina, Vladimir S. Metrikin, and Adolf G. Panasenko One-Dimensional Boundary Value Problems of Nonlinear Diffusion Theory // Communications in Computer and Information Science. Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies 24rd International Conference 2363, MMST 2024 Nizhny Novgorod, Russia, November 18–21, 2024, Revised Selected Papers. 2024. P. 173-184.
28. Грезина А.В., Метрикин В.С., Панасенко А.Г. Две краевые одномерные задачи нелинейной диффузии // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 4. 2024. С. 78-88.

РАЗРАБОТКА ПРОЦЕССОРНОГО ЯДРА НА АРХИТЕКТУРЕ RISC-V НА БАЗЕ ПЛИС

А.С. Гутянский, Е.А. Козинов

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается разработка собственного процессорного ядра на открытой архитектуре RISC-V с поддержкой наборов инструкций RV32I и M. Ядро реализовано на языке SystemVerilog и развернуто на ПЛИС Altera Cyclone V. Описаны пятиступенчатая конвейерная микроархитектура, подсистема памяти с арбитражем доступа и отладочный модуль на базе протокола UART. Проведено сравнение производительности с существующими открытыми RISC-V ядрами по тесту CoreMark. Результаты подтверждают корректность и работоспособность разработанного решения.

Ключевые слова: RISC-V, RV32IM, ПЛИС, конвейерная архитектура, SystemVerilog, CoreMark.

1. Введение

Развитие вычислительной техники неразрывно связано с совершенствованием архитектур процессоров и систем команд. В настоящее время в индустрии доминируют два основных подхода – RISC и CISC, наиболее известными представителями которых являются архитектуры ARM и x86. Обе архитектуры являются закрытыми и требуют приобретения лицензии, что ограничивает свободу проектирования и повышает порог входа в разработку собственных вычислительных систем.

Одной из наиболее актуальных открытых альтернатив является архитектура RISC-V [1], предоставляющая свободно доступную документацию, модульный набор расширений и сформировавшуюся экосистему открытых ядер. Разработке процессорных ядер на этой архитектуре посвящено значительное число исследований – от учебных проектов до промышленных решений, что подтверждает актуальность направления.

Целью настоящей работы является разработка собственного процессорного ядра, поддерживающего базовый набор инструкций RV32I и расширение целочисленного умножения и деления M, а также аппаратно-программного окружения на ПЛИС и GNU-тулчейна.

Разработка процессорных ядер на архитектуре RISC-V остаётся активно исследуемым направлением: в [2] предложено RV32I-ядро с предсказателем переходов на основе перцептрона, в [3] – компактный четырёхступенчатый процессор RV32IM для встраиваемых применений, в [4] – RV32I ядро с двухбитовым динамическим предсказателем переходов, а в [5, 6] – методы обнаружения конфликтов по данным и пересылки результатов (forwarding) как альтернатива останову конвейера, применяемому в настоящей работе. Выбор пятиступенчатого конвейера без предсказания переходов и пересылок обусловлен приоритетом простоты и предсказуемости поведения ядра на начальном этапе разработки; данные направления намечены как перспективные для дальнейшего развития.

Систематическому сравнению открытых RISC-V ядер по метрикам DMIPS/МГц и CoreMark/МГц посвящены работы [7, 8], охватывающие ядра прикладного класса (Rocket, BOOM, CVA6, SHAKTI) и каталог из более чем десяти учебных и микроконтроллерных ядер (PicoRV32, VexRiscv, Taiga, ORCA и др.). Они подтверждают методологическую корректность используемого в настоящей работе подхода к сравнению по метрике CoreMark/МГц.

Таким образом, разработанное в настоящей работе процессорное ядро развивается в русле сложившегося направления учебных и исследовательских реализаций RISC-V, отличаясь наличием собственной шины с Round-Robin-арбитражем, специализированного отладочного модуля на базе UART и программного окружения на базе GNU-тулчейна, при сохранении возможности прямого сопоставления с существующими открытыми ядрами по тесту CoreMark.

2. Разработка процессорного ядра

2.1. Общая архитектура ядра

Разработанное процессорное ядро ориентировано на открытую архитектуру RISC-V и поддерживает базовый набор инструкций RV32I, а также расширение M для целочисленного умножения и деления. Ядро реализовано на языке SystemVerilog и предназначено для развертывания на ПЛИС Altera Cyclone V. Микроархитектура построена по пятиступенчатой конвейерной схеме: выборка инструкции (IF), декодирование (ID), исполнение (EX), доступ к памяти (MEM) и запись результата (WB). Регистровый файл включает 31 регистр общего назначения и регистр x0, аппаратно привязанный к нулю. Поддерживается 38 инструкций базового набора RV32I; расширение сжатых инструкций C не реализовано, поэтому все инструкции должны быть выровнены по границе 4 байт. Общая структура ядра показана на рис. 1.

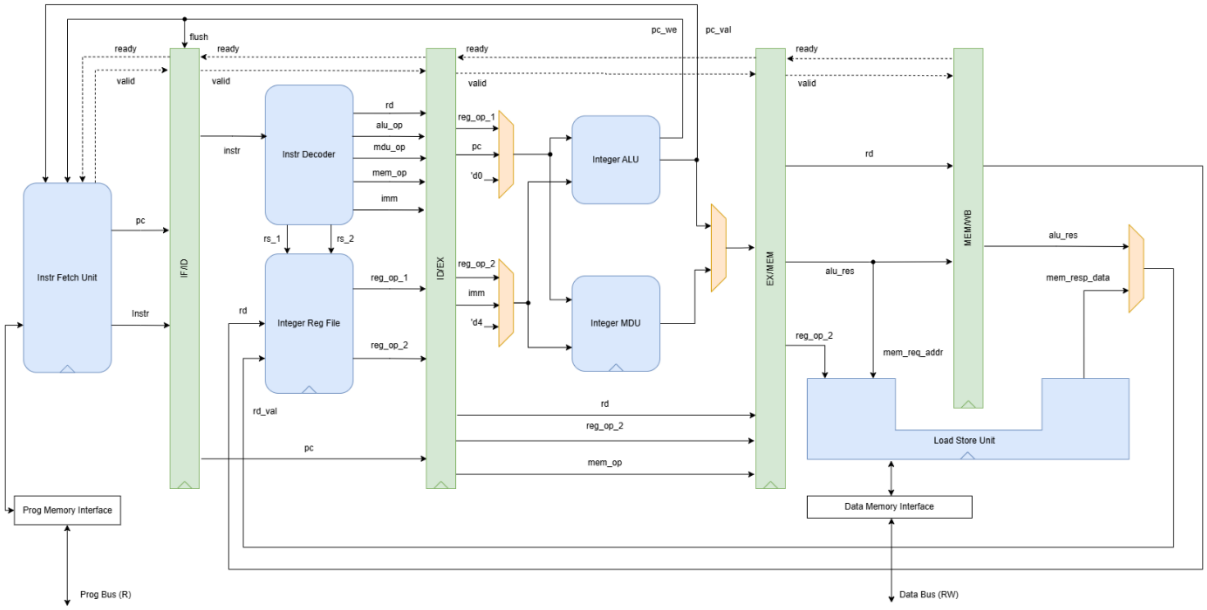


Рис. 1. Конвейерная микроархитектура

2.2. Организация конвейера и обработка инструкций

На стадии IF модуль Instr Fetch Unit выполняет выборку инструкции по адресу из регистра pc. Реализованный в нем конечный автомат обеспечивает совмещение выдачи уже полученной инструкции с инициализацией следующего запроса к памяти, что снижает простои, связанные с задержкой доступа к памяти. Кроме того, автомат обрабатывает запросы на переход, то есть на произвольное изменение pc.

На стадии ID модуль Instr Decoder формирует управляющие сигналы для исполнительных блоков и выделяет константу, закодированную в инструкции. Для разрешения зависимостей по данным используется механизм учета занятости регистров на основе подсчета количества ожидаемых записей.

На стадии EX формируется результат операции. Для арифметических и логических инструкций это значение, подлежащее записи в регистр; для инструкций доступа к памяти – адрес в памяти данных. На этой же стадии вычисляется результат перехода. Если адрес следующей инструкции отличается от адреса при линейном исполнении, стадии IF и ID сбрасываются. При взятом переходе штраф составляет три такта (два такта на IF и один на ID), после чего конвейер возобновляет работу с целевого адреса. Следствием такого решения является снижение производительности на циклах с коротким телом и большим числом итераций, где частота нелинейных переходов высока. Потенциальное улучшение связано с введением предсказания переходов.

На стадии MEM выполняется чтение или запись данных. Инструкции, не работающие с памятью, проходят эту стадию без изменения состояния. На стадии WB результат записывается в целевой регистр: это может быть значение, вычисленное на стадии EX, либо данные, прочитанные из памяти.

Модуль Load Store Unit размещен на границе стадий MEM и WB. Такое решение обусловлено тем, что операции с памятью занимают не менее двух тактов. Поскольку результат требуется только на стадии WB, обращение к памяти разносится на две стадии конвейера, что позволяет инициировать новый запрос к подсистеме памяти каждый такт.

2.3. Подсистема памяти, арбитраж и периферия

Ядро способно исполнять программы как из памяти программ, так и из памяти данных, а также читать данные из обоих областей. Доступ нескольких мастеров к памяти обеспечивается циклическим арбитражем запросов чтения/записи по принципу Round-Robin. Память программ, память данных и устройства MMIO отображены в единое адресное пространство. Совмещение выборки инструкций и загрузки данных из памяти программ используется при работе загрузчика, когда значения глобальных переменных копируются в память данных; иные сценарии одновременного доступа технически возможны, но в рамках работы не тестировались. Схема подключения памяти и периферии приведена на рис. 2.

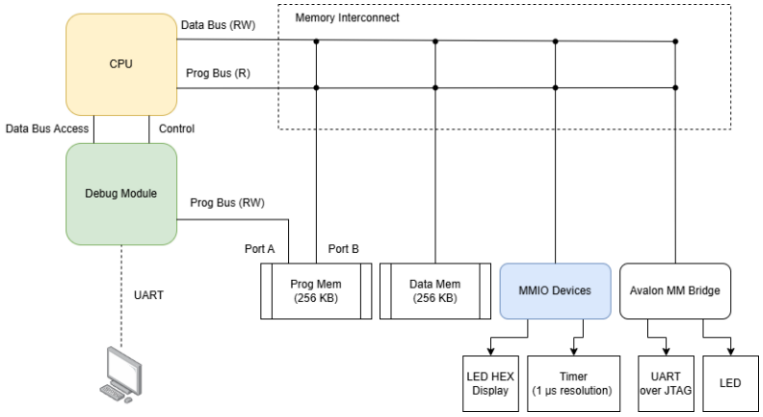


Рис. 2. Схема подключения памяти и периферии

Помимо памяти программ и данных, к ядру подключены периферийные устройства. Для отладки используется LED HEX Display. В адресное пространство отображается 16-разрядный регистр, чье содержимое регистра выводится на шестнадцатеричные индикаторы отладочной платы. На него может выводиться, например, статус выполнения программы или время ее работы. Для измерения времени применяется 32-разрядный счетчик Timer, инкрементируемый каждую микросекунду – это обеспечивает компромисс между точностью и периодом переполнения.

Отдельного упоминания заслуживает мост Avalon MM Bridge. Большинство компонентов Altera используют интерфейс Avalon MM, поэтому его подключение к разработанному ядру расширяет возможности системы, в частности позволит в будущем подключить внешнюю память большого объема. В текущей реализации интерфейс Avalon MM применяется для взаимодействия с компьютером через выделенный UART, что дает текстовый интерфейс для чтения результатов работы программ. Для проверки моста Avalon MM был добавлен модуль LED, управляющий светодиодами отладочной платы.

2.4. Отладочный модуль и протокол загрузки

Загрузка программ в память, чтение результатов и управление ядром осуществляются через отладочный модуль, взаимодействующий с ПК по протоколу UART (рис. 2). Поверх UART реализован пакетный протокол, позволяющий кодировать команды и данные при передаче в обоих направлениях. Структура пакетов приведена на рис. 3. Пакет-запрос со стороны ПК содер-

жит поля CMD, ID, LEN и DATA; ответ отладочной платы содержит поля STATUS, ID, LEN и DATA. Поле LEN задает длину передаваемых данных в байтах.

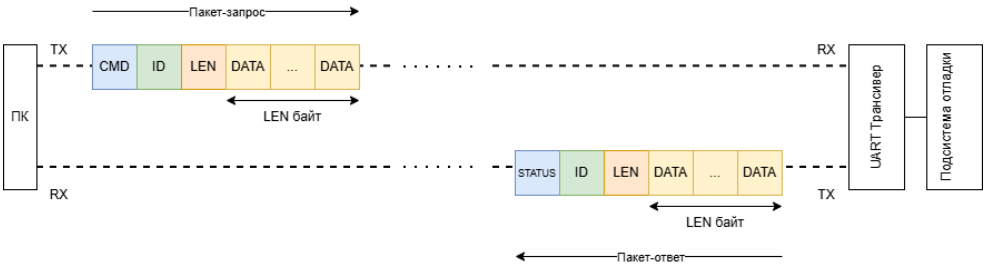


Рис. 3. Пакетный протокол отладки

Для унификации межмодульного взаимодействия в ядре использован протокол синхронизации Valid-Ready, описанный в спецификации AXI [9]. Его применение позволяет оформлять взаимодействие между модулями в виде отдельных транзакций, что упрощает разработку и тестирование.

2.5. Верификация и реализация на ПЛИС

Верификация модулей выполнялась в среде ModelSim. Типовая структура тестового окружения приведена на рис. 4. Генератор входных данных формирует последовательность воздействий, которая подается на тестируемый модуль и на модель поведения, реализующую ожидаемую логику. Выходные последовательности тестируемого модуля и эталонной модели помещаются в очереди и сравниваются модулем сравнения. Равенство последовательностей определяет успешность теста. Верификация включала краевые случаи и случайно сгенерированные входные данные.

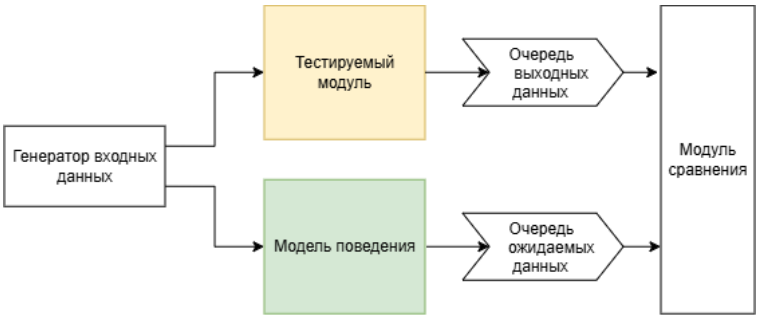


Рис. 4. Типовая структура модуля автоматического тестирования

После верификации ядро было развернуто на отладочной плате Terasic DE1-SoC (ПЛИС Altera Cyclone V). Для программирования ядра на языке Си использовался GNU-тулчейн для RISC-V с собственным загрузчиком и linker-скриптом.

3. Результаты экспериментов

Оценка производительности проводилась путём запуска теста CoreMark [10], адаптированного из официального репозитория проекта. Сборка выполнялась с использованием GCC с уровнем оптимизации -O3. Результат запуска составил 1,66 CoreMark/МГц. В таблице 1 приведено сравнение с показателями существующих открытых RISC-V ядер.

Дополнительно проведена оценка пропускной способности памяти на задаче копирования массива: применение функции memcpy с режимом оптимизации -O3 позволило достичь 43,5 Мбайт/с при теоретическом пределе используемой микроархитектуры 100 Мбайт/с. Низкая пропускная способность обусловлена большим количеством условных переходов и конфликтов по данным.

Все тесты выполнялись на частоте 50 МГц и при фиксированной задержке памяти 1 такт. Полученные результаты соответствуют средне-низкому уровню производительности по срав-

нению с оптимизированными промышленными ядрами, что объясняется отсутствием в текущей реализации механизмов пересылки данных и предсказания переходов.

Таблица 1. Сравнение результатов теста CoreMark

Ядро	CoreMark/МГц
PicoRV [8]	0,56
MIRISCV (МИЭТ) [11]	1,41
Разработанное ядро	**1,66**
Taiga [8]	2,53
SCR1 (Syntacore) [12]	3,05

4. Выводы

В результате выполнения работы разработано процессорное ядро, реализующее наборы инструкций RV32I и M архитектуры RISC-V, а также аппаратно-программное окружение: подсистема памяти с арбитражем доступа, отладочный модуль с поддержкой UART и инструментарий для сборки и запуска программ на языке Си. Функциональная корректность ядра подтверждена автоматизированными тестами и успешным запуском CoreMark. Полученный результат в 1,66 CoreMark/МГц сопоставим с показателями существующих учебных и микроконтроллерных RISC-V ядер, что подтверждает состоятельность выбранных архитектурных решений и определяет направления дальнейшей оптимизации: введение предсказания переходов, ускорения подсистемы памяти, введения пересылки.

Литература

1. RISC-V Unprivileged ISA Specification // RISC-V International. URL: https://docs.riscv.org/reference/home/index.html (дата обращения: 08.03.2026).
2. Mokhashi S., Patil S.S., Parakash S.S., et al. Design and FPGA Implementation of a RISC-V Processor Core with Low-Power Enhancements // Journal of VLSI Design and its Advancement. 2026. Vol. 9, No. 3. P. 1–9. DOI: 10.5281/zenodo.20771611.
3. Kırali K., Fidan C. B. Implementation of FPGA based 32-bit RISC-V processor // Engineering Science and Technology, an International Journal. – 2025. – Vol. 70. – P. 102139. DOI: 10.1016/j.jestch.2025.102139.
4. Kang H. W., Choi J. W. BASIC_RV32s: An Open-Source Microarchitectural Roadmap for RISC-V RV32I // 2025 22nd International SoC Design Conference (ISOCC). – IEEE, 2025. – P. 1-2. DOI: 10.48550/arXiv.2510.15887.
5. Qin Z. Design and hazard solving of five-stage pipeline RISC-V processor structure // Applied and Computational Engineering. 2024. Vol. 36. P. 198–203. DOI: 10.54254/2755-2721/36/20230446.
6. Rao S., Bhairannawar S. Optimized Pipelined RISC-V Processor with Data Hazard Detection for Verification of Ethernet Controller // International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications. 2026. DOI: 10.70917/ijcisim-2026-4546.
7. Dörflinger A. et al. A comparative survey of open-source application-class RISC-V processor implementations // Proceedings of the 18th ACM international conference on computing frontiers. – 2021. – P. 12-20. DOI: 10.1145/3457388.3458657.
8. Heinz C. et al. A catalog and in-hardware evaluation of open-source drop-in compatible RISC-V softcore processors // 2019 International Conference on ReConFigurable Computing and FPGAs (ReConFig). – IEEE, 2019. – P. 1-8. DOI: 10.1109/ReConFig48160.2019.8994796.
9. AMBA AXI and ACE Protocol Specification: AXI3, AXI4, and AXI4-Lite, ACE and ACE-Lite : ARM IHI 0022D // ARM Limited, 2011. 306 p. URL: https://developer.arm.com/documentation/ihi0022/d (дата обращения: 02.10.2026).
10. CoreMark // EEMBC. URL: http://www.coremark.org/ (дата обращения: 08.05.2026).
11. MIRISCV: Открытое RISC-V процессорное ядро для образовательных целей // MPSU. GitHub. URL: https://github.com/MPSU/MIRISCV (дата обращения: 19.05.2026).

12. SCR1: Open-source entry-level microcontroller core // Syntacore. URL: https://syntacore.com/products/scr1 (дата обращения: 25.05.2026).

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУБЕЗРГАНИЧНОЙ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О СЕЙСМИЧЕСКИХ ВИБРАЦИЯХ ЗАГЛУБЛЕННОГО СООРУЖЕНИЯ[1*]

Н.С. Дюкина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе демонстрируется метод анализа сейсмических вибраций заглубленных сооружений с учетом нелинейного взаимодействия с грунтовым основанием, основанный на применении в подобласти грунтового основания двух конечно-элементных техник: наложенных сеток для разделения падающих и отраженных волн на искусственной внутренней границе подобласти вблизи сооружения, а также разрежающихся сеток с изменяющейся вязкостью для гашения излученных волн на удалении от сооружения. Алгоритмы метода верифицированы на модельных задачах и внедрены в программный комплекс НИИМ ННГУ «Динамика-2».

Ключевые слова: конечно-элементное моделирование, полубезграничная область, разрежающиеся сетки, сейсмическое воздействие.

1. Введение

Прямое моделирование сейсмических вибраций заглубленных сооружений должно, с одной стороны, позволять подвести к сооружению неискаженную расчетную акселерограмму землетрясения, с другой стороны – отвести от сооружения излученные вторичные волны, исключая их влияние на дальнейший динамический расчет. Действительно, при задании сейсмического воздействия на границе расчетной области грунтового основания затрачивается дополнительное время на моделирование подхода сейсмических волн от границы к сооружению [1], возникают искажения в амплитудно-частотном составе сейсмограммы за счет накопления вычислительных ошибок и вязкости численных схем, а увеличение расчетной области для исключения краевых эффектов приводит к значительным вычислительным затратам.

В работе представлен метод анализа сейсмических вибраций заглубленных сооружений с учетом нелинейного взаимодействия сооружения с основанием, основанный на применении в подобласти грунтового основания двух конечно-элементных техник: наложенных конечно-элементных сеток для разделения падающих, прошедших и отраженных волн на искусственной внутренней границе подобласти вблизи сооружения, а также квазиравномерных сеток с изменяющейся вязкостью для гашения излученных волн на удалении от сооружения.

2. Численная методика

Конечно-элементную расчетную область грунтового основания представим комплексом трех подобластей, наслаивающихся друг на друга на один ряд конечных элементов. В первой подобласти проводится расчет падающих от источника сейсмического воздействия волн. Для модели сейсмического воздействия «под сооружением» падающие волны распространяются перпендикулярно дневной поверхности грунта, и эта задача может решаться в одномерной постановке. Во второй, примыкающей к сооружению, подобласти грунтовой среды рассматривается суперпозиция падающих, прошедших и отраженных волн, в третьей – расчет излученных от сооружения волн. При расчете излученных волн в третьей подобласти для сокращения вычислительных затрат могут быть использованы разрежающиеся по двум направлениям сетки с вязкостью. В результате метод позволяет приблизить границу, на которой задается кинемати-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части государственного задания (проект FSWR-2026-0019).

ческое воздействие, и одновременно реализовать беспрепятственный выход отраженных волн через эту границу для исключения влияния вторичных волн на результаты расчета вблизи сооружения.

2.1. Результаты тестирования метода наложенных сеток

Тестирование алгоритма наложенных сеток проведено в двумерной постановке на задаче о взаимодействии ударника с массивом сплошной среды, содержащим слой наложенных сеток. В результате контактного взаимодействия ударника (модуль объемного сжатия K=13,2 ГПа, модуль сдвига G=4.95 ГПа, плотность ρ=2200 кг/м^3, скорость в момент удара v_z=10 м/с) с упругой средой (K=13,2 ГПа, G=4.95 ГПа, ρ=1500 кг/м^3) генерируются радиально расходящиеся волны. Вид расчетной области и параметры пространственной дискретизации показаны на рис.1. Полученное в результате расчета поле скоростей (рис.2) не искажается областью сшивки наложенных сеток.

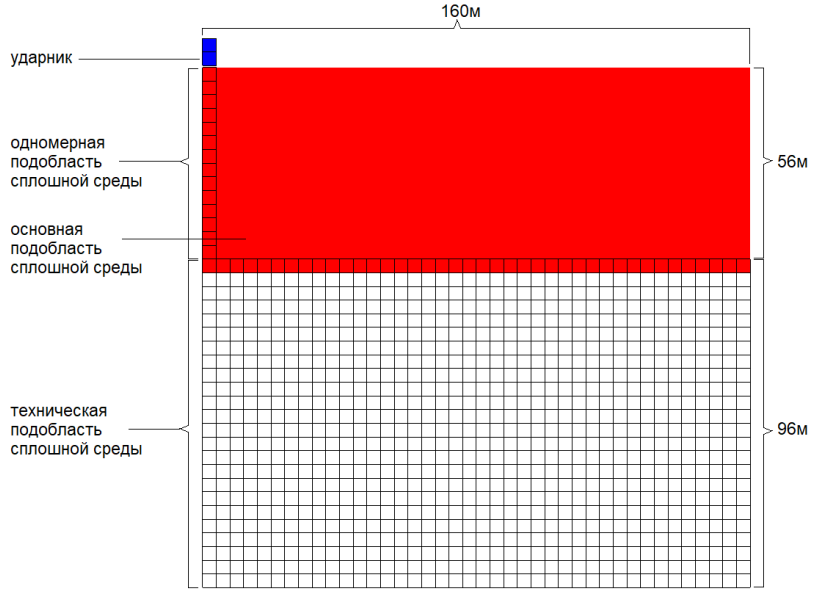
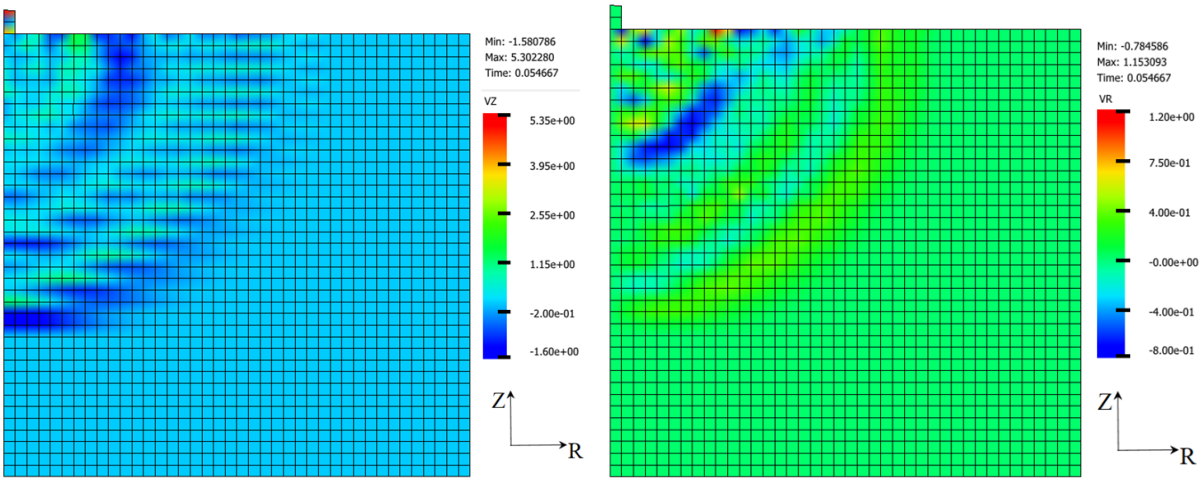


Рис. 1. Вид расчетной области и фрагменты дискретизации



(а) (б)

Рис. 2. Поле скоростей Vz (а), Vr (б)

2.2. Законы разрежения конечно-элементной сетки и изменения численной вязкости для моделирования излученных волн

В задачах сейсмики источник воздействия находится на некотором удалении от объекта, поэтому введение вязкости во всей расчетной области не позволит качественно описать распространение возмущающих импульсов в сплошной среде [1]. Следует использовать комбинированную конечно-элементную сетку: однородную с малой вязкостью вблизи рассматриваемого объекта и разрежающуюся с увеличивающейся с ростом размеров ячеек сетки вязкостью – в технической подобласти на удалении от объекта [2,3]. Линейная и квадратичная вязкость в области с разрежающейся сеткой позволит не только сгладить осцилляции, вызванные неоднородностями сетки, но и погасить излученные в эту область импульсы. В [3] для нескольких вариантов разрежения сетки, разрежающихся по квадратичному, кубическому, биквадратичному, гиперболическому законам, выполнено варьирование коэффициентов вязкости и проанализирована зависимость изменения временного шага с учетом возможного нелинейного изменения скоростей деформаций в расчетной области. Установлено, что задание для коэффициента линейной вязкости скорости роста меньшей, чем скорость роста пространственного шага, позволяет не допустить уменьшения временного шага при расчете на разрежающихся сетках с постепенно увеличивающейся численной вязкостью.

3. Заключение

Алгоритмы метода внедрены в программный комплекс НИИМ ННГУ «Динамика-2», изолированный анализ и тестирование алгоритмов показало возможность их применения для расчета полномасштабной задачи о взаимодействии сооружения с грунтом при сейсмическом воздействии. Представленный в работе метод конечно-элементного моделирования полубезграничной области в задаче о сейсмических вибрациях заглубленного сооружения позволяет задавать сейсмическое воздействие в непосредственной близости от сооружения, уменьшая физическое время счета и предотвращая численное искажение сейсмических импульсов, а также существенно снизить вычислительную трудоемкость дискретной конечно-элементной задачи с сохранением приемлемой точности.

Литература

1. Zhao J., Yu Y., Xu H. Multi-Directional Viscous Damping Absorbing Boundary in Numerical Simulation of Elastic Wave Dynamic Response // Applied Sciences. 2024. 14(5):2183 DOI: 10.3390/app14052183.
2. Баженов В.Г., Дюкина Н.С. Метод компьютерного моделирования сейсмических вибраций заглубленных сооружений с учетом взаимодействия с грунтовым основанием // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2025. Т. 521. № 1. С. 44-49. DOI: 10.7868/S3034508125020042.
3. Баженов В.Г., Дюкина Н.С., Линник Е.Ю., Калинина Ю.А. Численное моделирование сейсмических вибраций заглубленных сооружений в полубезграничных областях на квазиравномерных сетках // Проблемы прочности и пластичности. 2025. Т. 87. № 2. С. 181-191. DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-181-191.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОСЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ В «ЛОГОС ПРОЧНОСТЬ»[1*]

Н.С. Дюкина, Г.Е. Пономарев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе предложен алгоритм, реализованный на языке Python, осуществляющий автоматическую дискретизацию массива сплошной среды на независимые изотропные горизонтальные слои с группировкой конечных элементов по минимальной высоте или по интервалам глубины с возможностью её автоопределения. Для каждого выделенного слоя производится аналитический пересчёт упругих и пластических констант по задаваемым пользователем законам изменения. Тестирование алгоритма, выполненное для моделей материалов Друкера-Прагера и Geologic Cap, показало физически и геометрически корректное определение характеристик каждого слоя модели среды. Разработанный инструмент значительно упрощает подготовку конечно-элементных моделей сложных слоистых сред.

Ключевые слова: градиентно изменяющиеся свойства, тонкослоистый материал, модель Друкера-Прагера, модель Geologic Cap, численное моделирование, «Логос Прочность».

1. Введение

Численное моделирование динамического деформирования тонкослоистых материалов находит применение в задачах сейсмики [1], при анализе прочности кристаллов, композитных материалов [2; 3], горных пород. В современных вычислительных комплексах недостаточно развиты инструменты задания и визуализации распределения трансверсально изотропных характеристик подобласти сплошной среды на этапе подготовки расчётной модели. Разделение на слои и задание характеристик каждого слоя приходится выполнять вручную, что для сложных расчётных моделей довольно трудоёмко. Поэтому актуальным является разработка методов подготовки расчётных моделей с трансверсально изотропными свойствами материалов.

2. Алгоритм автоматического задания градиентно изменяющихся свойств материала

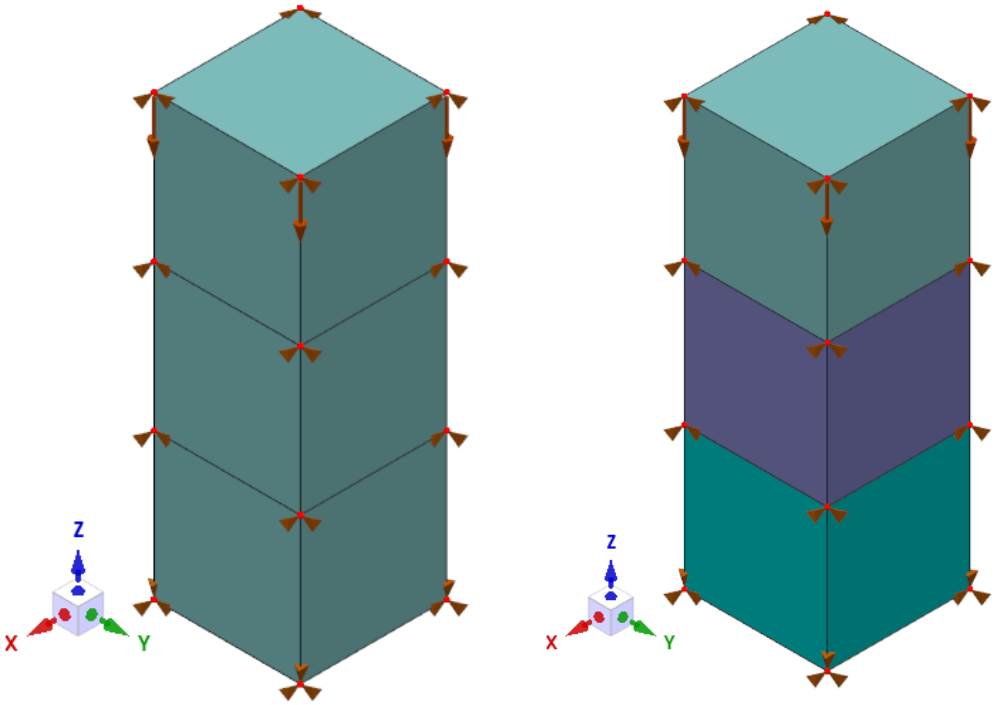
Авторами разработан алгоритм, реализованный на языке Python, осуществляющий автоматическую дискретизацию массива сплошной среды на независимые изотропные горизонтальные слои с группировкой конечных элементов по минимальной высоте или по интервалам глубины с возможностью её автоопределения. Для каждого выделенного слоя производится аналитический пересчёт упругих и пластических констант по задаваемым пользователем законам изменения: линейному, экспоненциальному, периодическому. Предложенная архитектура парсера универсальна и позволяет реализовать послойное задание изменяющихся свойств для любой другой математической модели материала. Парсер совместим с возможностями модели геоматериала Друкера-Прагера, реализованной в LS-DYNA [4], и позволяет задать модель тонкослоистой среды в программных комплексах LS-DYNA и «Логос Прочность» [5].

Для пространственной дискретизации расчётной области в алгоритме реализовано два математических подхода. Первый режим предполагает вычисление минимальной координаты Z среди всех узлов каждого конечного элемента. Ячейки с одинаковой высотой нижней грани объединяются в единый слой. Данный метод довольно эффективный на регулярных сетках без искажений, однако при наличии перекосов ячеек он может избыточно дробить модель на тыся-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части государственного задания (проект FSWR-2026-0019).

чи нефизических микрослоёв. Для работы с подобными сетками был внедрён второй режим – интервальная группировка. В этом случае вычисляется вертикальная координата геометрического центра каждого конечного элемента, после чего массив распределяется по горизонтальным слоям фиксированной толщины. Для упрощения расчётов данное значение можно определить автоматически: парсер анализирует выборку первые несколько тысяч стартовых элементов модели, вычисляет статистическую моду их высоты и применяет её в качестве оптимального шага.

Тестирование алгоритма, выполненное для модели материала Друкера-Прагера, показало физически и геометрически корректное определение характеристик каждого слоя модели среды. На рисунке 1 показаны расчётные модели двух задач об одноосном сжатии образца материала с градиентно изменяющимися механическими свойствами. В первом случае (рисунок 1а) расчёты проведены для модели материала Друкера-Прагера со встроенным градиентом свойств материала [4]: плотность материала $\mathrm{RO} = 2.0$, упругий модуль сдвига $\mathrm{GMOD} = 1049.0$, коэффициент Пуассона $\mathrm{RNU} = 0{,}1613$, параметр формы поверхности разрушения $\mathrm{RKF} = 1.0$, угол внутреннего трения $\mathrm{PHI} = 0.393$, сцепление $\mathrm{CVAL} = 1.0$, угол дилатансии $\mathrm{PSI} = 0.393$, градиент угла внутреннего трения $\mathrm{PHIGR} = -0.08$, градиент угла дилатансии $\mathrm{PSIGR} = -0.08$. Во втором случае – для полученной в результате работы парсера тонкослоистой модели подобласти с изотропными свойствами материала в каждом слое (рисунок 1б): свойства трёх КЭ-слоёв аналогичны предыдущей расчётной модели, за исключением параметров PHI и PSI. Их значения от нижнего элемента к верхнему составили 0.353, 0.273 и 0.193 рад соответственно. На рисунке 2 показаны полученные в результате численного моделирования двух задач траектории напряжённого состояния в пространстве инвариантов напряжений (p, q) (где p – давление, q – эффективные напряжения Мизеса). Как видно из рисунка 2, траектории для двух расчётных моделей совпадают.



(а) (б)

Рис. 1. Вид расчётной модели для теста с моделью материала Друкера-Прагера на трёх КЭ:
а) со встроенным градиентом свойств материала, б) тонкослоистая модель подобласти без градиента свойств материала

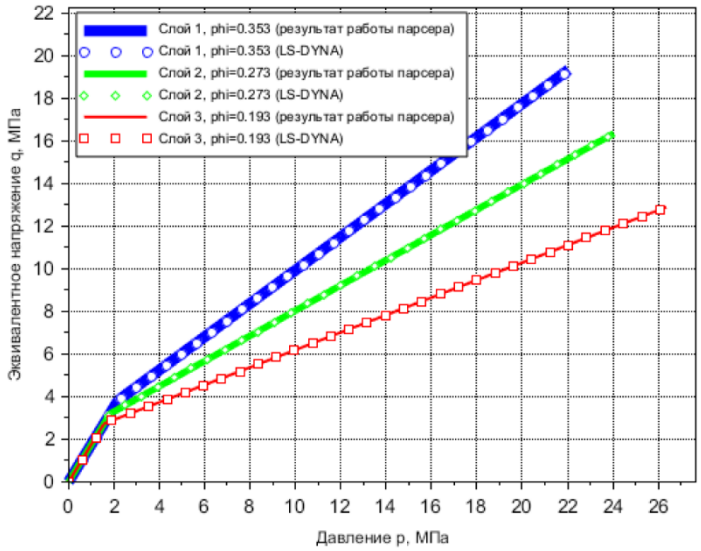


Рис. 2. Траектории напряжённого состояния в пространстве (p, q) для двух расчётных моделей

С использованием разработанного парсера решена задача автоматического задания градиентно изменяющихся свойств грунтового основания для трёхмерной геотехнической задачи. В качестве исходных данных использован файл расчётной модели с однородной средой, в которой поведение материала описывается моделью Geologic Cap для решателя LS-DYNA. С использованием разработанного алгоритма выполнено автоматическое преобразование расчётной модели в модель с тонкослоистой средой. На рисунке 3 показан результат импорта модели в программный комплекс «Логос Прочность».

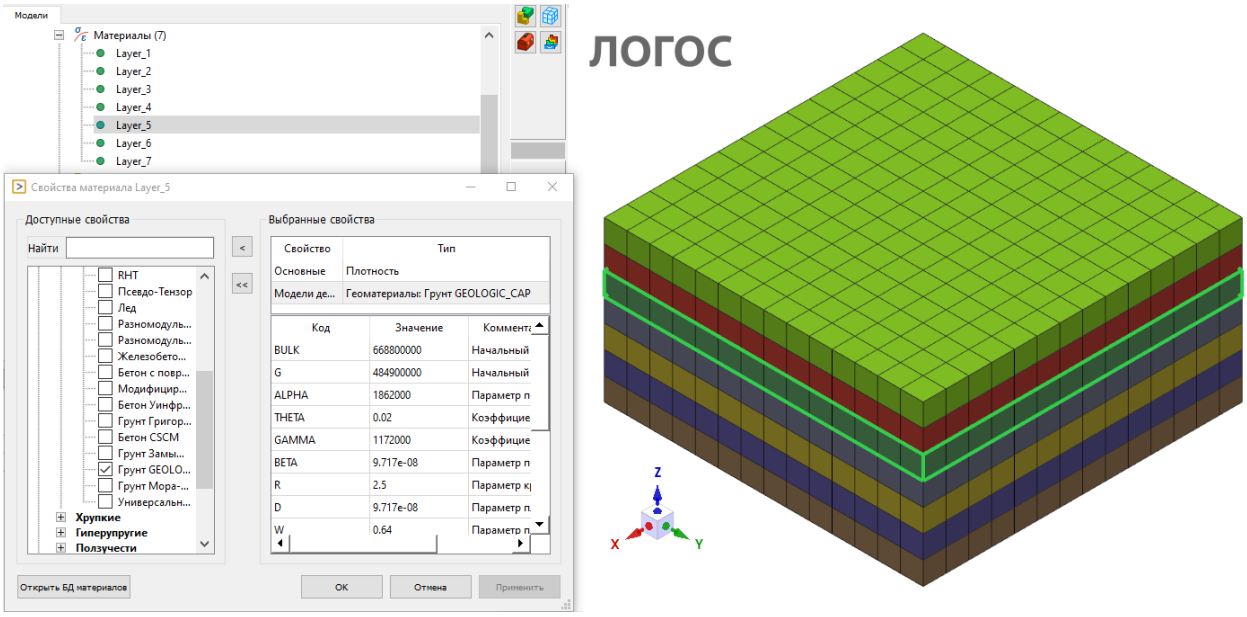


Рис. 3. Результат работы парсера в задаче подготовки расчётной модели для трёхмерной геотехнической задачи

3. Заключение

Таким образом, создан инструмент для автоматического задания тонкослоистых материалов в программных комплексах LS-DYNA и «Логос Прочность». Разработанный инструмент позволяет отказаться от ручного пересчёта констант и значительно упрощает подготовку конечно-элементных моделей сложных слоистых сред.

Литература

1. Дюкина Н.С., Кибец А.И., Жестков М.Н. Анализ сейсмических колебаний заглубленных сооружений с учетом трансверсально-изотропного основания // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 75(1). Нижегородский ун-т. 2013. С. 40-46.
2. Чеботарева Е.А., Лобанов Д.С., Мельникова В.А. Исследование остаточных механических свойств полимерного слоистого композита после нанесения вмятин разных размеров // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 88(2). Нижегородский ун-т. 2026. С. 109-122. DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-109-122.
3. Бабешко В.А., Евдокимов В.С., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Контактные задачи о действии тупоугольных клиновидных в плане штампов на анизотропный композит // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 88(2). Нижегородский ун-т. 2026. С. 123-131. DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-123-131.
4. LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. 2. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2018.
5. Пакет программ Логос-Прочность. Версия 4.0.2. Техническое руководство. РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2018. 1024с.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ РЕГРЕССИИ[1*]

А.В. Еремеев[1,2], Ю.В. Захарова[1,2], А.О. Захаров[1]

[1]Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
[2]Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Исследуется вычислительная сложность задачи оптимальной рекомбинации, возникающей в алгоритмах генетического программирования для задач регрессии. Вводится формальное определение задачи оптимальной рекомбинации в случае древовидного представления решений, доказывается ее NP-трудность и обсуждаются варианты алгоритмов решения.

Ключевые слова: генетическое программирование, оптимальная рекомбинация, NP-трудность, алгоритм.

Рассматривается следующая задача аппроксимации функций. Имеется множество векторов $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i), i = 1, \dots, m$,и множество значений $y^i, i = 1, \dots, m$, которые указывают значения неизвестной (аппроксимируемой) функции на соответствующих значениях $x^i, i = 1, \dots, m$,. Эти пары образуют входные данные (обучающую выборку) $(x^i, y^i), i = 1, \dots, m$, для задачи аппроксимации. Входные данные предполагаются целочисленными. Цель состоит в том, чтобы найти функцию, которая аппроксимирует входные данные в соответствии с критерием оптимизации.

Решение задачи аппроксимации строится с помощью функционального дерева $T = (V, E)$, где V – множество вершин, а E – множество рёбер. Листьям соответствуют переменные $X = \{x_1, \dots x_n\}$ или константы, остальные вершины соответствуют базовым функциям $F = \{f_1, \dots f_n\}$. Значением функционального дерева T относительно вектора переменных $x = (x_1, \dots x_n)$ является значение суперпозиции функций, расположенных в вершинах. Обозначим это значение через $T(x)$. Критерием оптимизации в задаче аппроксимации является минимизация суммы квадратов отклонений между обучающей выборкой и решением задачи аппроксимации $g(T) = \sum_{i=1}^{m} \left(y^i - T(x^i)\right)^2$.

При решении указанной задачи с помощью эволюционных алгоритмов (алгоритмов генетического программирования) встает вопрос о разработке операторов воспроизведения. Работоспособность эволюционных алгоритмов существенно зависит от выбора оператора кроссинговера (рекомбинации), где родительские особи обмениваются своими признаками, порождая потомков [5].

Для применения оператора рекомбинации к деревьям отыскивается общая часть родительских решений, затем выполняется обмен отличающимися частями.

Общая часть двух деревьев – это максимальное по включению поддерево, структурно содержащееся в обоих деревьях. Внутренняя часть – это множество узлов внутри общей части, которые имеют одинаковую арность (или совпадают) в обоих деревьях. Общие листья считаются невнутренними узлами. Отметим, что при идентификации общей части осуществляется обход по уровням сверху вниз, а по узлам одного уровня слева направо.

Сформулируем задачу оптимальной рекомбинации (ЗОР), возникающую в операторе кроссинговера, когда требуется найти наилучшего возможного потомка, который может возникнуть в результате кроссинговера, где значение каждого компонента решения-потомка копируется как одно из значений этого компонента в родительских решениях [2]:

Оптимальное решение ЗОР при двух заданных родительских решениях $p^1 = (p_1^1, \dots, p_k^1)$ и $p^2 = (p_1^2, \dots, p_k^2)$– это допустимое решение (потомок) $z \in Z$, такое что $z_j = p_j^1$ или $z_j = p_j^2$ для всех $j = 1, \dots, k$, и для любого $z' \in Z$, такого что $z'_j = p_j^1$ или $z'_j = p_j^2$, $j = 1, \dots, k$, выполняется неравенство $f(z) \le f(z')$в случае задачи минимизации с целевой функцией $f(\cdot)$.

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 25-21-00335.

Если рассматривать ЗОР для представления решений в виде дерева, то кодировка $p^1 = (p_1^1, \dots, p_k^1)$ и $p^2 = (p_1^2, \dots, p_k^2)$ относится к парам общих узлов родительских деревьев T^1, T^2, которыми можно обмениваться при построении потомков. Оптимальным решением ЗОР будет потомок, который даёт минимум целевой функции $g(T)$. Такой оператор кроссинговера называется оптимизированным кроссинговером.

С помощью полиномиальной сводимости *NP*-полной задачи Разбиение [3] доказывается, следующая теорема.

Теорема 1. ЗОР для задачи аппроксимации функций с помощью функциональных деревьев является *NP*-трудной.

Точное решение ЗОР можно получить полным перебором 2^k вариантов допустимых потомков, что приведет к полиномиальному алгоритму, например, когда ширина родительских деревьев, а, следовательно, и k есть $O(\log(n+m))$. На практике ЗОР решается в операторе кроссинговера эволюционного алгоритма итеративно, поэтому имеет смысл также использовать приближенные алгоритмы решения ЗОР, основанные на жадных принципах выбора значений компонент от родительских решений [1].

Оператор кроссинговера, в котором решается представленная ЗОР, можно рассматривать как способ дерандомизации классического равномерного кроссинговера [4]. Еще одним популярным оператором рекомбинации является одноточечный кроссинговер [4], и если рассматривать дерандомизацию данного оператора, то это приведет к полиномиально разрешимой подзадаче с перебором k возможных вариантов.

Результаты экспериментального исследования на задачах символьной регрессии из [6] показали, что при равном ограничении на количество вычислений целевой функции алгоритм генетического программирования с оптимизированными операторами демонстрирует статистически значимое преимущество над своим аналогом с рандомизированными операторами.

Литература

1. Chicano F., Ochoa G., Whitley D., Tinos R. Dynastic Potential Crossover Operator // Evolutionary Computation. 2021. Vol. 29, No. 1. P. 1–35.
2. Eremeev A.V., Kovalenko J.V. Optimal recombination in genetic algorithms for combinatorial optimization problems: Part II // Yugoslav Journal of Operations Research. 2014. Vol. 24, No. 2. P. 165–186.
3. Garey M., Johnson D. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco, CA: W.H. Freeman and Company, 1979. 339 p.
4. Spears W. M., Anand V. A study of crossover operators in genetic programming //International symposium on methodologies for intelligent systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. С. 409-418.
5. Radcliffe N.J. The algebra of genetic algorithms // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 1994. Vol. 10, No. 4. P. 339–384.
6. McDermott J., White D. R., Luke S., Manzoni L., Castelli M., Vanneschi L., Jaskowski W., Krawiec K., Harper R., De Jong K., O'Reilly U.- M. Genetic programming needs better benchmarks // Proceedings of the fourteenth international conference on Genetic and evolutionary computation conference. Philadelphia, Pennsylvania, USA. ACM, 2012. P. 791–798.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА СОУДАРЕНИЯ ДИЛАТАНТНЫХ СУСПЕНЗИЙ С ПОДЛОЖКОЙ

Д.С. Жариков

Московский авиационный институт

Проведено трехмерное численное моделирование удара капли дилатантной суспензии кукурузного крахмала о твердую подложку методом Volume of Fluid с учетом сдвигового загущения. Для объемной доли твердой фазы 38 % введена переносимая переменная, характеризующая максимальную ранее достигнутую скорость сдвига и сохранение загущенного состояния. Рассмотрены концентрации 33, 35 и 38 % и скорости соударения 0,37–2,91 м/с. Среднее абсолютное процентное отклонение минимальной безразмерной высоты капли от эксперимента составило 4,07 %. Для суспензии 38 % учет истории деформирования снизил ошибку с более 20 % до примерно 2 % и воспроизвел слабую зависимость предельной деформации от скорости удара.

Ключевые слова: реология, соударение капли, суспензия, численное моделирование, сдвиговое загущение, Volume of Fluid.

1. Введение

Соударение капли с твердой поверхностью является базовым процессом для технологий нанесения покрытий, распыления, струйной печати и охлаждения поверхностей [1–4]. Для ньютоновских жидкостей основные режимы взаимодействия – осаждение, отскок, частичный отскок и разбрызгивание - изучены достаточно подробно [6, 7]. В случае концентрированных суспензий динамика усложняется из-за неньютоновских свойств: при достижении критических скоростей сдвига эффективная вязкость может резко возрастать, ограничивая растекание и изменяя остаточную форму капли. Экспериментально такая особенность показана, в частности, для дилатантных суспензий кукурузного крахмала [5].

Для численного описания процессов с сильной деформацией свободной поверхности широко применяется метод объема жидкости Volume of Fluid (VOF) [8]. Поверхностное натяжение при этом может учитываться как объемная сила, локализованная в области межфазной границы [9]. Возможность применения VOF к задачам удара и растекания капель при различных условиях смачивания подтверждена в численных исследованиях [10]. Однако для сдвигозагущающихся суспензий одной мгновенной зависимости вязкости от текущей скорости сдвига может быть недостаточно: при высокой концентрации частиц состояние повышенного сопротивления течению способно сохраняться после кратковременного интенсивного деформирования.

Цель работы – оценить возможность численного воспроизведения экспериментально наблюдаемой предельной деформации капель дилатантной суспензии при ударе о твердую подложку и определить роль учета истории деформирования для наиболее концентрированной суспензии. В качестве основной интегральной характеристики используется минимальная безразмерная высота капли $\varepsilon_m = h_{min}/D_0$, которая остается однозначной характеристикой деформации даже при нарушении осевой симметрии формы капли.

2. Математическая модель и численная реализация

В расчетах используются экспериментальные данные по соударению капель суспензии кукурузного крахмала с подложкой из сапфирового стекла [5]. Рассмотрены объемные доли твердой фазы φ_0 = 33, 35 и 38 %. Начальный диаметр капли в основной серии составляет D_0 = 2,8 мм, скорости соударения U_0 = 0,37; 1,04 и 2,91 м/с. Плотность жидкой фазы принимается равной 1683 кг/м³, коэффициент поверхностного натяжения – 0,05 Н/м, статический контактный угол на подложке – 30°.

Движение несжимаемой среды описывается уравнениями Навье-Стокса в ламинарной постановке. Двухфазная система «воздух-суспензия» рассчитывается методом VOF [8], а сила поверхностного натяжения вводится в континуальной форме [9]. Расчеты выполнены в Ansys Fluent 2023 R1 в трехмерной области 40 × 20 × 20 мм. Для связи полей давления и скорости применяется алгоритм SIMPLE, давление интерполируется по схеме PRESTO!, уравнения количества движения – по противопоточной схеме второго порядка, а межфазная граница восстанавливается методом Geo-Reconstruct. Нестационарный расчет проводится с адаптивным шагом $5 \cdot 10^{-6}$-$1 \cdot 10^{-5}$ с при глобальном числе Куранта 0,25. Сетка динамически измельчается по градиенту объемной доли VOF.

Реологическая модель задает два режима течения. При скорости сдвига ниже критической $\dot{\gamma}c$ используется постоянная вязкость μ_0, а после достижения порога – линейно возрастающая зависимость $\mu_{эфф} = \kappa\dot{\gamma}$. Параметры определены по экспериментальным реограммам [5] и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры реологической модели

φ_0, %	μ_0, Па·с	к, кг/м	$\dot{\gamma}_c$, $с^{-1}$
33	0,05142	0,00067	77
35	0,0765	0,00100	76
38	0,10432	0,00222	47

Для φ_0 = 33 и 35 % вязкость определяется только текущей скоростью сдвига. Для φ_0 = 38 % вводится историческая переменная G, равная максимальной скорости сдвига, ранее достигнутой данным объемом жидкости. В Ansys Fluent G хранится и переносится как User-Defined Scalar, а вязкость вычисляется по эффективной скорости сдвига, выбираемой как максимум текущего и исторического значений. Отдельная релаксация G на рассматриваемом интервале до 5 мс не задается. Такое упрощение ориентировано на начальную ударную стадию, в течение которой экспериментальная форма капли после быстрого уменьшения высоты остается практически неизменной.

3. Результаты моделирования

Проверка сеточной сходимости для 35 %-й суспензии показала, что переход от четырех к пяти уровням адаптации изменяет минимальную безразмерную высоту менее чем на 0,5 %. Дополнительное измельчение внутренних областей с высокой локальной скоростью сдвига изменяет ε_m менее чем на 2 %, поэтому в основной серии использована адаптация по градиенту VOF. Расчеты с динамическим контактным углом также не дали систематического улучшения согласия с экспериментом; для рассмотренных режимов изменение ε_m оставалось в пределах нескольких процентов. Поэтому основные результаты получены при статическом угле 30°.

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений ε_m при D_0 = 2,8 мм приведено в таблице 2.

Таблица 2. Сравнение расчетной и экспериментальной минимальной безразмерной высоты капли

φ_0, %	U_0, м/с	ε_m, расчет	ε_m, эксперимент
33	0,37	0,5350	0,480
33	1,04	0,4901	0,480
33	2,91	0,4234	0,480
35	0,37	0,5000	0,505
35	1,04	0,4970	0,505
35	2,91	0,4940	0,505
38	0,37	0,7020	0,718
38	1,04	0,7024	0,718
38	2,91	0,7028	0,718

Для 35 %-й суспензии расчетная предельная деформация практически не зависит от скорости соударения и отличается от эксперимента не более чем на 2,2 %. Для 38 %-й суспензии аналогичная независимость воспроизводится еще отчетливее: $\varepsilon_m \approx 0{,}702$ во всем диапазоне скоростей при экспериментальном значении 0,718. Наибольшее расхождение наблюдается при φ_0 = 33 %, где расчетная зависимость от U_0 остается заметной.

Среднее абсолютное процентное отклонение ε_m от экспериментальных данных по девяти рассмотренным режимам составляет 4,07 %. Существенный вклад в расхождение вносит 33 %-я суспензия; для концентраций 35 и 38 % согласие значительно лучше. С увеличением φ_0 от 33 до 38 % минимальная безразмерная высота возрастает, то есть степень деформации капли уменьшается. Это соответствует усилению сдвигового загущения при повышении концентрации дисперсной фазы.

Наиболее существенный результат связан с учетом истории деформирования для φ_0 = 38 %. При использовании только мгновенной реологической зависимости получены ε_m = 0,5619; 0,5542 и 0,5257 для U_0 = 0,37; 1,04 и 2,91 м/с соответственно, что соответствует ошибке 21,74-26,78 % относительно эксперимента. После введения переносимой исторической переменной расчетные значения становятся 0,7020; 0,7024 и 0,7028, а ошибка уменьшается до 2,12-2,23 %. Одновременно воспроизводится экспериментально установленная слабая зависимость максимальной деформации от скорости удара [5]. Это показывает, что для суспензии, близкой к концентрационному пределу заклинивания, учет только текущего значения скорости сдвига недостаточен.

Поля динамической вязкости подтверждают механизм ограничения деформации. На ранней стадии удара зона повышенной вязкости формируется у основания капли и в областях интенсивного растекания; в интервале примерно 0,5-1,5 мс она распространяется на значительную часть объема. По мере торможения капли локальные скорости деформации снижаются. Для 35 %-й суспензии повышенная вязкость затем локализуется преимущественно у контактной линии, тогда как для 38 %-й суспензии историческая переменная обеспечивает сохранение загущенного состояния в переносимых объемах жидкости и тем самым ограничивает дальнейшее растекание.

4. Заключение

Выполнено трехмерное численное моделирование соударения капли концентрированной дилатантной суспензии с твердой подложкой с использованием метода VOF и пользовательской реологической модели. Подход воспроизводит основные особенности эксперимента: быстрое уменьшение высоты после контакта, переход к квазистационарной форме и снижение степени деформации при увеличении объемной доли твердой фазы.

Показано, что для суспензий с φ_0 = 35 и 38 % максимальная деформация в расчете слабо зависит от скорости соударения в диапазоне 0,37-2,91 м/с. Среднее абсолютное процентное отклонение минимальной безразмерной высоты от экспериментальных данных составляет 4,07 %. Для 38 %-й суспензии введение локальной памяти о максимальной ранее достигнутой скорости сдвига снижает ошибку более чем на порядок по сравнению с моделью без учета истории деформирования.

Полученные результаты показывают перспективность использования переносимой исторической переменной при моделировании кратковременных ударных процессов в концентрированных сдвигозагущающихся суспензиях. Дальнейшее развитие модели может быть связано с введением конечного времени релаксации загущенного состояния и его независимой экспериментальной идентификацией.

Литература

1. Ye Q., Tiedje O., Shen B., Domnick J. Impact of viscous droplets on dry and wet substrates for spray painting processes // Fluids. 2025. Vol. 10, No. 5. Article 131. DOI: 10.3390/fluids10050131.

2. Mundo Ch., Sommerfeld M., Tropea C. Droplet-wall collisions: experimental studies of the deformation and breakup process // International Journal of Multiphase Flow. 1995. Vol. 21, No. 2. P. 151–173.
3. Derby B. Inkjet printing of functional and structural materials: fluid property requirements, feature stability, and resolution // Annual Review of Materials Research. 2010. Vol. 40. P. 395–414.
4. Kim J. Spray cooling heat transfer: The state of the art // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2007. Vol. 28, No. 4. P. 753–767.
5. Boyer F., Sandoval-Nava E., Snoeijer J. H., Dijksman J. F., Lohse D. Drop impact of shear thickening liquids // Physical Review Fluids. 2016. Vol. 1, No. 1. Article 013901.
6. Rioboo R., Tropea C., Marengo M. Outcomes from a drop impact on solid surfaces // Atomization and Sprays. 2001. Vol. 11, No. 2. P. 155–165.
7. Josserand C., Thoroddsen S. T. Drop impact on a solid surface // Annual Review of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 48. P. 365–391.
8. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free bounda-ries // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 39, No. 1. P. 201–225.
9. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. Vol. 100, No. 2. P. 335–354.
10. Lunkad S. F., Buwa V. V., Nigam K. D. P. Numerical simulations of drop impact and spreading on horizontal and inclined surfaces // Chemical Engineering Science. 2007. Vol. 62, No. 24. P. 7214–7224.

СИМВОЛЬНЫЕ, ЧИСЛЕННЫЕ И СВЁРТОЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ: КАЧЕСТВО И ВРЕМЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Г.В. Журавлёв, М.И. Кумсков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Проведены два основных сравнительных эксперимента: классификация на восьми наборах архива UCR с измерением времени вычислений и многошаговое прогнозирование цен BTC и ETH в сравнении с Naive. На UCR тест Фридмана выявил различия рангов семи методов ($p = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$); средние ранги MiniRocket и BOSS составили 1,75 и 2,56, различие между ними по критерию Неменьи не установлено, суммарное время в проведённых CPU-прогонах – около 2,4 мин и 11,6 ч. В прогнозе пять обученных моделей имели больший RMSE, чем Naive, во всех восьми комбинациях актива и горизонта. В отдельном опыте символьный Transformer получил balanced accuracy 0,538 без проверки значимости отличия от 0,5; в бэктесте другой, численной модели активные торговые правила оказались убыточными с учётом издержек.

Ключевые слова: временные ряды, символьное представление, классификация, прогнозирование, BOSS, ROCKET, MiniRocket, Transformer, вычислительная сложность, криптовалюты.

1. Введение

В работе рассматриваются численные, символьные и свёрточные преобразования временного ряда. При *численном* представлении в модель подаются вещественные признаки окна истории: нормированные приращения, геометрия свечи, сами отсчёты ряда. В *словарных* методах окна ряда переводятся в символьные слова (SAX [1], SFA [2]), а затем строятся признаки на основе их встречаемости. Из словарных методов в работе исследованы BOSS [3] и два варианта классификации на основе SAX; из методов на случайных свёртках – ROCKET [4] и MiniRocket [5]. Эти группы отличаются способом построения признаков и вычислительными затратами; ни одна из них не требует обучения глубокой сети.

Глубокие и предварительно обученные модели показывают конкурентные результаты в отдельных задачах временных рядов; их преимущество нельзя заранее распространять на классификацию рядов UCR и на прогнозирование рассматриваемых финансовых данных. Крупные сравнительные исследования классификации временных рядов уже проведены [6]; сравнение моделей прогнозирования с Naive для других финансовых рядов с низкой предсказуемостью выполнено в [7]. Цель работы – сопоставить качество семи выбранных классификаторов на восьми наборах UCR и измерить время полного цикла для BOSS, ROCKET и MiniRocket в проведённых прогонах; отдельно оценивается RMSE пяти моделей и прогноза Naive на рядах BTC и ETH.

2. Данные и протокол эксперимента

Рассматриваются три постановки: (P1) многошаговый прогноз цены BTC и ETH, метрика RMSE; (P2) классификация направления движения цены BTC, метрика balanced accuracy; (P3) классификация ряда целиком на UCR, метрика accuracy. Сравниваются готовые алгоритмы, поэтому вместе с представлением меняются классификатор и обучение; даже в паре Transformer-моделей (P2) различие нельзя приписать одной лишь дискретизации.

Данные UCR. Архив UCR [8], стандартные разбиения восьми наборов. Пять малых (Coffee, GunPoint, Trace, TwoLeadECG, ECG5000; от 23 до 500 обучающих рядов) выбраны для рас-

смотрения работы классификаторов при небольшом объёме обучающей выборки; три более крупных (FordA, Wafer, ElectricDevices; от 1000 до 8926 рядов) добавлены для проверки того, сохраняются ли наблюдаемые различия при большем объёме обучения. Наборы не являются случайной выборкой архива, поэтому выводы по ним не переносятся на архив в целом.

Протокол (P1). Использованы часовые цены закрытия BTCUSDT и ETHUSDT биржи Binance за 730 дней до момента выгрузки. Ряд выгружался программно непосредственно перед каждым запуском модели, дата выгрузки не сохранилась; поэтому точный календарный интервал указать нельзя, а тестовые участки разных моделей могут быть сдвинуты относительно друг друга на время между запусками. Пропущенные свечи не восстанавливались. Модели прогнозируют логарифмические доходности; первые 85 % ряда доходностей – обучение, последние 15 % (около 2,6 тыс. часов) – тест, разбитый на неперекрывающиеся окна длины $H \in \{5, 10, 15, 24\}$. Прогноз цены на k-м шаге окна равен $P_0 \cdot \exp(\hat{r}_1 + \ldots + \hat{r}_k)$, где P_0 – последняя известная цена перед окном; Naive повторяет P_0 на всех шагах окна; RMSE считается по ценам всех шагов всех окон. Каждая модель обучается один раз, без переобучения на тесте. Общие настройки – длина входа 168 ч, 600 шагов оптимизации, скорость обучения 10^{-3}, размер пакета 256, один запуск с random_state = 42 – задавались одинаково; специфические параметры архитектур взяты по умолчанию из neuralforecast 1.7.5; подбор гиперпараметров на валидационных данных не проводился.

Протокол (P2). Часовые свечи BTC/USD (Coinbase, 08.11.2025–08.03.2026), walk-forward валидация с тремя фолдами; нормировки и пороги дискретизации настраиваются только на обучающей части каждого фолда.

Методы. На UCR: словарные – ансамбль BOSS, SAX bag-of-words с логистической регрессией, SAX с обучаемым эмбеддингом и Transformer; на случайных свёртках – ROCKET, MiniRocket; численный – PatchTST [9]; тривиальный – мажоритарный класс. BOSS, ROCKET и MiniRocket запускались в библиотеке aeon [10] (версия не зафиксирована) с параметрами по умолчанию (для ROCKET и MiniRocket – 10 000 ядер), random_state = 42. В (P1): DLinear [11], TiDE [12], TimesNet [13], PatchTST и NHITS [14], а также Naive. В (P2) при одинаковой конфигурации Transformer-энкодера (длина окна 128, $d_{model} = 128$, 2 слоя, 4 головы, одинаковые оптимизатор, число эпох и ранняя остановка) сравнивались численное представление свечи (относительные размеры тела и теней, приращение цены, нормированный объём; линейная проекция) и её символьная кодировка без объёма (эмбеддинг).

Статистическая проверка. На UCR – тест Фридмана с апостериорным критерием Неменьи [15]. После общего анализа рангов выполнены четыре дополнительных попарных сравнения BOSS с конкретными методами нижней группы критерием Уилкоксона; значения p скорректированы методом Холма в пределах этих четырёх сравнений. Поскольку состав дополнительных сравнений определён по результатам общего анализа, их выводы рассматриваются как исследовательские. Время полного цикла «обучение + предсказание» измерено для BOSS, ROCKET и MiniRocket на CPU облачных сред Kaggle и Colab (Python 3.11–3.12; модель процессора и число потоков не фиксировались); PatchTST обучался на GPU Tesla T4, и его время с ними не сопоставляется. Отношения времён ниже – результат проведённых прогонов, а не характеристика методов на любом оборудовании.

3. Результаты

3.1. UCR: лучшие средние ранги у ROCKET, MiniRocket и BOSS

В таблице 1 приведены значения accuracy семи методов и средние ранги. Тест Фридмана выявляет различия рангов между семью методами на восьми выбранных наборах ($\chi^2 = 42{,}0$, $p = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$, $k = 7$, $N = 8$). Три лучших средних ранга получили ROCKET, MiniRocket и BOSS: их попарные разности не превышают 0,875 при критической разности Неменьи $CD \approx 3{,}19$ ($\alpha = 0{,}05$), то есть внутри этой тройки различия не установлены. ROCKET и MiniRocket превосходят каждый метод нижней группы и по критерию Неменьи (разности рангов не менее 3,25). Для BOSS разность с ближайшим методом нижней группы (2,44) не достигает CD; в дополнительном исследовательском анализе критерий Уилкоксона даёт для каждой из четырёх пар точное

двустороннее p = 0,0078, после поправки Холма p = 0,031. Это различия с конкретными соперниками, а не преимущество BOSS над классом методов.

Таблица 1. Accuracy на наборах UCR и средний ранг
(ранги рассчитаны по неокруглённым accuracy, при равенстве – средний ранг)

Метод	Coffee	GunPoint	Trace	TwoLead ECG	ECG 5000	FordA	Wafer	Electric Devices	Ср. ранг
ROCKET	1,000	1,000	1,000	0,999	0,947	0,941	0,999	0,726	1,69
MiniRocket	1,000	0,993	1,000	0,998	0,944	0,951	0,999	0,753	1,75
BOSS (симв.)	1,000	1,000	1,000	0,983	0,940	0,919	0,995	0,715	2,56
SAX+Emb.+Tr.	0,893	0,904	0,837	0,668	0,920	0,619	0,979	0,608	5,00
SAX-BoW+LR	0,643	0,833	0,540	0,669	0,794	0,721	0,994	0,627	5,00
PatchTST	0,488	0,684	0,713	0,572	0,937	0,892	0,993	0,640	5,13
Majority	0,536	0,493	0,190	0,500	0,584	0,516	0,892	0,242	6,88

Дополнительные эксперименты проверяют влияние аугментации и аддитивного шума в ограниченном числе конфигураций. В отдельном прогоне на четырёх малых наборах пятикратная аугментация обучающей выборки PatchTST (jittering, scaling, time warping; 50 эпох) повысила его accuracy на Coffee с 0,500 до 0,696, на Trace – с 0,700 до 0,850; BOSS в этом прогоне был единолично первым на каждом наборе. SAX с Transformer без аугментации и аугментированный PatchTST получили одинаковый средний ранг 2,5 (accuracy на Coffee / GunPoint / Trace / TwoLeadECG: 0,893 / 0,900 / 0,840 / 0,658 и 0,696 / 0,937 / 0,850 / 0,622); результат не позволяет отдельно оценить эффект символизации и эффект аугментации. На трёх крупных наборах средние ранги среди семи методов таблицы 1 равны: MiniRocket 1,0, ROCKET 2,0, BOSS 3,0, PatchTST 4,3. BOSS опередил PatchTST и здесь; таким образом, один лишь малый объём обучения не объясняет всех наблюдаемых различий, хотя причину этот опыт не устанавливает. Простые SAX-методы на крупных наборах уступили PatchTST. В эксперименте с аддитивным гауссовым шумом на ECG5000 (σ от 0 до 1,0, отдельный прогон) BOSS потерял больше accuracy (6,9 п. п., с 0,945 до 0,876), чем PatchTST (2,2 п. п., с 0,934 до 0,912). Это сравнение двух выбранных конфигураций на одном наборе при данном способе внесения шума; вывод об общей помехоустойчивости словарных и нейросетевых методов из него не следует.

3.2. Вычислительная стоимость

В таблице 2 приведено измеренное время полного цикла «обучение + предсказание». В данном CPU-прогоне полный цикл BOSS на FordA (n_{train} = 3601, длина ряда 500) занял 34 020,2 с, или около 9 ч 27 мин. По суммам строк таблицы 2 MiniRocket потребовалось 143,6 с, ROCKET – 736,3 с, BOSS – 41 672,7 с; отношения составляют приблизительно 5 и 290 раз. На семи наборах из восьми MiniRocket не уступил BOSS по accuracy.

Таблица 2. Время цикла «обучение + предсказание», с (CPU); под названием набора – n / L
(объём обучающей выборки / длина ряда)

Метод	Coffee 28/286	GunPoint 50/150	Trace 100/275	TwoLead ECG 23/82	ECG 5000 500/140	FordA 3601/500	Wafer 1000/152	Electric Devices 8926/96	Сумма строк
BOSS	38,2	11,1	39,4	9,0	311,4	34 020,2	784,8	6 458,6	41 672,7 (11,6 ч)
ROCKET	7,5	3,1	5,7	9,7	70,3	256,3	110,5	273,2	736,3 (12 мин)
MiniRocket	14,6	0,3	0,5	0,6	3,9	17,0	6,0	100,7	143,6 (2,4 мин)

3.3. Криптовалютные ряды

В таблицах 3 и 4 приведён RMSE многошагового прогноза. При одном запуске каждой обученной модели и указанных общих настройках её RMSE оказался выше RMSE Naive во всех восьми рассмотренных сочетаниях двух активов и четырёх горизонтов; медиана по восьми конфигурациям величины 100 ($RMSE_{модели}$ / $RMSE_{Naive}$ − 1) % составляет 1,27 для TiDE, 1,56 для DLinear, 1,64 для TimesNet, 2,85 для PatchTST и 5,19 для NHITS. Формальные значения, рассчитанные по восьми зависимым конфигурациям (критерий Уилкоксона: W = 0, p = 0,008 для каждой модели; тест Фридмана по шести моделям: $\chi^2 = 24{,}4$, $p = 2 \cdot 10^{-4}$), не доказывают статистической значимости на независимых задачах: строгая проверка требует анализа ряда разностей потерь на тестовом участке с учётом зависимости многошаговых прогнозов [16].

Таблица 3. Многошаговый прогноз BTCUSDT (1 ч): RMSE на тестовом участке

Модель	**H = 5**	**H = 10**	**H = 15**	**H = 24**
Naive	669,5	899,5	1165,9	1518,0
DLinear	677,0	912,9	1184,9	1529,3
TiDE	680,3	910,7	1180,9	1524,3
TimesNet	681,0	914,5	1173,2	1539,9
PatchTST	688,2	948,1	1169,6	1535,9
NHITS	736,2	1982,8	1194,5	2368,6

Таблица 4. Многошаговый прогноз ETHUSDT (1 ч): RMSE на тестовом участке

Модель	**H = 5**	**H = 10**	**H = 15**	**H = 24**
Naive	27,87	37,37	46,59	63,12
DLinear	28,33	37,81	47,71	64,19
TiDE	28,06	37,74	47,73	64,44
TimesNet	28,42	37,97	47,16	64,42
PatchTST	28,68	41,12	48,00	63,19
NHITS	28,05	39,92	47,90	65,37

В отдельном опыте по классификации направления (H = 1; три фолда по 336 тестовых часов, 12.01–23.02.2026) символьный Transformer получил среднюю balanced accuracy 0,538 (стандартное отклонение по фолдам 0,013), численный вариант – 0,524, мажоритарный прогноз – 0,500. Поскольку символьный вариант не использовал объём торгов, а численный использовал, наблюдаемую разницу нельзя приписать одной лишь символизации; значимость различия не проверялась.

В отдельном бэктесте другой модели – численного Transformer на часовых свечах BTCUSDT (Binance, 730 дней, хронологическое разбиение 80/20, 3478 тестовых часов, balanced accuracy 0,515) – проверены правила long/flat, long/short, long/short с порогом уверенности, «купить и держать» и отсутствие сделок (комиссия 5 б. п. и проскальзывание 1 б. п. на сделку). Доля баров, на которых знак открытой позиции совпал с направлением цены, составила 0,530–0,540, однако три активных правила потеряли 55–76 % капитала, «купить и держать» – 17,5 %, а исходный капитал сохранил только вариант без сделок. Этот опыт не является проверкой экономической ценности результата символьного Transformer: модели и данные различаются.

4. Обсуждение

Предварительные рекомендации для рассмотренных задач (представление и алгоритм в экспериментах не полностью разделены):

- На рассмотренных наборах UCR, включающих ряды из нескольких предметных областей, BOSS, ROCKET и MiniRocket показали высокие ранги без использования GPU; предположение о роли воспроизводимых локальных форм требует отдельной проверки по свойствам данных. Среди трёх символьных вариантов таблицы 1 наименьший сред-

ний ранг получил BOSS; более поздние словарные и свёрточные методы в сравнение не включались, а широкое сопоставление семейств проведено в [6].

- В проведённых CPU-прогонах MiniRocket дал существенно меньшее суммарное время полного цикла, чем BOSS: около 2,4 мин против 11,6 ч на восьми наборах. При выборе метода для другого оборудования время следует измерить повторно; попарное различие средних рангов этих методов на выбранных наборах не установлено. BOSS предоставляет явный словарь SFA-слов, который допускает последующий анализ признаков.
- Сравнение с Naive следует проводить на одних и тех же отложенных моментах времени, анализируя разности потерь с учётом их зависимости; положительная balanced accuracy сама по себе не означает прибыльности торгового правила.

В рассмотренных конфигурациях и на выбранном тестовом периоде пять обученных моделей не превзошли Naive по RMSE. Этот результат ограничен выбранными рядами, периодом, горизонтами и настройками обучения, не устанавливает причины различия и не переносится без дополнительной проверки на другие периоды и настройки. Влияние степени символизации на качество классификации требует контролируемого сравнения при фиксированном классификаторе и одинаковом протоколе обучения.

5. Заключение

В одном эксперименте сопоставлены семь методов классификации на восьми наборах UCR; в таблицах многошагового прогнозирования – пять обученных моделей и Naive на BTC и ETH; результаты классификации направления и бэктеста получены в отдельных опытах. На восьми выбранных наборах классификации различались качество и измеренное время методов: лучшие средние ранги показали ROCKET, MiniRocket и BOSS, а суммарное время MiniRocket и BOSS в проведённых CPU-прогонах составило около 2,4 мин и 11,6 ч. В задаче прогнозирования все пять обученных моделей уступили Naive по RMSE при выбранных настройках. Предварительный результат по направлению (0,538) и убыточность активных торговых правил другой, численной модели получены в отдельных опытах. Установить влияние самой предметной области или способа представления отдельно от алгоритма эти эксперименты не позволяют. Дальнейшая работа – расширение сравнения на более широкий перечень одномерных наборов UCR и контролируемое сопоставление численного и символьного входа при фиксированном классификаторе.

Литература

1. Lin J., Keogh E., Lonardi S., Chiu B. A Symbolic Representation of Time Series, with Implications for Streaming Algorithms // Proceedings of the 8th ACM SIGMOD Workshop on Research Issues in Data Mining and Knowledge Discovery. 2003. P. 2–11. DOI: 10.1145/882082.882086.
2. Schäfer P., Högqvist M. SFA: A Symbolic Fourier Approximation and Index for Similarity Search in High Dimensional Datasets // Proceedings of the 15th International Conference on Extending Database Technology (EDBT). 2012. P. 516–527. DOI: 10.1145/2247596.2247656.
3. Schäfer P. The BOSS is concerned with time series classification in the presence of noise // Data Mining and Knowledge Discovery. 2015. Vol. 29, No. 6. P. 1505–1530. DOI: 10.1007/s10618-014-0377-7.
4. Dempster A., Petitjean F., Webb G.I. ROCKET: exceptionally fast and accurate time series classification using random convolutional kernels // Data Mining and Knowledge Discovery. 2020. Vol. 34, No. 5. P. 1454–1495. DOI: 10.1007/s10618-020-00701-z.
5. Dempster A., Schmidt D.F., Webb G.I. MiniRocket: A Very Fast (Almost) Deterministic Transform for Time Series Classification // Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2021. P. 248–257. DOI: 10.1145/3447548.3467231.
6. Middlehurst M., Schäfer P., Bagnall A. Bake off redux: a review and experimental evaluation of recent time series classification algorithms // Data Mining and Knowledge Discovery. 2024. Vol. 38, No. 4. P. 1958–2031. DOI: 10.1007/s10618-024-01022-1.

7. Beck N., Dovern J., Vogl S. Mind the naive forecast! A rigorous evaluation of forecasting models for time series with low predictability // Applied Intelligence. 2025. Vol. 55, No. 6. Art. 395. DOI: 10.1007/s10489-025-06268-w.
8. Dau H.A., Bagnall A., Kamgar K., et al. The UCR Time Series Archive // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2019. Vol. 6, No. 6. P. 1293–1305. DOI: 10.1109/JAS.2019.1911747.
9. Nie Y., Nguyen N.H., Sinthong P., Kalagnanam J. A Time Series is Worth 64 Words: Long-term Forecasting with Transformers // Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR). 2023. arXiv:2211.14730.
10. Middlehurst M., Ismail-Fawaz A., Guillaume A., et al. aeon: a Python Toolkit for Learning from Time Series // Journal of Machine Learning Research. 2024. Vol. 25, No. 289. P. 1–10.
11. Zeng A., Chen M., Zhang L., Xu Q. Are Transformers Effective for Time Series Forecasting? // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2023. Vol. 37, No. 9. P. 11121–11128. DOI: 10.1609/aaai.v37i9.26317.
12. Das A., Kong W., Leach A., et al. Long-term Forecasting with TiDE: Time-series Dense Encoder. arXiv:2304.08424. 2023.
13. Wu H., Hu T., Liu Y., et al. TimesNet: Temporal 2D-Variation Modeling for General Time Series Analysis // Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR). 2023. arXiv:2210.02186.
14. Challu C., Olivares K.G., Oreshkin B.N., et al. NHITS: Neural Hierarchical Interpolation for Time Series Forecasting // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2023. Vol. 37, No. 6. P. 6989–6997. DOI: 10.1609/aaai.v37i6.25854.
15. Demšar J. Statistical Comparisons of Classifiers over Multiple Data Sets // Journal of Machine Learning Research. 2006. Vol. 7. P. 1–30.
16. Diebold F.X., Mariano R.S. Comparing Predictive Accuracy // Journal of Business & Economic Statistics. 1995. Vol. 13, No. 3. P. 253–263. DOI: 10.1080/07350015.1995.10524599.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕИНЪЕКТИВНОЙ РАЗВЕРТКИ ДЛЯ РЕДУКЦИИ РАЗМЕРНОСТИ В АЛГОРИТМЕ ПОИСКА НУЛЯ МНОГОМЕРНОЙ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ[1*]

А.С. Зайцев, К.А. Баркалов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

В работе проводится сравнение эффективности Многомерного Алгоритма Поиска Нуля и алгоритма DIRECT на двух двумерных тестовых функциях. Рассматриваемые двумерные функции являются многоэкстремальными, принимают неотрицательные значения в области определения и нулевое значение в точке глобального минимума. Такие задачи могут интерпретироваться как минимизация невязки между экспериментальными и теоретическими данными.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, поиск нуля функции, поиск корня функции, функция Растригина, функция Стыблинского-Танга.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследование глобального Многомерного Алгоритма Поиска Нуля (МАПН) неотрицательной функции [1, 2, 3]. Для редукции размерности алгоритм использует неинъективную аппроксимацию кривой Пеано [4]. Т.е. для любой точки из N-мерной допустимой области D в соответствие ставится не более чем 2^N точек на отрезке вещественной оси [0, 1]. В работе [3] была продемонстрирована эффективность такого подхода по сравнению с инъективной аппроксимацией.

В вычислительном эксперименте проведено сравнение МАПН и широко известного алгоритма оптимизации DIRECT [5]. Сравнение эффективности алгоритмов проводилось путем решения двумерной задачи Растригина и двумерной задачи Стыблинского-Танга. Данные тестовые задачи были выбраны специально ввиду сложности их решения.

2. Постановка задачи

Классическая задача поиска минимума многомерной многоэкстремальной функции $\varphi(y)$, где $y \in R^n$ $(n > 1)$ в N-мерном гиперкубе D записывается в следующем виде:

$$\varphi(y^*) = min\{\varphi(y), y \in D\}, D = \{y \in R^n, a_i \le y_i \le b, i = 1, \dots, n\} \quad (1)$$

Дополнительно потребуем, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

1) $\varphi(y) \ge 0, y \in D$ (неотрицательность функции);
2) существует вектор $y^* \in D$ такой, что $\varphi(y^*) = 0$ (существование нуля функции);
3) функция удовлетворяет условию:

$$|\varphi(y') - \varphi(y'')| \le L|y' - y''|, y', y'' \in D;\ 0 < L < \infty,$$

где значение L – не задано (липшицевость функции).

Функцию $\varphi(y)$, удовлетворяющую описанным выше условиям, будем обозначать $\psi(y)$, где $y \in R^n$ $(n > 1)$. Очевидно, что для рассматриваемой функции $\psi(y)$ $(y \in D)$ задача поиска глобального минимума эквивалентна задаче поиска нуля функции (поиска корня функции).

Для решения поставленная многомерная задача редуцируется до одномерной. Для редукции размерности можно использовать кривые (развертки) Пеано [6, 7]. Обычно такие кривые

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

обладают свойством инъективности, т. е. любой точке (прообразу) с отрезка [0, 1] вещественной оси соответствует единственная точка (образ) в N-мерной области D. Но в таком случае точки (образы) близкие в N-мерной области D могут соответствовать далеко расположенные друг от друга точкам (прообразам) с отрезка [0, 1] вещественной оси. В работе [3] продемонстрировано, что данный эффект негативно влияет на скорости сходимости алгоритма оптимизации. Чтобы избежать этого эффекта предлагается отказаться от использования инъективой аппроксимации кривой Пеано в пользу неинъективной. Т. е. любой точке (образу) в N-мерной области D соответствует не более чем 2^N точек (прообразов) с отрезка [0, 1] вещественной оси. Подробно про неинъективную аппроксимацию кривой Пеано можно прочитать в работе [4].

Таким образом исходная многомерная задача (1) сводится к одномерной задаче вида:

$$\psi(y(x^*)) = min\{\psi(y(x)), x \in [0,1]\} \quad (2)$$

Функция $\psi(y(x))$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\psi(y(x)) \geq 0, x \in [0,1]$ (неотрицательность функции);
2) существует точка $x^* \in [0,1]$ такая, что $\psi(y(x^*)) = 0$ (существование нуля функции);
3) функция удовлетворяет условию:

$$|\psi(y(x')) - \varphi(y'')| \leq H\sqrt[N]{|x' - x''|}, x', x'' \in [0,1];\ 0 < H < \infty,$$

где значение H – не задано. Из [2] известно, что константа Гёльдера H связана с константой Липшица L соотношением $H = 4L\sqrt{N}$ (гёльдеровость функции).

3. Описание алгоритма

Алгоритм поиска нуля функции $\psi(y(x))$ порождает последовательность точек $\{x^k\}$. В этих точках вычисляется значение функции $z^k = \psi(y(x^k)), k = 0, 1, 2, \ldots$. Предполагается, что погрешность пренебрежимо мала. Первые два испытания осуществляются в граничных точках, то есть $x^0 = 0$ и $x^1 = 1$ соответственно. А выбор точек $x^{k+1}, k \geq 1$, очередного $(k+1)$-го испытания осуществляются по следующим правилам:

1) Перенумеруем (нижнем индексом) точки $x^i,\ 0 \leq i \leq k$, в порядке возрастания значения координаты:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1 \quad (3)$$

2) Для каждого интервала $(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq k$, вычислим величину:

$$K(i) = \frac{z_i + z_{i-1}}{\Delta_i}, \quad (4)$$

где $\Delta_i = \sqrt[N]{x_i - x_{i-1}}$, $z_i = \psi(y(x_i))$, называемую характеристикой этого интервала

3) Определим интервал $(x_t - x_{t-1})$, которому соответствует минимальная характеристика K:

$$K(t) = min\{K(i), 1 \leq i \leq k\} \quad (5)$$

Если минимальное значение соответствует нескольким интервалам, то в качестве значения t выбирается наименьшее число, удовлетворяющее условию (3).

4) Определим точку x^{k+1} очередного испытания следующим образом:

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, \quad (6)$$

5) Проведем очередное испытание в точке x^{k+1}:

$$z^{k+1} = \psi(y(x^{k+1})) \quad (7)$$

и примем $k = k + 1$

6) Проверим условие остановки алгоритма:
   a) Число итераций k достигло значения k_{max} (исчерпание вычислительного ресурса)
   b) Было достигнуто значение

$$\psi_k^* = min\{\psi(y(x_i)): 0 \leq i \leq k\} \leq \sigma, \quad (8)$$

где $\sigma > 0$ (предустановленная допустимая погрешность в оценке нулевого значения функции $\psi(y(x))$).

4. Вычислительные эксперименты

В вычислительном эксперименте было проведено сравнение двух алгоритмов: МАПН и DIRECT [5]. Во всех методах в критерии остановки использовалось значение $\sigma = 10^{-2}$; в МАПН использовалась развертка с параметром построения m = 12, а в методе DIRECT – параметр $\varepsilon = 10^{-4}$.

Сравнение эффективности алгоритмов проводится на двух тестовых функциях:

1) двумерная функция Растригина (функция является неотрицательной),

2) двумерная функция Стыблинского-Танга (функция преобразуется к неотрицательной).

В силу того, что рассматриваемые функции имеют большой перепад значений для ускорения работы МАПН имеет смысл при подсчете характеристики интервала (4) извлекать корень из значений функции, вычисленных на границах интервала. Алгоритм DIRECT [5] остается без изменений.

Известно, что алгоритм DIRECT в процессе своей работы может попасть в область локального минимума с нулевым значением функции. И для того чтобы покинул эту область может потребоваться достаточно много итераций [8]. Но так как сравнение алгоритмов проводится на неотрицательных функциях подобное невозможно.

4.1 Вычислительный эксперимент №1

Двумерная функция Растригина имеет вид:

$$f(y) = 20 + \sum_{i=1}^{2} (y_i^2 + 10cos(2\pi y_i)), y \in [-4{,}5.12]^2$$

Глобальный минимум функции $f^* = 0$ находится в точке $y^* = (0{,}0)$. Нахождение глобального минимума данной функции является трудоемкой задачей ввиду большого количества локальных минимумов и большой области поиска.

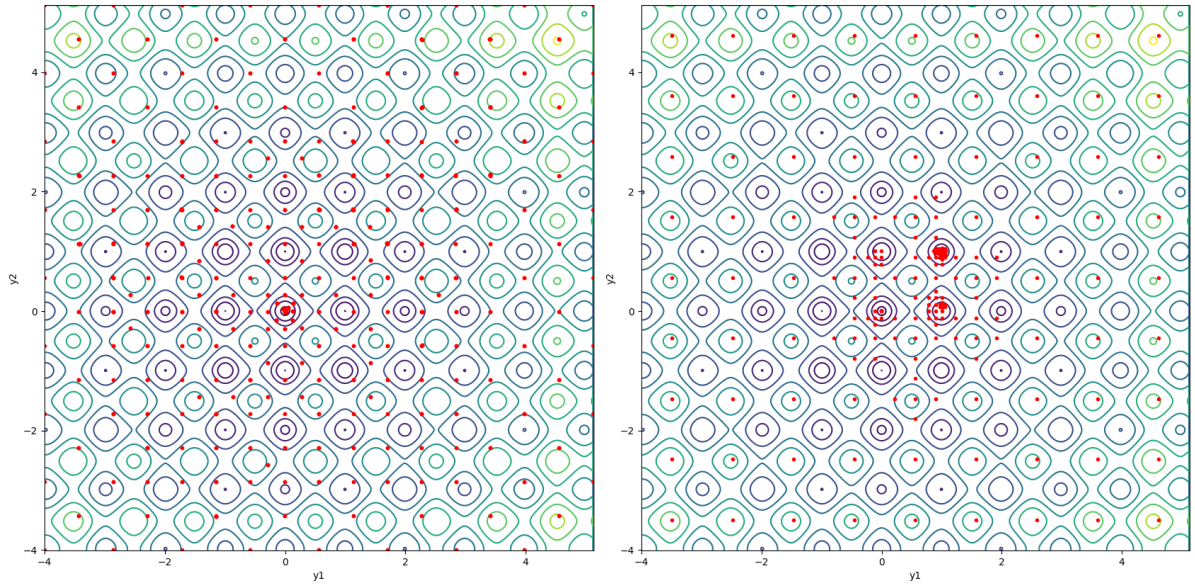


Рис. 1. График функции Растригина и точек испытаний, выполненных МАПН (слева) и DIRECT (справа)

Для решения данной задачи алгоритму DIRECT потребовалось провести 438 испытаний целевой функции (правый рисунок), а МАПН потребовалось провести 307 испытаний целевой функции (левый рисунок).

4.2 Вычислительный эксперимент №2

Двумерная функция Стыблинского-Танга имеет вид:

$$f(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} (y_i^4 - 16y_i^2 + 5y_i), y \in [-5{,}5]^2$$

Глобальный минимум функции $f^* = -78.332$ находится в точке $y^* = (-2.9035, -2.9035)$. Указанная функция преобразовывались к неотрицательной следующим образом:

$$\phi(y) = f(y) - f^*$$

Нахождение глобального минимума данной функции является трудоемкой задачей ввиду большого перепада значений функции.

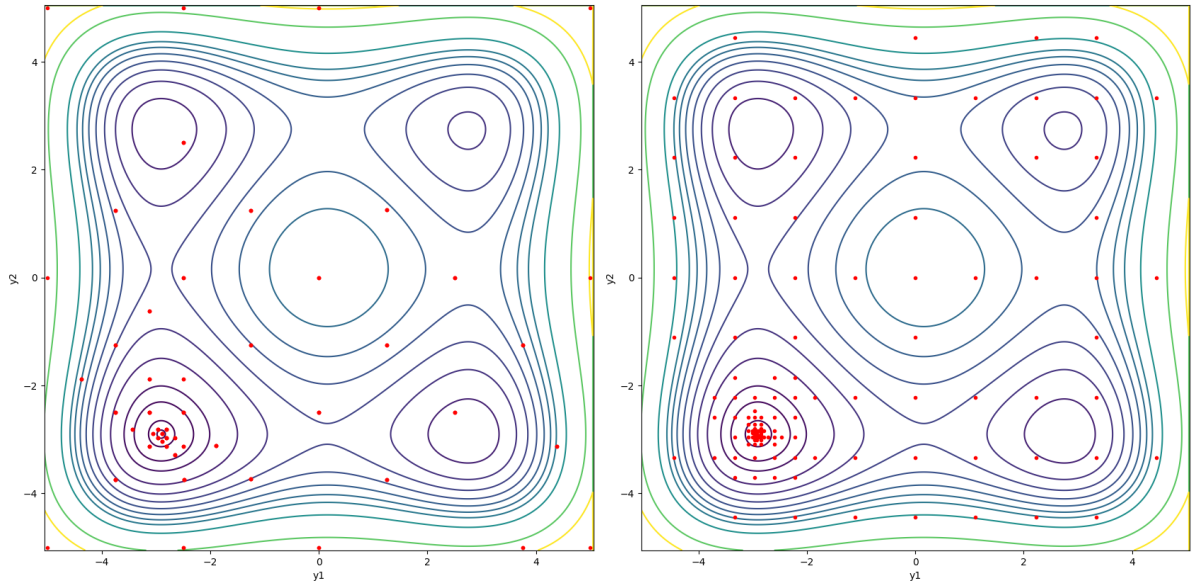


Рис. 2. График функции Стыблинского-Танга и точек испытаний, выполненных МАПН (слева) и DIRECT (справа)

Для решения данной задачи алгоритму DIRECT потребовалось провести 124 испытаний целевой функции (правый рисунок), а МАПН потребовалось провести 50 испытаний целевой функции (левый рисунок).

5. Заключение

По результатам численных экспериментов МАПН для нахождения нулевого значения целевой функции с заданной точностью требуется меньше поисковых испытаний чем алгоритму DIRECT.

Литература

1. Баркалов К.А., Зайцев А.С., Стронгин Р.Г. Алгоритм поиска нуля неотрицательной многоэкстремальной функции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2026. Т. 66, № 3. С. 348-360.
2. Зайцев А.С., Баркалов К.А. Об алгоритме поиска глобального минимума для одного класса многоэкстремальных задач // Сборник трудов IV Молодежной школы. Н.Новгород, Издательство ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2025. С. 39–42.
3. Зайцев А.С., Баркалов К. А. Исследование схем редукции размерности для алгоритма поиска нуля неотрицательной функции // Сборник материалов XII всероссийской научной молодёжной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского. Саранск, 2026. С. 83–87.
4. Yaroslav D. Sergeyev, Roman G. Strongin, Daniela Lera Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves // SpringerBriefs in Optimization, 2013
5. Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // Journal of Optimization Theory and Applications. 1993. Vol. 79, No. 1. P. 157-181.

6. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. – М.: Знание, 1990.
7. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно статистический подход). – М.: Наука, 1978, 240 стр.
8. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E.: Global search based on efficient diagonal partitions and a set of Lipschitz constants// SIAM J. Optim. 16(3), 910-937 (2006).

PANO3DBENCH: ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ МЕТОДОВ ПОНИМАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СЦЕНЫ ПОМЕЩЕНИЯ ПО ОДНОМУ ПАНОРАМНОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ

Е.А. Земсков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача понимания трехмерной сцены помещения по одному панорамному изображению: требуется восстановить трехмерный макет помещения, а также ориентированные ограничивающие параллелепипеды и полигональные сетки отдельных объектов. Опубликованные методы решения этой задачи сложно сопоставить между собой. Авторы оценивают их на разных наборах данных, по разным показателям и в разных вычислительных условиях. В настоящей работе описывается разрабатываемый программный комплекс Pano3DBench, обеспечивающий запуск разнородных методов и вычисление показателей качества в рамках единой воспроизводимой схемы. Приведены его архитектура, состав показателей качества и схема работы. В настоящее время проводится апробация комплекса. Исходный код системы выложен в открытый доступ на GitHub.

Ключевые слова: понимание трехмерной сцены, панорамное изображение, равнопрямоугольная проекция, сравнительная оценка методов, программный комплекс.

1. Введение

Восстановление трехмерной геометрии сцены помещения по одному изображению лежит в основе приложений робототехники, дополненной реальности и цифровых двойников помещений. В панорамной постановке задачи на вход подается одно изображение в равнопрямоугольной проекции, которое охватывает помещение целиком. Такая проекция предполагает, что все вертикальные линии на панораме выровнены с пространственной вертикальной осью системы координат.

Сопоставить напрямую показатели качества работы существующих методов по опубликованным данным затруднительно по двум причинам. Во-первых, авторы оценивают методы на разных наборах данных, по разным показателям качества и в разных условиях. Обзоры литературы [1] сводят опубликованные значения в общие таблицы, но программных средств для их пересчета в одинаковых условиях не предоставляют. Во-вторых, воспроизведению результатов препятствует то, что открытые реализации методов рассчитаны на конкретные версии зависимостей, предобученные веса моделей и особенности вычислительного окружения.

Цель настоящего исследования – разработать программный комплекс, обеспечивающий инфраструктуру для поддержки единой методики оценивания качества решения задачи восстановления трехмерной геометрии помещения, выполнить сравнение доступных реализаций методов и проанализировать возможные направления улучшения качества решения задачи.

2. Постановка задачи

Требуется по одному панорамному RGB-изображению I, приведенному к равнопрямоугольной проекции, восстановить трехмерную сцену $S = (O, L)$, где O – множество объектов сцены, а L – трехмерный макет помещения. Объект описывается ориентированным ограничивающим параллелепипедом, меткой класса и, опционально, полигональной сеткой, натянутой на его поверхность. Макет представляется проекцией помещения на плоскость пола (планом) и высотой помещения.

3. Программная реализация

3.1. Структура программной системы

Программная система состоит из шести компонентов. Схема их взаимодействия и последовательность передачи данных приведены на рис. 1.

1. ***Компонент чтения конфигурации.*** Разбирает файл настроек, в котором заданы набор данных и перечень оцениваемых сцен, список вычисляемых показателей качества, значения допусков и параметры запусков, и передает эти параметры остальным компонентам.

2. ***Компонент чтения данных.*** Загружает панорамные изображения и эталонную разметку набора данных, строит фиксированный перечень тестовых сцен, одинаковый для всех методов, и извлекает эталонные замкнутые полигональные сетки объектов.

3. ***Компонент запуска методов.*** Создает для каждого метода отдельное программное окружение с зафиксированными версиями зависимостей и получает предсказания. Он же вносит в опубликованный код существующих методов минимальные исправления, без которых тот не запускается вне окружения авторов.

4. ***Компонент преобразования результатов.*** Приводит предсказания, выдаваемые методами в собственных форматах, к единому представлению сцены и однократно их сохраняет. Чтобы подключить к комплексу новый метод, требуется описать его программное окружение и реализовать преобразование его результатов.

5. ***Компонент вычисления показателей качества.*** Сопоставляет предсказанные объекты с эталонными и вычисляет показатели всех четырех групп, в том числе показатели формы – по сохраненным и эталонным полигональным сеткам.

6. ***Компонент формирования отчета.*** Сводит вычисленные значения в таблицы, которые можно напрямую сопоставлять между методами.

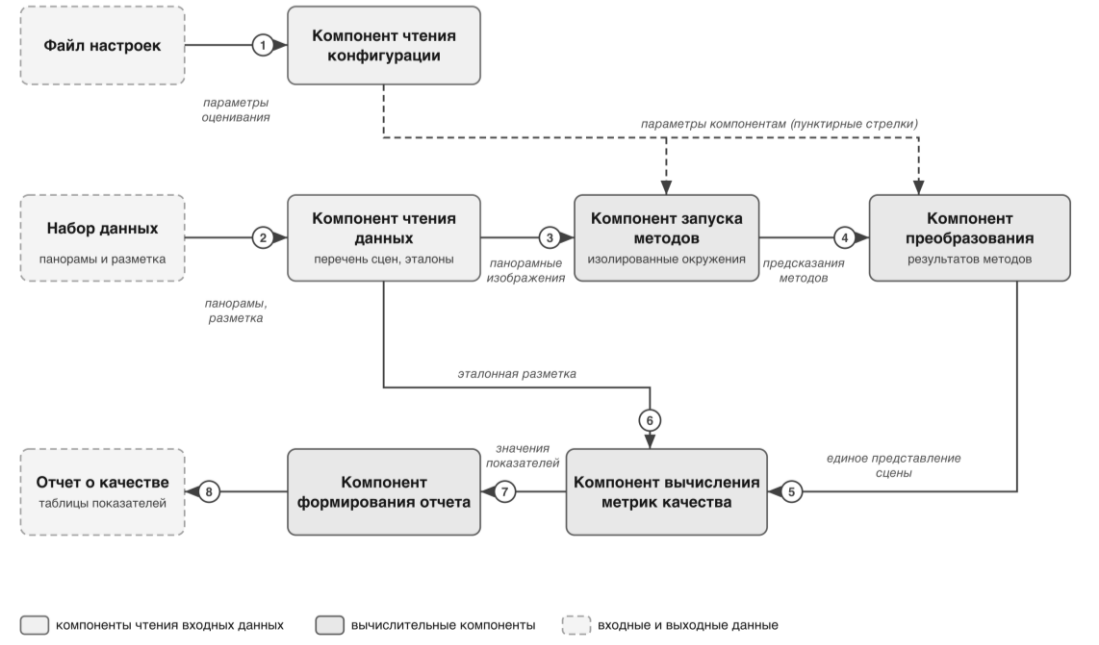


Рис. 1. Схема компонентов программной системы и последовательность их взаимодействия

3.2. Единое представление сцены и изоляция моделей

Ядро комплекса работает с единым представлением результата вида «макет, объекты, отношения». Каждая модель реализует единый программный контракт, но не импортируется в процесс комплекса: адаптер запускает ее в отдельном окружении с зафиксированными версиями зависимостей и обменивается с управляющим процессом файлами в формате JSON. Благо-

даря этому сравниваемые модели могут использовать несовместимые между собой версии зависимостей и вычислительной платформы, оставаясь в одном эксперименте. Новый метод, набор данных или показатель качества добавляется отдельным классом, реализующим соответствующий программный контракт. Ядро комплекса при этом не изменяется.

Однократное сохранение преобразованных предсказаний сокращает обработку сотен сцен с нескольких часов до минуты. Каждый запуск сохраняет конфигурацию, зерно генератора, ревизию исходного кода и сведения об окружении. Перечень вычисляемых показателей задается общим протоколом оценивания, наследуемым конфигурациями всех методов.

3.3. Показатели качества

Показатели разделяются на четыре группы по числу подзадач. Качество детектирования характеризуется средней точностью, вычисляемой по методике конкурса PASCAL VOC [2] и перенесенной на трехмерный случай [3], при заданном пороге трехмерной меры пересечения объемов; качество восстановления макета – значением той же меры. Физическая правдоподобность оценивается частотой столкновений объектов, долей нарушений границ макета и глубиной проникновения в него объектов [1], а точность восстановления формы – расстоянием Чамфера [4] и F-мерой [5] между поверхностями сеток. Все показатели вычисляются одним программным кодом.

4. Текущее состояние работы

В настоящее время проводится апробация комплекса на трех методах с открытым исходным кодом, рассмотренных в обзоре [1]. Все три метода построены на общей программной базе и отличаются друг от друга только модулем восстановления формы объектов и тем, применяется ли оптимизация взаимного расположения объектов. Поэтому сравнение является контролируемым. Если заменить один компонент, оставив остальные без изменений, то разницу в качестве можно отнести на счет именно этого компонента. В ходе апробации методы воспроизводятся в изолированных окружениях, обучаются модули восстановления формы, а полученные значения показателей сопоставляются с опубликованными. Результаты предполагается представить отдельно.

Литература

1. Meng M., Zhu Y., Zhao Y., Li Z., Zhu Z. 3D Indoor Scene Geometry Estimation from a Single Omnidirectional Image: A Comprehensive Survey // Computational Visual Media. 2025. Vol. 11, No. 3. P. 431–464. DOI: 10.26599/CVM.2025.9450438.
2. Everingham M., Van Gool L., Williams C.K.I., et al. The PASCAL Visual Object Classes (VOC) Challenge // International Journal of Computer Vision. 2010. Vol. 88, No. 2. P. 303–338.
3. Song S., Lichtenberg S.P., Xiao J. SUN RGB-D: A RGB-D Scene Understanding Benchmark Suite // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2015. P. 567–576. DOI: 10.1109/CVPR.2015.7298655.
4. Fan H., Su H., Guibas L.J. A Point Set Generation Network for 3D Object Reconstruction from a Single Image // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. P. 605–613. DOI: 10.1109/CVPR.2017.264.
5. Tatarchenko M., Richter S.R., Ranftl R., et al. What Do Single-View 3D Reconstruction Networks Learn? // Proc. IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2019. P. 3405–3414. DOI: 10.1109/CVPR.2019.00352.

$(2K-1)$-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ВЕРШИН ГРАФА[1*]

Ильев В.П., Моршинин А.В.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Рассматривается вариант задачи кластеризации вершин графа (cluster editing, correlation clustering), в котором число кластеров не превосходит заданного целого числа k. Эта задача является NP-трудной. Предложен полиномиальный $(2k-1)$-приближенный алгоритм её решения.

Ключевые слова: кластерный граф, NP-трудная задача, приближенный алгоритм, гарантированная оценка точности.

1. Постановка задачи

В задаче *кластеризации* требуется разбить заданное множество объектов на подмножества (кластеры) в соответствии со сходством объектов друг с другом. Задача кластеризации вершин графа (cluster editing, correlation clustering) [1, 2] является наглядной формализацией этой задачи: вершины графа взаимно однозначно соответствуют объектам, а ребра соединяют пары похожих объектов. Требуется минимизировать суммарное число ребер между кластерами и недостающих ребер внутри кластеров.

Будем рассматривать только *обыкновенные графы*, то есть неориентированные графы без петель и кратных ребер. Граф называется *кластерным*, если каждая его компонента связности является полным графом. Расстоянием $\rho(G_1, G_2)$ между графами $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ на одном и том же множестве вершин V называется мощность симметрической разности $|E_1 \Delta E_2|$. Окрестностью $N_G(v)$ вершины v в графе G называется множество вершин этого графа, смежных с v. Обозначим через $\mathbf{M}_{\leq k}(V)$ множество всех кластерных графов на множестве вершин V, имеющих не более k кластеров.

$\mathbf{CE}_{\leq k}$. Для произвольного графа $G = (V, E)$ и целого числа k, $2 \leq k \leq |V|$, найти ближайший к G кластерный граф $M^* \in \mathbf{M}_{\leq k}(V)$, то есть граф, для которого величина $\rho(G, M^*)$ минимальна среди всех графов из $\mathbf{M}_{\leq k}(V)$.

Задача $\mathbf{CE}_{\leq k}$ является NP-трудной [2, 3, 4]. Для задачи $\mathbf{CE}_{\leq 2}$ в 2004 г. Бансал, Блюм и Чаула [1] разработали 3-приближенный алгоритм. В 2006 г. Агеев, Ильев, Кононов и Талевнин [3] доказали существование рандомизированной полиномиальной приближенной схемы для этой задачи. В том же году Гиотис и Гурусвами [4] предложили рандомизированную полиномиальную приближенную схему для задачи $\mathbf{CE}_{\leq k}$ при любом фиксированном $k \geq 2$. Указав на сложность этой схемы для практического применения, Коулман, Саундерсон и Вирт [5] в 2008 г. предложили 2-приближенный алгоритм для задачи $\mathbf{CE}_{\leq 2}$, использующий локальный поиск. Для задачи $\mathbf{CE}_{\leq 3}$ Ильев, Ильева и Моршинин [6] в 2019 г. предложили два 6-приближенных алгоритма. В 2011 г. Ильев, Ильева и Навроцкая [7] разработали 3^{k-1}-приближенный алгоритм решения задачи $\mathbf{CE}_{\leq k}$ для произвольного фиксированного $k \geq 2$.

В данной работе предложен полиномиальный $(2k-1)$-приближенный алгоритм решения задачи $\mathbf{CE}_{\leq k}$ для произвольного фиксированного $k \geq 3$.

1* Исследование А.В. Моршинина выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015-П.

2. Приближенный алгоритм

Опишем алгоритм $\mathbf{N}_{\leq k}$ решения задачи $\mathbf{CE}_{\leq k}$. Алгоритм перебирает упорядоченные наборы попарно несмежных вершин и по каждому набору строит кластерный граф, кластеры которого порождены окрестностями выбранных вершин.

Вход: граф $G = (V, E)$, целое число $k \geq 3$.
Выход: кластерный граф $M \in \mathbf{M}_{\leq k}(V)$.
Шаг 0. Положить $S = \{K_n\}$, где K_n – полный граф на множестве вершин V.
Шаг 1. Для каждого $i = 1, \ldots, k - 1$ и каждого упорядоченного набора $(v_1, \ldots, v_i)$ попарно несмежных в G вершин построить кластеры $V_j = \{v_j\} \cup (N_G(v_j) \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{j-1}))$, $j = 1, \ldots, i$, а также $V_{i+1} = V \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_i)$. Положить $S = S \cup \{M(V_1, \ldots, V_{i+1})\}$.
Шаг 2. Среди всех графов множества S выбрать ближайший к G кластерный граф M.

Рис. 1. Алгоритм $\mathbf{N}_{\leq k}$

Замечание 1. Трудоемкость алгоритма $\mathbf{N}_{\leq k}$ составляет $O(n^{k+1})$, где $n = |V|$.

Теорема 1. *Алгоритм* $\mathbf{N}_{\leq k}$ *является* $(2k - 1)$*-приближенным, то есть для любого графа* G *выполнено* $\rho(G, M) \leq (2k - 1)\rho(G, M^*)$, *где* M^* *– оптимальное решение задачи* $\mathbf{CE}_{\leq k}$, $k \geq 3$, *а* M *– решение, построенное алгоритмом* $\mathbf{N}_{\leq k}$.

Литература

1. Bansal N., Blum A., Chawla S. Correlation clustering // Machine Learning. 2004. Vol. 56. P. 89-113.
2. Shamir R., Sharan R., Tsur D. Cluster graph modification problems // Discrete Applied Mathematics. 2004. Vol. 144. No. 1-2. P. 173-182.
3. Агеев А.А., Ильев В.П., Кононов А.В., Талевнин А.С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, N 1. С. 3-15.
4. Giotis I., Guruswami V. Correlation clustering with a fixed number of clusters // Theory of Computing. 2006. Vol. 2. No. 1. P. 249-266.
5. Coleman T., Saunderson J., Wirth A. A local-search 2-approximation for 2-correlation clustering // Lecture Notes In Computer Science. 2008. Vol. 5193. P. 308-319.
6. Ильев В.П., Ильева С.Д., Моршинин А.В. Алгоритмы приближенного решения одной задачи кластеризации графа // Прикладная дискретная математика. 2019. N 45. С. 64-77.
7. Ильев В.П., Ильева С.Д., Навроцкая А.А. Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, N 1. С. 41-60.

ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННАЯ НЕЙРОСЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ ПИРОЛИЗА ГАЗОВОЙ СМЕСИ[1*]

Е.А. Каледина

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Рассматривается архитектура физически-информированной нейронной сети для моделирования пиролиза газовой смеси, состоящей преимущественно из метана и этана, в диапазоне температур 1000-1600 К. Архитектура модели основана на декомпозиции реакций и учитывает закон сохранения масс и неотрицательность молярных долей.

Ключевые слова: физически-информированные нейронные сети, химическая кинетика, жесткие системы дифференциальных уравнений, реакционные каналы.

1. Введение

Моделирование задач химической кинетики сопряжено с необходимостью учета физико-химических процессов с существенно разными временными масштабами и неоднородностью течения. Одним из подходов к решению подобных задач является использование физически-информированных нейронных сетей, которые явно встраивают уравнения сохранения массы, импульса и энергии, а также кинетику химических реакций непосредственно в процесс обучения [1].

В обзоре [2] показано, что физико-информированный подход уже применяется во всех ключевых задачах моделирования химической кинетики. В работе [3] предлагается подход к созданию суррогатных моделей с жестким соблюдением законов сохранения элементов, массы, энергии. Такой прием сохраняет устойчивость и физическую корректность при длительном интегрировании. В статье [4] предложена адаптация физико-информированных сетей для жестких систем. В работе [5] предложен фреймворк на основе автоэнкодера, обеспечивающий сохранение элементов. Таким образом, сочетание алгоритмов машинного обучения с физическими законами представляет собой перспективное направление.

В работе рассмотрена нейросетевая модель, совмещающая аппроксимацию жесткой системы уравнений с использованием факторизации и ограничения на сохранение масс.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача пиролиза газовой смеси, состоящей преимущественно из метана и этана, описанная в работе [6]. Целью процесса является конверсия исходных углеводородов в водород и ценные углеродные продукты (этилен, ацетилен, углеродные наноматериалы) при высоких температурах в отсутствие окислителя. Начальное распределение компонентов определяется следующими диапазонами молярных долей: CH_4 – 0-100%, C_2H_6 – 0-100%, C_2H_4 – 0-10%, H_2 – 0-10%, H – 0-10^{-6}%, а также постоянной температурой T, варьирующейся от 1000 до 1600К. Плотность и сумма внутренней и химической энергии смеси фиксированы, поэтому сумма молярных долей компонентов с течением времени не меняется $\sum_i C_i = 1$. Процесс описывается 32 элементарными реакциями и 16 переменными, включая температуру.

Математическая постановка задачи заключается в следующем. Динамика состава газовой смеси описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C, T) \tag{1}$$

где $C = (C_1, \dots C_{15})^T$ – вектор молярных долей $C_i \geq 0$, $i = \overline{1,15}$, T – температура, $f_i(C, T)$ – скорость изменения i-го компонента смеси, определяемая суммой элементарных реакций

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 26-11-00095

$$f_i(C,T) = M_i \sum_{r=1}^{32} v_{ir} k_r(T) \cdot \prod_{j=1}^{15} C_j^{\alpha_{jr}}.$$

Здесь v_{ir} – стехиометрический коэффициент компонента i в реакции r, α_{jr} – порядок реакции по компоненте j, M_i – молярная масса i-го компонента (кг/моль), $k_r(T)$ – константа скорости r-й стадии, задаваемая законом Аррениуса $k_r(T) = A_r \exp(-\frac{E_{ar}}{RT})$, E_{ar} – значения энергии активации, A_r – предэкспоненциальный множитель, R – универсальная газовая постоянная. Система является жесткой, так как временные масштабы реакций различаются на порядки.

Требуется построить нейросетевую модель $\hat{f}_i(C,T)$, аппроксимирующую правую часть системы (1) при возможном диапазоне температур от 1000 до 1600 К.

3. Генерация набора данных

Для обучения нейронной сети необходим большой набор данных, поэтому потребовалось численное решение системы (1). Был использован метод Radau 5, разработанный Э. Хайером и Г. Ваннером [7]. Метод обладает L-устойчивостью, что делает его эффективным для решения жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начальные состояния генерировались по разработанной процедуре, которая включает в себя три стратегии. Первая стратегия формирует 20 начальных составов, соответствующих граничным областям значений компонентов начальной газовой смеси. Вторая стратегия генерирует составы, которые лежат на границах допустимой области, но не совпадают с крайними режимами. Эти составы заполняют промежутки между чистыми компонентами и бинарными смесями. Третья стратегия генерирует точки, равномерно заполняющие внутреннюю область допустимого пространства.

Число начальных точек зависит от температуры. При высоких температурах кинетика реакций быстрее и разнообразнее. При низких температурах кинетика медленнее, поэтому достаточно меньшего числа начальных условий. Поэтому для всех $T \geq 1200\,K$ было сгенерировано по 200 начальных точек, для $T = 1050$ и $T = 1100$– по 150 точек. Для $T = 1000$ генерируются 100 вариантов начальных состояний смеси.

Всего для обучения использовано 1280 наборов начальных состояний, а для валидации и тестирования – по 160.

Так как мольные доли охватывают 15-20 порядков, от 10^{-17} для радикалов до 10^{-1} для основных компонентов, к малым компонентам дополнительно применяется логарифмическое преобразование

$$\tilde{C}_i = \frac{\log(\varepsilon + C_i) - \mu_i}{\sigma_i},$$

где $\varepsilon = 10^{-8}$, μ_i, σ_i – среднее и среднеквадратическое отклонение для $\log(\varepsilon + C_i)$.

4. Архитектура сети

На рис. 1 представлена общая архитектура сети. Она основана на идее декомпозиции реакций, при которой правая часть кинетических уравнений представляется как сумма вкладов независимых каналов. Каждый канал характеризуется собственной зависимостью от состава, собственной температурной зависимостью и собственной связью с компонентами системы. Данный подход был предложен в работе [1], а применительно к химической кинетике развит в работах [8, 9, 10].

Входными данными модели служат вектор молярных долей компонентов смеси и обратная температура.

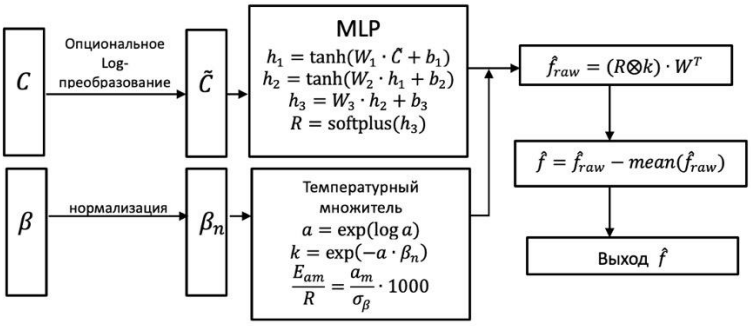


Рис. 1. Архитектура нейронной сети

К особенностям архитектуры также относится факторизация функции скорости с целью разделить зависимость от состава и температуры [11, 12]. Общий вид модели можно представить как

$$\hat{f}_i(C, \beta) = \sum_{m=1}^{M} R_m(C) \cdot k_m(\beta) \cdot W_{m,i} - \frac{1}{S} \sum_j \sum_m R_m(C) k_m(\beta) W_{mj}.$$

Здесь M – подбираемый параметр, соответствующий числу реакционных каналов, $R_m(C)$ – скорость канала m, $k_m(\beta) > 0$ – температурный фактор, $W_{m,i}$ – матрица связи, показывающая как m-й канал влияет на i-й компонент.

Скорость каналов определяется многослойным персептроном

$$R_m(C) = softplus\left(MLP_m(\tilde{C})\right)$$

с двумя скрытыми слоями по 128 нейронов. Использование в качестве активационной функции на выходном слое $softplus(s) = \log(1 + \exp(s))$ позволяет жестко контролировать условие неотрицательности мольных долей C_i. Функция $k_m(\beta)$, аппроксимирующая температуру, имеет вид

$$k_m(\beta) = \exp(-\alpha_m \cdot \beta_n), \alpha_m = \frac{E_{\alpha m}/R}{1000} \cdot \sigma_\beta,$$

где $\beta_n = \frac{\beta - \mu_\beta}{\sigma_\beta}$ – нормированная обратная температура $\beta = \frac{1000}{T}$, α_m – безразмерные коэффициенты, также являющиеся обучаемыми параметрами.

В архитектуре учитывается условие сохранения масс и на финальном шаге скорости центрируются

$$f_i = f_i^{raw} - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{15} f_j^{raw}.$$

Функция потерь сети представляет собой сумму из трех слагаемых

$$L = L_{rate} + w_{traj} L_{traj} + w_{reg} L_{reg}.$$

Здесь L_{rate} – нормированная среднеквадратичная ошибка, деленная на масштаб каждого вида. Она сравнивает предсказанные сетью скорости со значениями, полученными конечно-разностной аппроксимацией производных по эталонным траекториям. L_{traj} оценивает согласованность предсказанных скоростей с наблюдаемой динамикой. L_{reg} – регуляризирующее слагаемое, предотвращающее переобучение.

Слагаемые функции потерь активируются последовательно по эпохам. На первых 40% эпохах активна только L_{rate}. Далее до прохождения 85% эпох обучения добавляется L_{traj}. Затем до конца обучения добавляется L_{reg}. Веса w_{traj} и w_{reg} задаются перед обучением.

Необходимо отметить, что из 15 составляющих системы, не все виды могут быть напрямую использованы в функции потерь ввиду их малой концентрации. Молярные доли этих видов определяются ошибками округления решателя, а не физикой процесса. Обучение на таких данных приводит к запоминанию численного шума. Исключение осуществляется с использованием критериев $std(C_i) > \tau_c$ и $td(f_i) > \tau_r$. Пороги τ_c, τ_r также являются гиперпараметрами.

5. Результаты

По результатам подбора гиперпараметров лучшие результаты показал ансамбль из 5 сетей с следующими параметрами: число каналов $M = 16$, обучение на 2000 эпохах, скорость обучения $lr = 5 \cdot 10^{-4}$, $w_{traj} = 0{,}3$, $w_{reg} = 10^{-6}$, $\tau_c = 10^{-5}, \tau_r = 10^{-6}$. На рисунке 2 показаны кривые обучения.

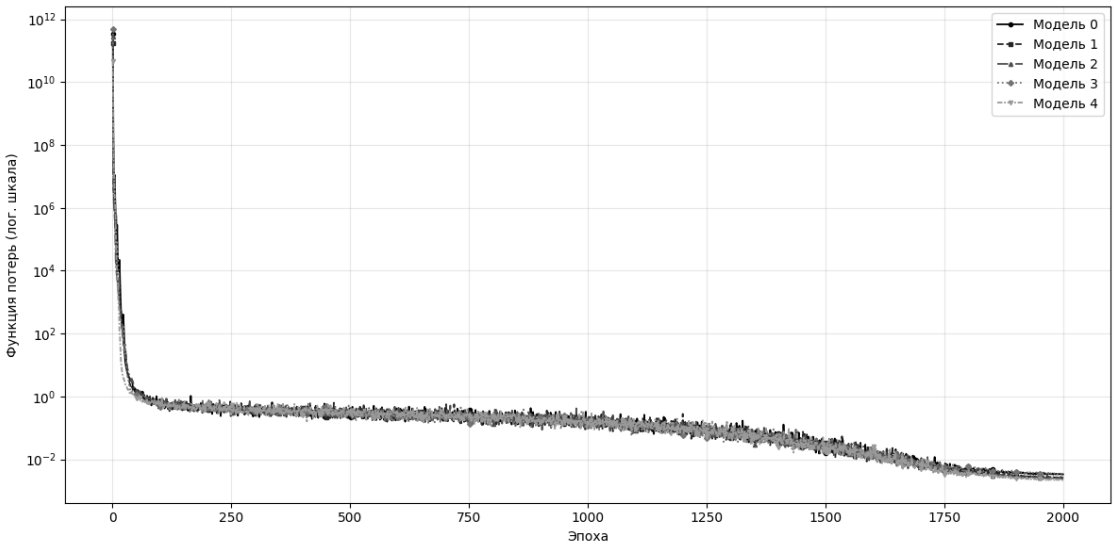


Рис. 2. Кривые обучения

В таблице 1 представлены метрики, полученные на тестовом наборе

Таблица 1. Значения метрик

Метрика	Значение
число составляющих смеси, участвующих в обучении	10
RMSE (нормированная)	$2{,}14 \cdot 10^{-1}$
RMSE (абсолютная)	$3{,}56 \cdot 10^{-3}$
RMSE (для 15 составляющих)	$3{,}12 \cdot 10^{-3}$
MAE (нормированная)	$5{,}15 \cdot 10^{-3}$
MAE (абсолютная)	$4{,}06 \cdot 10^{-5}$
Время обучения	15 894 с.

Нормированная в обученной модели MAE составляет 0,0052, что сопоставимо с опубликованными ранее работами. В работе [5] для аналогичной задачи нормированная MAE составила 0,001–0,6. В работе [12] для нейросетевой модели гидрокрекинга значения RMSE находятся в диапазоне 0.186–1.55. Однако достигнутая точность характеризует модель лишь на десяти компонентах газовой смеси. Пять компонентов ($C_2H_5,\ H,\ C_3H_7, C_3H_6, C_2H_3$) исключены из функции потерь ввиду их доли в смеси. Дальнейшее развитие модели будет направлено на включение всех компонентов смеси в процесс обучения без потери устойчивости.

Литература

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations //Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
2. Tao Ch., Liu Ch., Yang B. Artificial intelligence in combustion reaction kinetics: Methods and applications // Applications in Energy and Combustion Science. 2025. Vol 24. Art. 100422. DOI:10.1016/j.jaecs.2025.100422.

3. Wang T., Yi Y., Yao J., Xu Z.-Q. J., Zhang T., Chen Z. Enforcing physical conservation in neural network surrogate models for complex chemical kinetics // Combustion and Flame. 2025. Vol. 275. Art. 114105. DOI: 10.1016/j.combustflame.2025.114105.
4. Ji W., Qiu W, Shi Z, Pan S, Deng S. Stiff-PINN: Physics-Informed Neural Network for Stiff Chemical Kinetics// arXiv. 2025. https://arxiv.org/pdf/2011.04520. DOI: 10.48550/arXiv.2011.04520.
5. Kumar T., Kumar A., Pal P. Phy-ChemNODE: an end-to-end physics-constrained autoencoder-NeuralODE framework for learning stiff chemical kinetics of hydrocarbon fuels // Frontiers in Thermal Engineering. 2025. Vol 5. Art. 1594443. DOI 10.3389/fther.2025.1594443.
6. Лашина Е.А., Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Математическое моделирование нестационарной температурной конверсии метан-этановых смесей в широком диапазоне температур // Химия в интересах устойчивого развития. 2023. Т. 31, № 3. С. 288-296. DOI 10.15372/KhUR2023467.
7. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Springer-Verlag, 1996. DOI: 10.1007/978-3-662-09947-6.
8. Ji W., Deng S. Autonomous Discovery of Unknown Reaction Pathways from Data by Chemical Reaction Neural Network // The Journal of Physical Chemistry A. 2021. Vol. 125, № 4. P. 1082–1092. DOI: 10.1021/acs.jpca.0c09316.
9. Yang Zheng, Leilei Xu, Xieming Wu, Yuchen Zhou, Dezhi Zhou, Xingcai Lu, Xue-Song Bai, RFNO-PINN: A Physics-Informed Neural Operator for Predicting Multi-Species Combustion Dynamics // Proceedings of the Combustion Institute. 2026. Vol. 42. Art 106152. DOI: 10.1016/j.proci.2026.106152.
10. Ji W., Richter F., Gollner M. J., Deng S. Autonomous kinetic modeling of biomass pyrolysis using chemical reaction neural networks // Combustion and Flame. 2022. Vol. 240. Art. 111992. DOI: 10.1016/j.combustflame.2022.111992.
11. Koenig B. C., Deng S. Kolmogorov–Arnold Chemical Reaction Neural Networks for learning pressure-dependent kinetic rate laws // arXiv. 2025. arXiv:2511.07686. DOI: 10.48550/arXiv.2511.07686.
12. Wan K., Barnaud C., Vervisch L., Domingo P. Chemistry reduction using machine learning trained from non-premixed micro-mixing modeling: Application to DNS of a syngas turbulent oxy-flame with side-wall effects // Combustion and Flame. 2020. Vol. 220. P. 119–129. DOI: 10.1016/j.combustflame.2020.06.008.
13. Ta S., Samavedham L., Raya A., Liu T. Physics–Informed neural ordinary differential equations for hydrocracking kinetics modelig and system identification // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2026. Vol 167. Art. 113808. DOI: 10.1016/j.engappai.2026.113808.

ПЕРЕНОС SIMD-РЕАЛИЗАЦИИ РАЗБОРА UUID НА RISC-V VECTOR EXTENSION

Д.Э. Кахян

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается опыт адаптации существующей SIMD-реализации разбора UUID с архитектуры x86 на RISC-V Vector Extension 1.0. Показано, какие идиомы x86 не имеют прямых аналогов в RVV. Алгоритм одновременно обрабатывает 16 8-битных элементов, что требует VLEN ≥ 128. Это требование вынесено в условие включения через макросы __riscv_vector и __riscv_v_min_vlen. Приведены результаты измерений на процессоре SpacemiT-X60: ускорение успешного разбора составляет 2,7×, 2,2× и 1,8× для char, char16_t и char32_t соответственно.

Ключевые слова: RISC-V, RVV, векторные расширения, SIMD, переносимость кода.

1. Введение

Векторные расширения архитектуры RISC-V (RVV 1.0) поддерживаются как серийными процессорами, так и основными компиляторами, однако перенос существующего SIMD-кода (x86 SSE/AVX, ARM NEON) на RVV не сводится к замене интринсиков, так как часть идиом не имеет аналогов.

В C++-библиотеке Boost.UUID [1] уже существует реализация векторного алгоритма разбора UUID, однако эта реализация поддерживает только расширения из семейств AVX и SSE для архитектуры x86. В работе на примере функции boost::uuid::from_chars рассматривается опыт переноса SIMD-алгоритма на RISC-V Vector Extension.

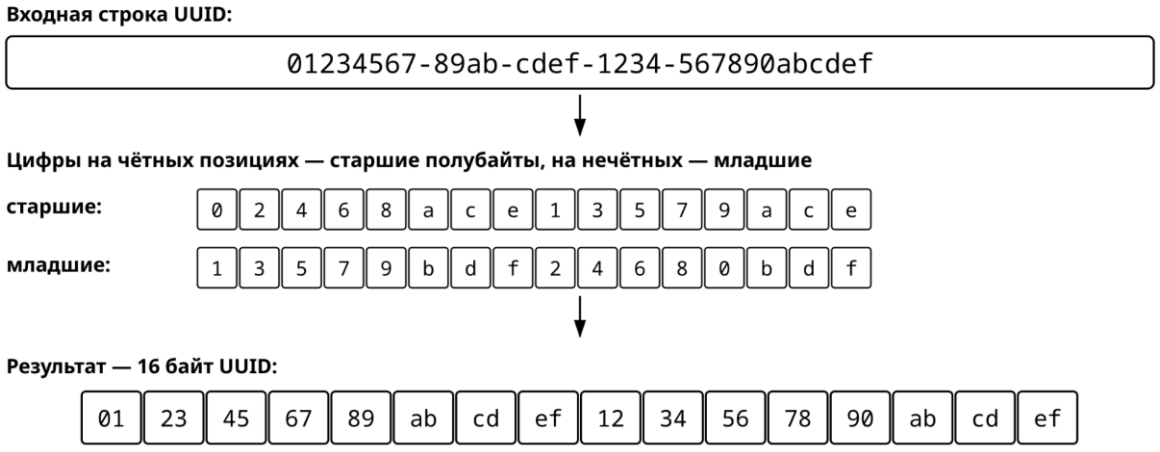


Рис. 1. Схема работы алгоритма

На рис/ 1 изображена схема работы рассматриваемого алгоритма. Функция from_chars преобразует первые 36 символов строки (32 шестнадцатеричные цифры и 4 дефиса) в 16-байтовое значение UUID. Существующая векторная реализация для x86 [1] выполняет разбор за несколько шагов:

1. распределение шестнадцатеричных цифр на четных и нечетных позициях по полубайтам;
2. проверка дефисов;
3. проверка старших полубайтов шестнадцатеричных символов;
4. упаковка полубайтов и одна 16-байтовая запись.

Реализация, полученная в результате данной работы [2], воспроизводит этот алгоритм на интринсиках RVV. Для неполных входных строк (длиной меньше 36 символов) предусмотрен отдельный путь обработки.

2. Реализация разбора UUID на RVV

Полученный алгоритм для RISC-V Vector Extension берёт за основу существующую реализацию для векторных расширений x86 и работает следующим образом. Он разбивает исходную строку на три вектора (16+16+4 символа), после чего выполняются:

1. сборка «среднего» вектора из символов с позиций 8…23, содержащего все четыре дефиса;
2. распределение шестнадцатеричных цифр на четных и нечетных позициях по полубайтам через vrgather.vv с таблицами индексов и vslideup;
3. преобразование символов в числовые значения с помощью сравнений и вычитания;
4. проверка старших полубайтов через vmsne.vx и vfirst.m;
5. упаковка полубайтов и сохранение 16 байтов результата.

Рассматриваемая реализация обрабатывает строку по 16 8-битных символов, и, следовательно, поддерживает только процессоры с длиной вектора не менее 128 бит. Именно поэтому векторный путь должен включаться только при гарантированном VLEN ≥ 128.

Проверка опирается на документированные макросы RISC-V C API __riscv_vector и __riscv_v_min_vlen [3] и явно требует нужную минимальную длину вектора.

Таблица 1. Соответствие операций в существующей и новой реализациях

Операция	**x86 (SSE/AVX)**	**RISC-V Vector Extension**
Сборка полубайтов по чётным/нечётным позициям	pshufb, permutex2var	vrgather.vv, vslideup
«Средний» вектор для проверки дефисов	_mm_shuffle_pd	vslidedown, vslideup
Проверка старших полубайтов	cmpeq, movemask, countr_zero	vmsne.vx, vfirst.m
Выбор элементов по маске	blendv	vmerge.vvm
Сужение широких символов	packus_epi16/epi32	vnsrl
Загрузка констант в вектор	неявное приведение simd_vector → __m128i	vle8.v
Частичная загрузка	maskz_loadu_* (AVX-512) либо несколько обычных загрузок блоками по 1/2/4/8 элементов	vle8.v/vle16.v/vle32.v

В таблице 1 показано, какие векторные инструкции используются для выполнения операций в каждой из двух реализаций. Отдельно отметим две особенности RISC-V Vector Extension, которые необходимо было учесть при переносе. Во-первых, типы RVV не имеют фиксированного размера (sizeof для vuint8m1_t не определён) [4], поэтому идиома x86 – неявное приведение константы типа simd_vector к векторному типу, используемое там повсеместно, – в RVV не применима: константы приходится загружать явно. При этом такие константы, как например, нулевые векторы, формируются размножением (vmv.v.x). Во-вторых, из-за отсутствия двухвекторного байтового перемешивания [4] «средний» вектор собирается двумя инструкциями.

Для неполных строк загрузка выполняется с установленной длиной вектора, равной числу оставшихся символов: для char используется vle8.v, для char16_t и char32_t – vle16.v и vle32.v соответственно. Согласно спецификации RVV, элементы, находящиеся дальше установленной длины вектора, не вызывают исключений [4], поэтому обращение за границу входной строки невозможно. Это позволило отказаться от промежуточного буфера с обнулением и копированием при обработке неполных строк.

Проект Boost.UUID оснащён штатным набором тестов [1]. Рассматриваемая реализация успешно проходит эти тесты на процессоре SpacemiT-X60, а также при сборке кросс-компилятором и запуске через QEMU User space emulation.

3. Результаты

Таблица 2. Скорость успешного разбора UUID, млн вызовов в секунду

Тип символа	Скалярный алгоритм	RVV	Ускорение
char	4,12	11,25	2,73×
char16_t	4,12	9,13	2,22×
char32_t	4,30	7,75	1,80×

Таблица 3. Скорость разбора с ошибкой для 8-битных символов, млн вызовов в секунду

Сценарий ошибки	Скалярный алгоритм	RVV	Отношение
Конец ввода на 35-м символе	3,78	10,11	2,67×
Конец ввода на 1-м символе	145,20	11,00	0,08×
Пропущенный дефис в позиции 23	6,63	11,33	1,71×
Пропущенный дефис в позиции 8	17,29	11,58	0,67×
Недопустимый символ в позиции 35	4,35	10,72	2,46×
Недопустимый символ в позиции 0	106,49	11,02	0,10×

В таблицах 2–3 представлены результаты замеров производительности на процессоре SpacemiT-X60 @ 1.6GHz (GCC 16.1.0) с помощью программы uuid_from_chars_perftest.cpp, взятой из Pull Request, в котором был представлен SIMD-алгоритм для x86 [5]. Поздние ошибки и успешный разбор ускоряются в 1,7–2,7 раза. Ранние ошибки (конец ввода на первом символе, недопустимый символ в позиции 0) замедляются примерно в 10–13 раз, поскольку ошибка обнаруживается уже после запуска векторной обработки, но ещё до того, как её стоимость окупает себя.

Таблица 4. Сравнение производительности векторных расширений x86, млн вызовов в секунду. В скобках указано изменение относительно скалярного алгоритма. Сценарии с ошибкой приведены для 8-битных символов

Сценарий	Скалярный алгоритм	SSE4.1	AVX2	AVX10.1
Успех char	101,55	131,67 (1,30×)	163,54 (1,61×)	117,00 (1,15×)
Успех char16_t	104,1	102,17 (0,98x)	109,88 (1,06x)	131,43 (1,26x)
Успех char32_t	39,84	103,07 (2,59x)	100,96 (2,53x)	106,64 (2,68x)
Конец ввода на 35-м символе	77,19	86,35 (1,12×)	97,99 (1,27×)	93,18 (1,21×)
Конец ввода на 1-м символе	93,35	115,41 (1,24×)	155,82 (1,67×)	137,87 (1,48×)
Пропущенный дефис в позиции 23	68,49	101,38 (1,48×)	123,56 (1,80×)	138,89 (2,03×)
Пропущенный дефис в позиции 8	73,31	101,34 (1,38×)	143,55 (1,96×)	146,38 (2,00×)
Недопустимый символ в позиции 35	74,97	95,26 (1,27×)	92,63 (1,24×)	102,07 (1,36×)
Недопустимый символ в позиции 0	87,85	94,38 (1,07×)	121,15 (1,38×)	119,79 (1,36×)

В таблице 4 представлены результаты замеров производительности для векторных расширений SSE4.1, AVX2 и AVX10.1 на процессоре Intel Xeon Gold 6148 @ 2.40GHz (GCC 16.1.0), полученных с помощью той же программы. Из таблицы видно, что ускорение, как и в случае RVV, достигает увеличения в 2,7 раза.

Таким образом, можно видеть, что поведение полученной векторной реализации качественно совпадает с поведением на x86.

В результате работы был создан Pull Request в GitHub-репозитории проекта Boost.UUID. Реализация была включена в основную ветку проекта.

Литература

1. Boost.UUID. URL: https://www.boost.org/doc/libs/release/libs/uuid/ (дата обращения: 01.10.2026).
2. Boost.UUID pull request #196: Add RISC-V Vector Extension implementation of from_chars. URL: https://github.com/boostorg/uuid/pull/196 (дата обращения: 01.10.2026).
3. RISC-V C API Specification. URL: https://github.com/riscv-non-isa/riscv-c-api-doc (дата обращения: 01.10.2026).
4. RISC-V Vector Intrinsics Specification. URL: https://docs.riscv.org/reference/vector-c-intrinsics/_attachments/v-intrinsic-spec.pdf (дата обращения: 01.10.2026).
5. Boost.UUID pull request #186: Add SIMD implementation of from_chars. URL: https://github.com/boostorg/uuid/pull/186 (дата обращения: 01.10.2026).

ГЛОБАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА E_7 В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2[1*]

М.И. Кузнецов, М.М. Рабиа

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматриваются глобальные деформации простой алгебры Ли типа $\boldsymbol{E_7}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Приводятся результаты об интегрируемости коциклов, принадлежащих сингулярной орбите относительно присоединенной группы Шевалле, и не интегрируемости коциклов из блестящей и светящейся орбит 56-мерной группы локальных деформаций

Ключевые слова: простая алгебра Ли типа $\boldsymbol{E_7}$, деформации алгебр Ли, алгебраически замкнутое поле характеристики 2

1. Введение

Глобальной деформацией алгебры Ли L с умножением $[x, y]$ будем называть семейство алгебр Ли L_t с умножением $[x, y]_t = [x, y] + tf_1(x, y) + t^2 f_2(x, y) + \cdots$, а также любую алгебру Ли, получающуюся специализацией параметра t (см. [1]). Билинейное отображение f_1является коциклом, эквивалентным деформациям соответствуют когомологичные коциклы. Поэтому группа $H^2(L, L)$ иногда называется группой локальных деформаций. Коцикл f_1 (или его класс когомологий) называется интегрируемым, если он продолжается до глобальной деформации.

Известно, что классические алгебры Ли над полями характеристики отличной от 2 являются жесткими за исключением алгебры Ли C_2 характеристики 3 (см. [2-4]). Локальные деформации классических алгебр Ли с однородными системами корней изучаются в [5]. В этой работе вычисляются группы локальных деформаций. Согласно [5] единственными простыми алгебрами с однородными системами корней, имеющие нетривиальную группу $H^2(L, L)$, являются алгебры Ли типа A_3, A_5, D, E_7. Деформации алгебр Ли A_3, A_5, D рассматриваются в работах [5-8]. Глобальные деформации алгебры Ли типа A_3 исследованы полностью. В случае алгебры Ли типа A_5 орбиты коциклов относительно соответствующей группы Шевалле являются орбитами три-векторов 6-мерного пространства. Глобальные деформации построены для три-векторов ранга не выше 4. Среди алгебр Ли серии D вопрос об интегрируемости локальных деформаций остается открытым только для алгебр типа D_6. В настоящей работе исследуются глобальные деформации простой алгебры Ли типа E_7.

2. Деформации простой алгебры Ли L типа E_7 в характеристике 2

Согласно [4] $dim H^2(L, L) = 56$. Применяя результаты [4], нетрудно убедиться, что естественное действие группы Шевалле G типа E_7 автоморфизмами алгебры L превращает $H^2(L, L)$ в G – модуль, который отличается от стандартного модуля $V(\omega_7)$ морфизмом Фробениуса. Действие G на этом модуле исследуется в работах [10-12]. В частности, в [12] найдены все G-орбиты. Орбита, содержащая весовые векторы, называется сингулярной. Остальные орбиты называются блестящая, светящаяся и темные орбиты (названия принадлежат B.N. Cooperstein, 1995). Применяя технику каскадов [13], авторы получили следующий результат.

Теорема. Коциклы, принадлежащие сингулярной орбите, продолжаются до глобальной деформации простой алгебры Ли типа E_7 . Коциклы, принадлежащие блестящей или светящейся орбите, не интегрируемы.

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России, госзадание, проект FSWR-2026-0007

Литература

1. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras // Ann. of Math. 1964. 79. P.59-103.
2. Рудаков А.Н. Деформации простых алгебр Ли // Изв. Ан СССР, сер. матем. 1971. Т. 35. С.1113–1119.
3. Джумадильдаев А.С. К деформациям классических простых алгебр Ли // УМН. 1976. Т. 31. N.3. С.211–212.
4. Кузнецов М.И., Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли // Матем. сб. 2000.Т.191. С. 69–88.
5. Чебочко Н. Г. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике два. I // Матем. сб. 2005. 196(9). С.125–156.
6. Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли типа D_l над полем характеристики 2 // Труды НГТУ. 2011. Т. 86(1). С.337–341.
7. Chebochko N. G., Kuznetsov M. I. Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra of type G2 in characteristic 2 // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45(7). P.2969–2977.
8. Kuznetsov M. I., Chebochko N. G. Global deformations of a Lie algebra of type A5 in characteristic 2 // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41(2). P.94–98.
9. Steinberg R. Automorphisms of classical Lie algebras // Pacific J. of Math. 1960. Vol 11. P.1119–1129.
10. Vavilov N.A., Luzgarev A.Y. Chevalley groups of type E_7 in the 56-dimensional representation // J. Math. Sci. 2012. Vol. 180. P.197–251.
11. Plotkin E.B., Semenov A.A., Vavilov N.A., Visual Basic Representations: An Atlas // Int. J. Alg. Comp. 1998. Vol. 8(1). P.61–95.
12. Певзнер И.М. Орбиты векторов некоторых представлений. III // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2023, Т. 522. С.152–163.
13. Kostant B. The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group// Moscow Math. J. 2012. Vol. 2(3). P.605–620.

ДЕФОРМАЦИИ РАСШИРЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ *PSL*(3) С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1*]

М.И. Кузнецов, М.М. Рабиа

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматриваются полупростые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, которые являются расширениями алгебры $\boldsymbol{psl(4)}$ с помощью внешнего дифференцирования. Дается описание глобальных деформаций таких расширений.

Ключевые слова: классические алгебры Ли, дифференцирования, деформации алгебр Ли, поле характеристики 2

1. Введение

В развитие результатов о классификации простых алгебр Ли над полями характеристики 2 и 3 (см., например, [1]) мы изучаем простые алгебры Ли малой размерности, которые обычно исключаются из рассмотрения при доказательстве общих утверждений. Компьютерный поиск таких алгебр над полем Z_2 был выполнен в работах [2-4], в статье [5] 14-мерные алгебры Ли из полученного списка сопоставлены с деформациями известных простых алгебр Ли. Настоящая работа продолжает это направление исследований и посвящена деформациям полупростых алгебр Ли характеристики 2 с ядром типа A.

2. Деформации алгебры Ли $psl(4)+<d>$ и дифференцирования деформаций $psl(4)$

Деформации простых классических алгебр Ли исследуются в работах [6]–[10]. В докладе рассматриваются алгебры Ли $L = L'+<d>$, где L'– простая классическая алгебра Ли типа A, т.е. $L' = psl(n)$, d – внешнее дифференцирование алгебры L'. Все дифференцирования классических алгебр Ли в характеристике 2 найдены в работе [11]. В частности, для рассматриваемого случая n чётно и при $n > 4$ алгебра Ли $L = pgl(n)$. Ранее было доказано, что если $n = 4$, то с точностью до изоморфизма существуют две неизоморфные алгебры Ли L – алгебра с нильпотентным дифференцированием d и алгебра $pgl(4)$.

Ранее были получены следующие результаты:

1. Если n чётно, $n > 2, L = pgl(n)$, то $H^2(L, L) = 0$, т.е. алгебра Ли $pgl(n)$ является жёсткой;

2. Если $L = psl(4)+<d>$, $d-$ нильпотентное дифференцирование алгебры L', то $H^2(L, L) \neq 0$. Найдены все весовые подпространства второй группы когомологий.

В настоящей работе мы реализуем все глобальные деформации в случае нильпотентного дифференцирования. Доказано, что имеется только три варианта деформации:

1. Меняется только внешнее дифференцирование d алгебры $psl(4)$ на другое дифференцирование;

2. Алгебра $psl(4)$ деформируется в $H(4: 1, \omega)$ или $S(3: 1, \omega)$ при сохранении d;

3. Алгебра $psl(4)$ деформируется в $S(3: 1, \omega)$, а дифференцирование d заменяется на другое дифференцирование алгебры $S(3: 1, \omega)$. Для этого необходимо найти $Der\big(H(4: 1, \omega)\big)$ и $Der\big(S(4: 1, \omega)\big)$, поскольку, согласно результатам [8], алгебра $psl(4)$ деформируется в $H(4: 1, \omega)$ и $S(3: 1, \omega)$.

Здесь $H(4: 1, \omega)$ – симплектическая алгебра Ли, соответствующая форме

[1*] Работа выполнена при поддержке НОМЦ «Математика технологий будущего»

$$\omega = (1 + x_1x_3)\, dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4,$$

со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = (1 + x_1x_3)\big(\partial_1(f)\partial_3(g) + \partial_3(f)\partial_1(g)\big) + \partial_2(f)\partial_4(g) + \partial_4(f)\partial_2(g),$$

S (3: 1, ω) – специальная алгебра Ли, соответствующая форме объема

$$\omega = (1 + x_1x_2x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Литература

1. Kondrateva A.V., Kuznetsov M.I. Filtered deformations of graded nonalternating Hamiltonian Lie algebras // Russian Math. 2024. V. 68(9). P.86–90.
2. Eick B. Some new simple Lie algebras in characteristic 2 // J. Symbolic Comput. 2010. V. 45(9). P. 983–951.
3. Eick B., Moede T. Computing subalgebras and Z2-gradings of simple Lie algebras over finite fields // Comp. Math. 2022. V. 30(2). P.37–50.
4. Cushing D., Stagg G. W., Stewart D. I. A Prolog assisted search for new simple Lie algebras found by computer and non-alternating Hamiltonian algebras // Math. Comp. 2024. V. 93. P.1473–1495.
5. Kondrateva A.V., Kuznetsov M.I. New simple Lie algebras found by computer and nonalternating Hamiltonian algebras // Commun. Comp. Inform. Sci. 2025. V. 2363. P.185–197.
6. Кузнецов М.И., Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли // Матем. сб. 2000. Т.191(8). С. 69–88.
7. Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике два. I // Матем. сб. 2005. Т. 196(9). С.125–156.
8. Chebochko N.G., Kuznetsov M.I. Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra of type G2 in characteristic 2 // Commun. Algebra. 2017. V. 45(7). P. 2969–2977.
9. Kuznetsov M.I., Kondrateva A.V., Chebochko N.G. Simple 14-dimensional Lie algebras in characteristic two // J. Math. Sci. 2019. V. 240(4). P.474–480.
10. Kuznetsov M.I., Chebochko N.G. Global deformations of a Lie algebra of type A5 in characteristic 2 // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41(2). P.94–98.
11. Пермяков Д.С. Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2 // Вестник ННГУ. Серия Математика. 2005. Вып. 1(3). С.123–134.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАВИСАЮЩИХ БПЛА НА ОСНОВЕ МИКРОДОПЛЕРОВСКИХ ВСПЛЕСКОВ

И.А. Куклев, Е.М. Портнов

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Зеленоград

Предложен метод обнаружения зависающих БПЛА радиолокатором ЛЧМ-НИ по периодическим микродоплеровским всплескам вращающихся лопастей при интенсивной наземной помехе и тепловом шуме. Обработка включает ортогональное проектирование на априорный шаблон (ОПАШ), формирование спектра мощности всплесков на основе преобразования Габора и БПФ и обнаружение методом УЯ-ПУЛТ. Предварительные сведения о скорости объекта не требуются. В компьютерном эксперименте при ОСП −21 дБ и ОСШ −23 дБ цель обнаруживается даже при визуально неразличимых всплесках. Получен аналитический множитель порога детектора для теоретически обоснованного решающего правила.

Ключевые слова: радиолокатор ЛЧМ-НИ, обнаружение зависающих БПЛА, микродоплеровский всплеск, подавление наземной помехи, УЯ-ПУЛТ.

1. Введение

Расширение применения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в гражданской и коммерческой сферах, равно как и случаи их противоправного использования, повышает требования к безопасности нижнего яруса воздушного пространства [1–4]. Роторные БПЛА относятся к маловысотным, малоскоростным и малоразмерным (МММ) целям [5]. Их отражения поэтому могут слабо выделяться на фоне окружающей обстановки, а обнаружение и идентификация штатными средствами радиолокационного наблюдения оказываются затруднены [6, 7]. Для работы с МММ-целями применяются радиолокаторы ЛЧМ-НИ, сочетающие высокое разрешение по дальности с отсутствием ближней «мёртвой» зоны [8–11].

При зависании радиальная скорость планера БПЛА стремится к нулю, и его доплеровское смещение оказывается близким к характеристикам наземной помехи. В результате устройства селекции движущихся целей (СДЦ) могут подавлять эхо-сигнал объекта вместе с помехой. Это приводит к пропускам обнаружения и снижает эффективность энергетического тракта [12, 13]. Значительная часть современных исследований связана с использованием микродоплеровских признаков вращающихся частей БПЛА. Изучаются методы время-частотного анализа [14–18], оценки параметров микродвижения и распознавания радиолокационных сигнатур [19–20].

Вместе с тем во многих публикациях предполагается, что дальностная ячейка цели известна заранее [20]. В работах, где микродоплеровские данные непосредственно используются для обнаружения [2, 19], чаще рассматриваются перемещающиеся БПЛА либо применяются пороговые значения, подобранные экспериментально. Таким образом, обнаружение зависающего БПЛА на фоне интенсивной помехи остаётся недостаточно изученной задачей: режекция нулевой доплеровской частоты может подавлять эхо планера, а микродоплеровские признаки – маскироваться шумом.

В настоящей работе решающее правило переносится из плоскости «дальность–Доплер», где основным признаком служит перемещение объекта, в область частоты микродоплеровских всплесков. Здесь анализируется регулярность сигналов, создаваемых вращающимися лопастями. Обработка включает три последовательных этапа: ОПАШ подавляет помеху, блок формирования спектра мощности всплесков концентрирует энергию периодической компоненты, а детектор УЯ-ПУЛТ сравнивает полученный спектр с заданным порогом [30]. Основные результаты работы следующие: разработан узел подавления интенсивной наземной помехи на основе ортогонального проектирования, сохраняющего при принятых предположениях гауссовскую модель шума; предложен способ формирования спектра мощности всплесков для выделения слабого эхо-сигнала; получен аналитический множитель порога детектора, позволяющий сформулировать теоретически обоснованное решающее правило.

2. Модель системы

Радиолокатор ЛЧМ-НИ излучает сигнал с линейной частотной модуляцией, несущей частотой f_0, полосой качания B и наклоном $S = B/T_r$, где T_r – длительность развёртки. Разрешение по дальности определяется выражением $\Delta R = c/(2B)$, где c – скорость распространения электромагнитной волны. Если объект находится на начальной дальности R_0 и движется с постоянной радиальной скоростью v_r, то после понижающего преобразования и фильтрации нижних частот сигнал биений имеет вид:

$$s(t) = A \cdot \exp\left[j2\pi\left(\frac{SR_0}{c}\right)t\right]. \quad (1)$$

БПФ по быстрому времени формирует отклик, сжатый по дальности. Если взять отсчёт на центральной частоте i-й дальностной ячейки, то дискретный ряд по медленному времени, соответствующий планеру БПЛА, записывается следующим образом:

$$x_b(m) = A_b \cdot \exp[j2\pi f_D(m-1)T_r], \quad m = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Здесь A_b – максимальная амплитуда эхо-сигнала планера; f_D – доплеровская частота; M – число импульсов на интервале когерентной обработки (ИКО).

Для n-й вращающейся лопасти протяжённостью L в узкополосном приближении, при котором изменение аргумента дальностного sinc-множителя вдоль лопасти не выходит за пределы разрешения по дальности, сигнал лопасти можно представить в виде:

$$x_n(m) = A_n \cdot \operatorname{sinc}\left[2\pi\left(\frac{f_{D,\max}}{c}\right)(R_0 + d_n)\right] \cdot \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi f_{\text{flash}}(m-1)T_r}{N_b}\right] \cdot \exp[j2\pi f_D(m-1)T_r]. \quad (3)$$

Здесь A_n – комплексная амплитуда рассеяния одной лопасти; d_n – расстояние до её эффективного фазового центра; N_b – число лопастей; f_{flash} – частота лопастных всплесков:

$$f_{\text{flash}} = N_b \cdot f_{\text{rot}}. \quad (4)$$

Здесь f_{rot} – частота вращения ротора. При чётном числе лопастей симметричные пары могут проходить синхронно, поэтому N_b теоретических всплесков объединяются в $N_b/2$ самостоятельных компонентов. Суммарный сигнал БПЛА по медленному времени определяется выражением $x(m) = x_b(m) + \Sigma\, x_n(m)$.

Наземная помеха формируется совокупностью эхо-сигналов от множества неподвижных отражателей. Поскольку каждый отражатель стационарен, m-й элемент помехового вектора в i-й дальностной ячейке имеет вид:

$$c_i(m) = C_i \cdot \exp\left[j2\pi\left(\frac{SR_i}{c}\right)T_r m\right]. \quad (5)$$

Здесь C_i – комплексная амплитуда результирующего рассеяния помехи, модуль которой предполагается распределённым по закону Рэлея. Принятый вектор по медленному времени записывается как $y_i = x_i + c_i + n_i$, где n_i – комплексный белый гауссов шум. Для зависающего БПЛА ($f_D = 0$) эхо планера имеет нулевую доплеровскую характеристику, аналогичную характеристике неподвижной помехи. Поэтому фильтр подавления помехи способен одновременно ослаблять и отражение планера. Предлагаемая обработка использует периодическую микродоплеровскую сигнатуру роторной составляющей.

3. Метод обнаружения микродоплеровских всплесков

Разработанная схема состоит из трёх последовательных узлов. Первый узел, ОПАШ, подавляет наземную помеху посредством ортогонального проектирования. Второй преобразует двумерное время-частотное представление в одномерный спектр мощности всплесков. Третий узел – детектор УЯ-ПУЛТ – выделяет целевой пик на фоне остаточного шума с использованием аналитически рассчитанного порога.

3.1. Ортогональное проектирование на априорный шаблон

При отсутствии цели выполняют N_s независимых предварительных обзоров. Усреднение этих реализаций по медленному времени даёт априорный шаблонный вектор помехи $\hat{c}_i$; мощность остаточного шума при этом уменьшается приблизительно пропорционально $1/N_s$. В каждой дальностной ячейке из принятого вектора вычитают его проекцию на направление шаблона:

$$r_i = y_i - \frac{y_i^H \hat{c}_i}{\|\hat{c}_i\|^2} \hat{c}_i \quad (6)$$

Такое проектирование подавляет компоненту, направленную вдоль шаблона, и сохраняет сигналы, относящиеся к другим частотным компонентам. При принятых предположениях микродоплеровская сигнатура ротора в значительной степени сохраняется. Кроме того, поскольку операция является линейным преобразованием комплексного гауссовского входного сигнала, остаток r_i остаётся совместно комплексным гауссовским случайным вектором. Это свойство используется при аналитическом выводе порога.

3.2. Формирование спектра мощности всплесков

После подавления помехи остаток r_i содержит микродоплеровскую сигнатуру и шумовую составляющую. Чтобы сосредоточить периодическую энергию, связанную с прохождением лопастей, в пике одномерного спектра, выполняют четыре операции.

Шаг 1. Время-частотное разложение Габора. Выполняется кратковременное преобразование Фурье с гауссовским окном [16]:

$$G(\tau, f) = \sum_m r_i(m)\, w(m-\tau) \exp[-j2\pi f m] \quad (7)$$

Здесь $w(\cdot)$ – гауссовское окно, обеспечивающее компромисс между временным и частотным разрешением.

Шаг 2. Проецирование мощности вдоль частотной оси. Мгновенную мощность накапливают по доплеровской частоте:

$$P(\tau) = \sum_f |G(\tau, f)|^2 \quad (8)$$

Шаг 3. Спектральное разложение с использованием БПФ. Формируется комплексный спектр частот всплесков:

$$S(k) = \mathrm{DFT}\{P(\tau)\}, \quad k = 0, \ldots, N_{\mathrm{FFT}} - 1 \quad (9)$$

Шаг 4. Формирование мощностного спектра всплесков:

$$P_{\mathrm{flash}}(k) = |S(k)|^2 \quad (10)$$

При наличии БПЛА регулярность всплесков может создавать в P_{flash} выраженный пик на частоте f_{flash}. В отсутствие цели спектр P_{flash} должен иметь преимущественно шумовой характер. Амплитуда целевого пика в S возрастает пропорционально числу импульсов M, а мощность пика в P_{flash} – приблизительно пропорционально M^2. Мощность фонового шума при этом увеличивается линейно по M. Такое каскадное накопление может давать дополнительный выигрыш при увеличении длительности ИКО.

3.3. Обнаружение УЯ-ПУЛТ

Фоновый шум в спектре P_{flash} приближённо описывается экспоненциальным распределением. Поэтому множитель порога можно аналитически связать с заданной вероятностью ложной тревоги P_{fa}. Для N_{ref} опорных ячеек оценка шумовой мощности имеет вид:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N_{\mathrm{ref}}} \sum_{k \in \Omega} P_{\mathrm{flash}}(k) \quad (11)$$

Здесь Ω – совокупность опорных ячеек. Порог обнаружения задаётся выражением:

$$T = \hat{\sigma}^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{P_{\mathrm{fa}}}\right) \cdot \left(\frac{N_{\mathrm{ref}}}{\sum_{j=0}^{N_{\mathrm{ref}}-1} 1/j!}\right) \quad (12)$$

Остаточный пик постоянной составляющей на нулевой частоте, связанный с эхом планера, подавляют защитной полосой. Дальностную ячейку считают содержащей БПЛА, если неравенство $P_{flash}(k) > T$ выполняется хотя бы для одной частотной ячейки. Частоту всплесков уточняют параболической интерполяцией по трём точкам в окрестности максимума. Если число лопастей N_b известно, частоту вращения ротора вычисляют как $f_{rot} = \hat{f}_{flash}/N_b$.

3.4. Расширение на нестационарные помехи

Колебания растительности под воздействием ветра могут вносить в помеху переменную составляющую. Для её учёта метод дополняют режекторным фильтром во время-частотной плоскости. Фильтр удаляет из проекции мощности (8) низкочастотные доплеровские ячейки

$|f| < f_{notch}$. Значение f_{notch} выбирают так, чтобы охватить полосу остаточной переменной составляющей помехи. Предельная микродоплеровская частота на конце лопасти обычно существенно выше ширины режекции, поэтому часть высокочастотной энергии всплесков сохраняется. При выполнении принятых предположений операция не нарушает независимость и гауссовский характер оставшихся шумовых отсчётов; следовательно, аналитический порог УЯ-ПУЛТ можно применять без изменения структуры детектора.

4. Численные результаты

Численный эксперимент проведён при следующих параметрах. Несущая частота РЛС составляла 5 ГГц, полоса – 100 МГц, что соответствует разрешению по дальности 1,5 м; длительность развёртки равнялась 100 мкс, а длительность ИКО – 0,25 с (M = 2500 импульсов). Объект находился на начальной дальности 100 м; ЭПР планера составляла 0,1 м². Частота вращения ротора была равна 30 об/с, число лопастей – четырём, длина лопасти – 0,3 м, ЭПР лопасти – 0,01 м². Расчётная частота всплесков составляла f_{flash} = 120 Гц. Подавляющий шаблон усреднялся по N_s = 5 обзорам, выполненным при отсутствии цели. Для детектора УЯ-ПУЛТ задавались $P_{fa} = 10^{-6}$, по 8 опорных ячеек с каждой стороны и защитная полоса шириной 10 Гц.

ОСП и ОСШ рассчитывали по средней мощности эхо-сигнала планера БПЛА и соответствующим мощностям помехи и шума в сигнале биений до сжатия по дальности. При ОСП = −21 дБ и ОСШ = −23 дБ традиционные методы заметно теряют эффективность: высокий помеховый гребень в нулевой доплеровской ячейке перекрывает отклик объекта, а фильтр СДЦ может подавлять эхо планера зависающего БПЛА вместе с помехой.

После применения ОПАШ вертикальные помеховые гребни исчезают со спектрограмм Габора, а остаточная энергия распределяется по доплеровской области более равномерно. Роторные всплески в целевой ячейке при ОСШ = −23 дБ по-прежнему не различимы визуально из-за высокого уровня шума. Однако после формирования спектра мощности всплесков периодическая составляющая создаёт пик на частоте 119,97 Гц, превышающий порог УЯ-ПУЛТ. Отношение пика к фону составляет 19,97 дБ, а оценённая частота вращения ротора – 29,99 об/с, что соответствует относительной ошибке 0,03 %.

Зависимость вероятности обнаружения от ОСШ для стационарной помехи при фиксированном ОСП = −21 дБ показывает: при ОСШ около −30 дБ вероятность обнаружения близка к нулю, затем с ростом ОСШ увеличивается и при ОСШ = −20 дБ достигает 92 %. Рабочей точке с вероятностью обнаружения 80 % соответствует ОСШ примерно −23 дБ. Число предварительных обзоров N_s также влияет на характеристики метода: при увеличении N_s от 1 до 10 среднее пиковое ОСШ возрастает с 11,52 до 17,60 дБ.

Сравнение с эталонным методом ПЭОП [17] – предварительным энергетическим отбором по профилю дальности с попиксельной пороговой обработкой КВПФ – показывает ограниченность его применения в рассматриваемых условиях. При распределённой рэлеевской помехе энергетический отбор по дальности не гарантирует надёжного выделения целевой ячейки, а одиночные всплески могут иметь статистические характеристики, близкие к шумовым. По вычислительной нагрузке предлагаемый метод (18,60 мс на ячейку) и ПЭОП (19,90 мс) сопоставимы; классическая двумерная процедура «дальность–Доплер + ПУЛТ» требует 818,03 мс.

Для нестационарной модели собственного движения помехи (СДП) [31] совместное применение режекции во время-частотной области и ОПАШ обеспечивает обнаружение цели с пиковым ОСШ 16,07 дБ при ОСП = −21 дБ и ОСШ = −22 дБ. В тех же условиях для СДЦ-режектора пиковое ОСШ составляет 4,88 дБ, что соответствует пропуску цели. Двумерная карта вероятности обнаружения в координатах ОСП–ОСШ для модели СДП показывает, что линия уровня 80 % ограничивает практическую область работоспособности, а рассматриваемая рабочая точка находится вблизи этой линии. Проверка критерием Колмогорова–Смирнова не выявляет противоречий экспоненциальной модели фона P_{flash}: значение p равно 0,8105 для стационарной помехи и 0,6769 для нестационарной.

5. Обсуждение

Главный результат работы – методика обнаружения зависающих БПЛА по регулярности микродоплеровских всплесков лопастей, а не по радиальной скорости объекта. Узел ОПАШ рассчитан на стационарную наземную помеху, для которой направляющий вектор сохраняется неизменным на протяжении ИКО. При нестационарной помехе к основной схеме может быть добавлена режекция во время-частотной области.

Одно из возможных направлений дальнейшего исследования – замена одиночного помехового шаблона избыточным многоатомным словарём, формируемым с помощью алгоритма ортогонального согласованного преследования (ОМП) [16], в сочетании с эмпирически калиброванным порогом. При заметном изменении обстановки шаблон можно периодически пересчитывать на интервалах, где отсутствие целей считается достаточно обоснованным, либо задавать на основе априорных сведений о структуре помехи.

6. Заключение

Рассмотрена методика обнаружения зависающих БПЛА по микродоплеровским всплескам с помощью радиолокатора ЛЧМ-НИ при наличии интенсивной наземной помехи и теплового шума. Она объединяет три последовательных узла: подавление помехи посредством ОПАШ, формирование спектра мощности всплесков и обнаружение с использованием УЯ-ПУЛТ. ОПАШ опирается на предположение о стационарности помехи и подавляет её ортогональным проектированием. При принятых условиях микродоплеровская сигнатура ротора может сохраняться, а статистическая модель остаточного шума позволяет использовать аналитически полученный порог.

Результаты численного эксперимента свидетельствуют о возможности обнаружения объекта при ОСП = −21 дБ и ОСШ = −23 дБ даже в ситуации, когда всплески визуально неразличимы во время-частотной плоскости. Сочетание ОПАШ с накоплением энергии в частотной области ослабляет влияние помехи и помогает выделить слабый эхо-сигнал на фоне шума. Для нестационарных помех методику можно расширить режекцией во время-частотной области; при выполнении принятых предположений аналитический порог УЯ-ПУЛТ сохраняет применимость без изменения структуры детектора.

Литература

1. Garvanov I. Analysis of micro-Doppler signatures for drone detection / I. Garvanov, M. Garvanova, D. Borissova [et al.] // 19th Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems (ELMA): proceedings. Sofia, Bulgaria, 2025. P. 1–5.
2. Yang Z. UAV detection based on OTFS ISAC system / Z. Yang, Q. Wang, G. Liu, Z. Ma // 2025 IEEE 101st Vehicular Technology Conference (VTC2025-Spring): proceedings. Oslo, Norway, 2025. P. 1–7.
3. Narayanan R. M. Classification and discrimination of birds and small drones using radar mi-cro-Doppler spectrogram images / R. M. Narayanan, B. Tsang, R. Bharadwaj // Signals. 2023. Vol. 4. P. 337–358.
4. Zhang Y. D. Enhanced micro-Doppler feature analysis for drone detection / Y. D. Zhang, X. Xiang, Y. Li, G. Chen // 2021 IEEE Radar Conference (RadarConf21): proceedings. Atlanta, GA, USA, 2021. P. 11–14.
5. Ji G. Detection and identification of low-slow-small rotor unmanned aerial vehicle using mi-cro-Doppler information / G. Ji, C. Song, H. Huo // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 95–108.
6. Gong J. Radar challenges and solutions for drone detection / J. Gong, J. Yan, D. Li // 26th International Radar Symposium (IRS): proceedings. Hamburg, Germany, 2025. P. 21–28.
7. Knott E. F. Radar Cross Section. 2nd ed. Norwood, MA: Artech House, 2004 P. 38–48.
8. Chen X. Micro-motion classification of rotor UAV and flying bird via CNN and FMCW radar / X. Chen, J. Guan, J. Li, W. Chen // Artificial Intelligence for Communications and Networks. Cham: Springer, 2021. P. 55–67.

9. Xu Z. Decoupled parameter estimation of small UAV rotors using FMCW radar / Z. Xu, C. Chen, S. Tian [et al.] // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2025. P. 45–58.
10. Oh B.-S. Extraction of global and local micro-Doppler signature features from FMCW radar returns for UAV detection / B.-S. Oh, Z. Lin // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2021. Vol. 57. P. 51–60.
11. Skolnik M. I. Introduction to Radar Systems. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2001 P. 16–29.
12. Mughal A. M. Drone detection and classification on micro-Doppler signatures using FMCW radar / A. M. Mughal, A. Shahid, M. Z. Shaukat [et al.] // 20th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST): proceedings. Murree, Pakistan, 2023. P. 56–60.
13. Richards M. A. Fundamentals of Radar Signal Processing. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Education, 2014 P. 6–21.
14. Fang X. Rotor blades micro-Doppler feature analysis and extraction of small unmanned rotorcraft / X. Fang, G. Xiao // IEEE Sensors Journal. 2021. Vol. 21. P. 33–39.
15. Fan S. Micro-Doppler signature detection and recognition of UAVs based on OMP algorithm / S. Fan, Z. Wu, W. Xu [et al.] // Sensors. 2023. P. 43–48.
16. Chen V. C. The Micro-Doppler Effect in Radar. 2nd ed. Norwood, MA: Artech House, 2019 P. 32–55.
17. Sun Y. Micro-Doppler signature-based detection, classification, and localization of small UAV with LSTM / Y. Sun, S. Abeywickrama, L. Jayasinghe [et al.] // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2021. P. 75–84.
18. Hoffmann F. Micro-Doppler based detection and tracking of UAVs with multistatic radar / F. Hoffmann, M. Ritchie, F. Fioranelli [et al.] // 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf): proceedings. Philadelphia, PA, USA, 2016. P. 84–93.
19. Finn H. M. Adaptive detection mode with threshold control as a function of spatially sam-pled clutter-level estimates / H. M. Finn, R. S. Johnson // RCA Review. 1968. P. 63–81.
20. Monti-Guarnieri A. Vegetated target decorrelation in SAR and interferometry: models, simulation, and performance evaluation / A. Monti-Guarnieri, M. Manzoni, D. Giudici [et al.] // Remote Sensing. 2020. P. 52–63.

РАЗРЕШЕНИЕ ГРУППОВЫХ ВОЗДУШНЫХ ЦЕЛЕЙ В РАДИОЛОКАЦИОНЫХ СТАНЦИЯХ НАБЛЮДЕНИЯ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

И.А. Куклев, Е.М. Портнов

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Зеленоград

Предложен способ разрешения групповых воздушных целей (ГВЦ) в радиолокационных станциях наблюдения при отсутствии априорных сведений о составе группы. Вместо последовательного перебора гипотез задача разделяется на две линейные подзадачи: по дальности используется огибающая одиночного импульса, по угловой координате – огибающая пачки после квазиоптимальной фильтрации. Матрицы характеристик измерительных каналов обращаются через сингулярное разложение и псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза. Получены выражение порога обнаружения через сингулярные числа и правило выбора числа каналов. При ограничении допустимого прироста ОСШ 10 дБ расчётный максимум составляет 18 каналов для прямоугольной, 11 для гауссовой и 14 для косинусоидальной характеристики.

Ключевые слова: радиолокационная станция наблюдения, групповые воздушные цели, разрешающая способность, сингулярное разложение, псевдообратная матрица, порог обнаружения, измерительные каналы.

1. Введение

Для обзорной РЛС недостаточно лишь зарегистрировать отражение от воздушного объекта: при наблюдении компактной группы требуется установить, является ли отметка одиночной или образована несколькими целями, а в рабочем режиме – по возможности разделить объекты по дальности и угловым координатам. Поэтому разрешающая способность непосредственно влияет на качество последующего сопровождения, распознавания и целераспределения.

Повышение углового разрешения часто связывают с цифровой обработкой антенных решёток, включая MUSIC, ESPRIT и методы максимального правдоподобия [1–5]. Их возможности, однако, зависят от качества оценки корреляционной матрицы, объёма выборки и многоканальной структуры приёмника. Для значительной части обзорных РЛС это означает рост аппаратной и вычислительной сложности. Статистические схемы разрешения ГВЦ, основанные на последовательной проверке гипотез о числе объектов и их параметрах, также быстро усложняются с ростом размерности модели [6–10].

В работе рассматривается иной подход: временная и пространственная составляющие узкополосного эхосигнала обрабатываются раздельно, а неизвестные комплексные амплитуды определяются из линейных систем. Матрицы этих систем формируются из известных характеристик измерительных каналов, после чего решение получают посредством сингулярного разложения (SVD) и псевдообращения. Такой переход исключает перебор вариантов состава группы; вычислительная сложность основной линейно-алгебраической операции имеет порядок $O(NP^2)$, где N – число уравнений, P – число измерительных каналов.

Требования к разрешению зависят и от режима применения станции. При дежурном наблюдении принципиально важно отличать одиночную отметку от групповой и оценивать состав группы; при активной работе возникает дополнительная задача координатного разделения её элементов. При этом повышение разрешения не должно приводить к такому росту требуемого ОСШ или вычислительной нагрузки, который сделает алгоритм непригодным для штатного темпа обзора. Именно поэтому далее рассматривается схема, в которой сложность определяется выбранным числом измерительных каналов, а не количеством перебираемых гипотез о целях.

Отдельным ограничением является одноканальная архитектура многих обзорных РЛС. Методы пространственной сверхразрешающей обработки способны давать высокий результат, но обычно предполагают доступ к многоканальным данным антенной решётки. В рассматриваемой постановке измерительные каналы формируются алгоритмически из известных временных или угловых характеристик, поэтому основная идея может быть реализована без физического многоканального пространственного приёма.

2. Постановка задачи

Пусть РЛС излучает периодический узкополосный импульсный сигнал и выполняет обзор в плоскости одной угловой координаты. Его комплексное представление запишем в виде:

$$i(t) = E_0\, U(t) e^{j\varphi(t)} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \tag{1}$$

где E_0 – амплитуда несущей; $U(t)$ и $\varphi(t)$ задают соответственно амплитудную и фазовую модуляцию; ω_0 и φ_0 – круговая частота и начальная фаза несущего колебания.

Пусть в импульсном объёме находятся M целей. Предполагается, что размеры каждой из них меньше элементов разрешения по рассматриваемым координатам, эхосигналы когерентны на интервале обработки, объекты группы не разделяются по радиальной скорости, а флуктуации отражений внутри пачки согласованы. Тогда полезная составляющая может быть представлена как:

$$\dot{x}(t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} G_l(\alpha_m) E_m e^{j\varphi_m} \times \widetilde{U}\left(t - t_{m,l}\right) e^{j(\omega_0 \pm \Omega)(t - t_{m,l})} \tag{2}$$

$$t_{m,l} = t_m + (l-1)T_l, \qquad t_m = \frac{2D_m}{c}, \qquad m = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, L$$

Здесь $G_l(\alpha_m)$ – известный вес l-го импульса, определяемый модуляцией диаграммы направленности; α_m и D_m – угловая координата и дальность m-й цели; E_m и φ_m – её случайные амплитуда и фаза; T_l – период следования; Ω – доплеровская круговая частота; $\widetilde{U}(t)$ – комплексный закон модуляции.

После перехода к комплексной огибающей и дискретизации выражения для непрерывного и k-го дискретного отсчёта принимают вид:

$$\dot{X}(t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} G_l(\alpha_m) E_m e^{j\psi_m} \times \widetilde{U}\left(t - t_{m,l}\right) e^{\pm j\Omega(t - t_{m,l})} \tag{3}$$

$$\dot{X}_k = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} G_l(\alpha_m) E_m e^{j\psi_m} \times \widetilde{U}_{m,k} e^{j\Omega(t_k - t_{m,l})} \tag{4}$$

$$\widetilde{U}_{m,k} = U\left(t_k - t_{m,l}\right) e^{j\varphi_k(t_k - t_{m,l})}, \qquad t_k = k\Delta T, \qquad k = 1, \dots, K$$

На выходе приёмного устройства наблюдается сумма полезного сигнала и комплексного шумового напряжения:

$$\dot{S}_k = \dot{X}_k + \dot{n}_k$$

$$\dot{S}_k = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} G_l(\alpha_m) E_m e^{j\omega_m} U_{m,k} e^{-j\omega_m/2\,(t_k - t_m)} + \dot{n}_k \tag{5}$$

Следовательно, требуется по набору наблюдений оценить состав группы и координаты её отдельных объектов. Прямая нелинейная оценка одновременно всех параметров приводит к многомерному поиску; далее задача преобразуется к двум линейным моделям, связанным с дальностью и углом.

3. Аналитическая модель эхосигнала ГВЦ

Разделение по дальности выполняется на масштабе одиночного импульса, а по угловой координате – на масштабе пачки. В обоих случаях неизвестными остаются комплексные амплитуды, тогда как коэффициенты линейной системы задаются характеристиками измерительных каналов РЛС.

3.1. Разрешение по дальности

Для одного импульса ($L = 1$) изменением доплеровской фазы на его длительности пренебрегаем. Комплексная огибающая принимает вид:

$$\dot{Y}_k = \sum_{m=1}^{M} G\,(\alpha_m) E_m e^{j\varphi_m} \widetilde{U}_{m,k} + \dot{n}_k$$

$$\dot{Y}_k = \sum_{m=1}^{M} \tilde{E}_m\, \widetilde{U}_{m,k} + \dot{n}_k \qquad (6)$$

$$\tilde{E}_m = G(\alpha_m) E_m e^{j\varphi_m}$$

Пусть на длительности импульса размещается P дискретных отсчётов и $M \le P$. Сформируем P измерительных каналов с импульсными характеристиками $f_k(\tau_p)$, соответствующими ожидаемым задержкам τ_p. Соседние характеристики сдвинуты на $\Delta\tau = \Delta T$, причём $\Delta\tau < \tau_c$, где τ_c – длительность сигнала. Для последовательности отсчётов получаем систему:

$$\dot{Y}_{j-P+1} = \tilde{E}_1 f_{j-P+1}(\tau_1) + \cdots + \tilde{E}_P f_{j-P+1}(\tau_P) + \dot{n}_{j-P+1} \qquad (7)$$

$$\vdots$$

$$\dot{Y}_j = \tilde{E}_1 f_j(\tau_1) + \cdots + \tilde{E}_P f_j(\tau_P) + \dot{n}_j$$

В этой записи неизвестные временные коэффициенты исходной модели заменены известными отсчётами характеристик каналов. В матричной форме система имеет компактный вид:

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{F}_t \mathrm{E} + \mathrm{n} \qquad (8)$$

где $Y_t \in C^{N\times 1}$ – вектор наблюдений, $F_t \in C^{N\times P}$ – матрица импульсных характеристик, $E \in C^{P\times 1}$ – вектор неизвестных комплексных амплитуд, n – шум; $N = 2P - 1$.

Структура F_t полностью задаётся принятой сеткой задержек и характеристиками каналов. При фиксированном p изменяется номер временного отсчёта, формируя соответствующий столбец матрицы; при фиксированном отсчёте перебираются каналы. Тем самым наблюдаемый фрагмент сигнала сопоставляется сразу с набором возможных задержек. Важный для дальнейшего свойства модели состоит в том, что число столбцов определяется выбранной дискретизацией координаты, а не неизвестным числом фактических целей в импульсном объёме.

3.2. Разрешение по угловой координате

Для углового разделения используется комплексная огибающая пачки на выходе квазиоптимального фильтра одиночного импульса. В каждом периоде выбирается отсчёт, соответствующий максимуму фильтрованного отклика:

$$\dot{Y}_l = \sum_{m=1}^{M} G_l\,(\alpha_m) Z_m e^{j\Omega(l-1)T_l} + \dot{n}_l, \qquad l = 1, \ldots, L \qquad (9)$$

где Z_m – пиковая комплексная амплитуда отклика m-й цели. Межпериодное изменение фазы, обусловленное радиальной скоростью, компенсируется предварительной оценкой Ω и умножением l-го отсчёта на соответствующий комплексно-сопряжённый фазовый множитель. После компенсации:

$$\dot{Y}_l = \sum_{m=1}^{M} G_l\,(\alpha_m) Z_m + \dot{n}_l \qquad (10)$$

Если на ширину характеристики направленности антенны по уровню половинной мощности приходится P отсчётов, можно задать P угловых измерительных каналов $f_l(\alpha_p)$ с шагом $\delta\alpha < \theta_\alpha$. Тогда модель снова сводится к линейной системе:

$$\mathrm{Y}_\alpha = \mathrm{F}_\alpha \mathrm{Z} + \mathrm{n} \qquad (11)$$

Здесь Y_α – вектор измеренных значений пачки, F_α – матрица известных угловых характеристик, Z – вектор искомых комплексных амплитуд. Размер системы задаётся выбранными шагом координаты и числом каналов, а не неизвестным заранее числом целей.

Угловая матрица строится аналогично дальностной, но вместо сдвинутых импульсных характеристик содержит значения ХНА для последовательности предполагаемых угловых положений. Поэтому обе задачи имеют одну алгебраическую форму. Различаются лишь физический смысл наблюдений и способ формирования F. Это позволяет использовать единый вычислительный блок псевдообращения как для дальностного, так и для углового разделения.

4. Решение на основе сингулярного разложения

Обе системы имеют общий вид $Y = FE + n$. Для их решения используется SVD матрицы характеристик F [11–13]:

$$F = U\Lambda V^H \tag{12}$$

где U и V – унитарные матрицы, Λ содержит сингулярные числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_P > 0$. Благодаря унитарности преобразование наблюдений к левому сингулярному базису записывается как:

$$U^H F = U^H U\Lambda V^H = \Lambda V^H \tag{13}$$

Псевдообратная матрица Мура–Пенроуза выражается непосредственно через компоненты SVD:

$$F^+ = V\Lambda^+ U^H \tag{14}$$

где Λ^+ получают транспонированием Λ и заменой каждого ненулевого λ_p на λ_p^{-1}. Поэтому оценки амплитуд для дальностной и угловой моделей равны соответственно:

$$\hat{E} = F_t{}^+ Y_t = V_t \Lambda_t{}^+ U_t^H Y_t \tag{15}$$

$$\hat{Z} = F_\alpha{}^+ Y_\alpha = V_\alpha \Lambda_\alpha{}^+ U_\alpha^H Y_\alpha \tag{16}$$

Алгоритмически это означает сначала проектирование вектора наблюдений на левый сингулярный базис U, а затем масштабирование проекций обратными сингулярными числами и переход к базису V. Малые λ_p усиливают шумовые компоненты, поэтому число каналов нельзя увеличивать без учёта устойчивости псевдообращения [14, 15].

Первое унитарное преобразование не изменяет энергию наблюдения, а лишь переводит его в координаты, согласованные с матрицей характеристик. Критическим этапом становится деление на сингулярные числа: компоненты, соответствующие большим λ_p, восстанавливаются устойчиво, тогда как малые λ_p усиливают шум. Последующее умножение на V возвращает оценку к координатам исходных измерительных каналов. Таким образом, сингулярный спектр одновременно характеризует информативность выбранной системы каналов и степень возможного усиления шума при восстановлении.

В отличие от прямого обращения квадратной матрицы SVD применимо и при прямоугольной F, то есть при произвольном соотношении числа наблюдений и каналов. Это особенно существенно для рассматриваемой модели, где $N = 2P - 1$ в дальностной задаче и аналогичное избыточное число наблюдений может использоваться при угловой обработке.

5. Порог обнаружения и выбор числа каналов

После псевдообращения оценки сравниваются с порогом, определяемым шумом приёмного тракта и допустимой вероятностью ложной тревоги. При принятой в работе модели порог задаётся выражением:

$$U_{\text{th}} = \sigma k \sqrt{\sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\lambda_p^2}} \tag{17}$$

где σ – среднеквадратичное отклонение шума, k – коэффициент, соответствующий выбранной вероятности ложной тревоги, λ_p – сингулярные числа F [16-20]. Сумма обратных квадратов λ_p показывает, насколько псевдообращение усиливает шум: при появлении малых сингулярных чисел требуемое ОСШ возрастает.

Число каналов P одновременно определяет потенциальное координатное разрешение и устойчивость решения. Поэтому его выбирают по ограничению на допустимый прирост ОСШ $\Delta q^2_{\max}$:

$$P \leq P_{\max} = \arg\max_P \{P\colon \Delta q^2(P) \leq \Delta q^2_{\max}\} \tag{18}$$

В приведённом вычислительном эксперименте при $\Delta q^2_{\max} = 10$ дБ получено $P_{\max} = 18$ для прямоугольной характеристики измерительного канала, 11 – для гауссовой и 14 – для косинусоидальной. Следовательно, для прямоугольной формы устойчивый диапазон составляет $P = 2, \ldots, 18$; для двух других форм верхняя граница уменьшается. Этот результат иллюстрирует компромисс: более плотное разбиение координаты повышает потенциальное разрешение, но делает обращение чувствительнее к шуму.

6. Обсуждение

Предложенная схема отличается тем, что число и координаты целей не входят в размерность решаемой линейной системы. Вместо последовательной проверки гипотез выполняются формирование матрицы характеристик и её SVD; поэтому при фиксированных N и P вычислительные затраты не зависят от фактического количества объектов группы. Раздельная временная и пространственная обработка позволяет использовать один и тот же аппарат псевдообращения для двух координатных задач.

Метод применим к одноканальному приёмному тракту с цифровым формированием измерительных каналов, что отличает его от классических схем ЦОАР [1–3, 20]. При этом ограничения сохраняются: для углового разделения необходимы когерентная межпериодная обработка и компенсация доплеровского фазового набега, а устойчивость оценки определяется спектром сингулярных чисел. Поэтому SVD не устраняет фундаментальную потерю устойчивости при почти линейно зависимых характеристиках каналов, а лишь позволяет количественно её контролировать через λ_p и порог (17).

С вычислительной точки зрения предлагаемая схема заменяет многократный нелинейный поиск одной линейно-алгебраической процедурой. В исходной постановке последовательная проверка вариантов состава группы приводит к числу комбинаций, быстро растущему с M; после перехода к матрице характеристик затраты SVD определяются главным образом N и P и оцениваются как $O(NP^2)$. Это не устраняет стоимость обработки, но делает её предсказуемой при фиксированной конфигурации каналов и не связывает напрямую с реальным количеством целей.

В сравнении с MUSIC и родственными методами [1–5] выигрыш рассматриваемого подхода состоит не в гарантированно более высоком угловом разрешении, а в иной аппаратной постановке: отсутствует необходимость формировать и статистически оценивать пространственную корреляционную матрицу многоканального приёмника. Для больших антенных апертур методы ЦОАР могут обеспечивать более высокое потенциальное угловое разрешение; здесь же приоритетом является возможность работы с цифровыми измерительными каналами одноканальной обзорной РЛС.

Практическая граница метода определяется устойчивостью F. Если характеристики соседних каналов становятся почти линейно зависимыми, некоторые сингулярные числа уменьшаются и псевдообращение заметно усиливает шум. Поэтому увеличение P нельзя трактовать как безусловное улучшение разрешения. Критерий (18) связывает плотность координатной сетки с допустимым энергетическим проигрышем и тем самым задаёт конструктивный способ выбора числа каналов для конкретной формы характеристики.

7. Заключение

Задача разрешения групповых воздушных целей сведена к двум линейным моделям: дальностной, формируемой по огибающей одиночного импульса, и угловой, формируемой по огибающей пачки после компенсации межпериодного фазового набега. В обеих моделях матрица коэффициентов задаётся известными характеристиками измерительных каналов, а неизвестные комплексные амплитуды определяются через SVD и псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза.

Порог обнаружения выражен через дисперсию шума и сингулярный спектр, а число каналов выбирается по допустимому усилению шума при псевдообращении. Для рассматриваемого расчёта при ограничении 10 дБ верхние значения P составили 18, 11 и 14 для прямоугольной, гауссовой и косинусоидальной характеристик соответственно. Дальнейшая проверка метода требует экспериментальных данных действующих РЛС и анализа устойчивости при активных и пассивных помехах.

Литература

1. Schmidt R.O. Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Trans. Anten-nas Propag. 1986. Vol. 34, No. 3. P. 276–280.

2. Roy R., Kailath T. ESPRIT – estimation of signal parameters via rotational invariance tech-niques // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1989. Vol. 37, No. 7. P. 84–95.
3. Stoica P., Moses R.L. Spectral Analysis of Signals. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005. P. 146–147.
4. Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach // IEEE Signal Process. Mag. 1996. Vol. 13, No. 4. P. 67–94.
5. Van Trees H.L. Optimum Array Processing (Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV). New York: Wiley-Interscience, 2002. P. 16–18.
6. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информа-ции на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
7. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория: справочник / под ред. Я.Д. Ширмана. М.: ЗАО «МАКВИС», 1998. 28 с.
8. Бакулев П.А. Радиолокационные системы: учебник для вузов. М.: Радиотехника, 2004. 320 с.
9. Верба В.С. Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Состояние и тенденции развития. М.: Радиотехника, 2008. 32 с.
10. Skolnik M.I. Radar Handbook. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2008. 52 p.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 60 с.
12. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 43 p.
13. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. 4th ed. Baltimore: Johns Hopkins Univer-sity Press, 2013. 56 p.
14. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982. 64 с.
15. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970. 28 с.
16. Леховицкий Д.И. Разрешение групповых воздушных целей в РЛС с цифровой обработ-кой сигналов // Радиотехника. 2015. № 5. С. 45–52.
17. Клепиков Н.И., Смирнов А.В. Методы цифровой обработки сигналов в РЛС разведки // Вестник воздушно-космической обороны. 2018. № 2. С. 78–86.
18. Markovsky I., Van Huffel S. Overview of total least-squares methods // Signal Processing. 2007. Vol. 87, No. 10. P. 283–302.
19. Hansen P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. Philadelphia: SIAM, 1998. 47 p.
20. Li J., Stoica P. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models // IEEE Trans. Signal Process. 2003. Vol. 51, No. 9. P. 57–63.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОТКРЫТИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННЫХ НЕЙРОСЕТЕЙ

Н. И. Курносов[1,2], А. В. Яганов[3], А. Ю. Константинов[1]

[1] Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
[2]ООО «Гарда Технологии», г. Нижний Новгород,
[3]ПАО «Банк «Санкт-Петербург»», г. Санкт-Петербург

Разработка определяющих соотношений для новых материалов остаётся критическим узким местом в вычислительной механике, требующим месяцев экспертного подбора аналитических моделей. Предлагается метод автоматического открытия законов гиперупругости на основе конститутивных искусственных нейронных сетей (CANN), которые по построению удовлетворяют термодинамической согласованности и материальной объективности: сеть моделирует потенциал свободной энергии, а напряжения вычисляются как его производная. Показано, что модель, обученная на данных одноосного растяжения, успешно обобщается на принципиально иной тип нагружения – чистый сдвиг ($R^2 > 0{,}99$ по всем компонентам напряжений), а апостериорный анализ обученной сети позволяет восстановить аналитический вид закона (Нео-Гук). При наличии шума в данных метод показывает существенное преимущество перед разреженной регрессией (SINDy).

Ключевые слова: определяющие соотношения, гиперупругость, физически-информированные нейросети, автоматическое научное открытие, метод конечных элементов.

1. Введение

Определяющие соотношения – математические модели, связывающие напряжения и деформации в сплошной среде. Для нелинейных материалов (резиноподобных эластомеров, биологических тканей, гидрогелей) подбор адекватной модели потенциала свободной энергии $\psi(F)$ традиционно требует ручного перебора аналитических форм (Нео-Гук, Муни-Ривлин, Огден) и глубокой экспертизы [1].

Методы, заменяющие определяющее соотношение нейросетью «в лоб» (P = NN(F)) [2, 3], не гарантируют термодинамической согласованности (возможна генерация энергии внутри материала), нарушают принцип материальной объективности и плохо обобщаются за пределы обучающего распределения.

В данной работе развивается концепция конститутивных искусственных нейросетей (CANN) [4]. В отличие от подхода Flaschel et al. [6], где нейросеть строит библиотеку функций с последующей разреженной регрессией, наш метод обучает потенциал ψ сквозным образом (end-to-end). Новые элементы работы: (1) полностью воспроизводимый пайплайн FEniCSx → PyTorch; (2) строгая проверка обобщения – обучение на одном типе деформации (растяжение) и валидация на принципиально ином (сдвиг); (3) метод апостериорной интерпретации закона из обученной сети; (4) количественное сравнение с SINDy на зашумлённых данных.

2. Метод

Для гиперупругого материала существует потенциал свободной энергии Гельмгольца ψ(F), такой что первое напряжение Пиолы–Кирхгофа $P(F) = \partial\psi(F)/\,\partial F$. Это автоматически гарантирует термодинамическую согласованность (отсутствие диссипации в замкнутом цикле). Принцип материальной объективности требует, чтобы ψ зависела от F только через инварианты правого тензора Коши–Грина; в условиях плоской деформации мы ограничиваемся зависимостью $\psi(I_1, J)$, где $I_1 = \mathrm{tr}\left(F^{\mathrm{T}}F\right)$, $J = \det F$.

Архитектура CANN: на вход подаются инварианты $I_1 - 3$ и $\ln J$; полносвязная сеть (3 скрытых слоя, 64–64–32 нейрона, ≈ 6000 параметров) с активацией Softplus предсказывает ψ; напряжения P вычисляются автоматическим дифференцированием (autograd) как $\partial\psi / \partial F$, что обеспечивает точную согласованность касательного модуля. Нормировка $\psi(I) = 0$ достигается вычитанием значения сети в недеформированном состоянии. Функция потерь: $L = \| P - \hat{P} \|^2 + \alpha \cdot \psi^2(I)$ ($\hat{P}$ – предсказание сети, P – истинное напряжение), $\alpha = 10^{-4}$. Оптимизатор – Adam, мини-батчи по 256 точек, до 3000 эпох с ранней остановкой.

В качестве базового метода для сравнения используется SINDy – разреженная регрессия по библиотеке членов $(I_1 - 3)^m (\ln J)^n$ при $m, n \in \{0,1,2,3\}$, $(m, n) \neq (0,0)$ (всего 15 членов); отбор коэффициентов выполняется методом STLSQ с порогом $\lambda = 0{,}05$.

3. Вычислительные эксперименты

Данные генерировались конечно-элементным решателем FEniCSx с моделью Нео-Гука в качестве ground truth ($\mu = 3{,}846,\ \lambda = 5{,}769$, что соответствует $E = 10,\ \nu = 0{,}3$) на сетке 15×15 элементов при деформациях от 5% до 30% (6 уровней). Обучающая выборка – 80% точек одноосного растяжения (1080 точек), валидационная – оставшиеся 20% (270 точек), тестовая – все 1350 точек чистого сдвига. Тестовая выборка соответствует принципиально иной траектории нагружения, что является строгой проверкой обобщения, а не интерполяции.

4. Результаты

Обучение CANN завершилось за 278,4 секунды на GPU NVIDIA T4 (1247 эпох из 3000). Кривые потерь демонстрируют экспоненциальное падение ошибки на первых 500 эпохах и последующую сходимость к MSE ≈ 10^{-6} без признаков переобучения. Модель, обученная только на растяжении, показывает относительную ошибку RE = 0,0038 на валидации и RE = 0,0333 на тестовой выборке (сдвиг) с коэффициентом детерминации $R^2 > 0{,}99$ по всем компонентам напряжений – то есть открытый закон действительно универсален, а не является интерполяцией обучающих данных.

При добавлении мультипликативного гауссова шума ($\sigma \in \{0;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}05;\ 0{,}10\}$) в обучающие напряжения CANN сохраняет стабильность (RE ≈ 0,033–0,035 при всех уровнях шума), тогда как SINDy, точно восстанавливающий коэффициенты на чистых данных (RE < 0,001), деградирует катастрофически: RE растёт до 7,17 при σ = 0,10. Причина – CANN неявно усредняет шум в мини-батчах, а гладкость активаций подавляет высокочастотные осцилляции потенциала, в то время как матрица библиотеки SINDy становится плохо обусловленной при зашумлении данных.

Апостериорный анализ активаций последнего слоя восстанавливает аналитическую структуру $\psi_{\text{interp}} \approx 1{,}92\,(I_1 - 3) - 3{,}85 \ln J + 2{,}88\,(\ln J)^2$, что с точностью до коэффициентов совпадает с моделью Нео-Гука; восстановленный сдвиговый модуль $\mu \approx 3{,}285$ (истинное значение 3,846, ошибка ≈ 14,6%). Отклонение объясняется ограниченным диапазоном деформаций в обучающих данных и регуляризацией.

5. Заключение

Предложен и реализован сквозной метод автоматического открытия определяющих соотношений гиперупругих материалов на основе термодинамически согласованных конститутивных нейросетей. Показано, что архитектура, гарантирующая термодинамическую согласованность и объективность по построению, успешно открывает закон Нео-Гука по данным одного типа нагружения с обобщением $R^2 > 0{,}99$ на принципиально иную траекторию, а также демонстрирует количественное преимущество над разреженной регрессией в условиях зашумлённых данных. Среди ограничений метода – отсутствие гарантии поликонвексности потенциала и ограничение статической гиперупругостью; направления развития включают применение к реальным экспериментальным данным и интеграцию обученной сети как пользовательского материала (UMAT) в конечно-элементные пакеты.

Литература

1. Holzapfel G. A. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley, 2000.
2. Ghaboussi J., Garrett J. H., Wu X. Knowledge-based modeling of material behavior with neural networks // Journal of Engineering Mechanics. 1991. Vol. 117, No. 1. P. 132–153.
3. Le B., Yvonnet J., He Q. C. Computational homogenization of nonlinear elastic materials using neural networks // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2015. Vol. 104, No. 12. P. 1061–1084.
4. Linka K., Hillgärtner M., Abdolazizi K. P., et al. Constitutive artificial neural networks: A fast and general approach to predictive data-driven constitutive modeling by deep learning // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 429. 110010.
5. Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. Vol. 113, No. 15. P. 3932–3937.
6. Flaschel M., Kumar S., De Lorenzis L. Unsupervised discovery of interpretable hyperelastic constitutive laws // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. Vol. 381. 113852.

ДОФАМИН-МОДУЛИРУЕМАЯ МЕМРИСТИВНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ В ИМПУЛЬСНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ВКУСОВЫХ СТИМУЛОВ[1*]

В.А. Лазовский[1], С.В. Стасенко[1,2], И.М. Кипелкин[1,2,3], В.Б. Казанцев[1,2,3]

[1]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
[3]Сколковский институт науки и технологий, Москва

Рассматривается влияние дофаминоподобной модуляции на мемристивную пластичность в импульсной нейронной сети, предназначенной для непрерывного представления вкусовых стимулов. Вкус кодируется четырехкомпонентным вектором сладости, кислоты, солености и горечи. Возбуждающие связи обучаются по трехфакторному правилу с локальным следом пригодности, а тормозные связи - по мемристивному STDP. Сигнал ошибки предсказания вознаграждения формирует дофаминоподобный коэффициент, изменяющий амплитуду возбуждающих обновлений. Показано, что модуляция практически не меняет точность непрерывного декодирования, но повышает среднюю селективность нейронов второго слоя и перестраивает внутреннее представление вкусовых стимулов.

Ключевые слова: мемристивная пластичность, импульсные нейронные сети, дофаминовая модуляция, вкусовая обработка, STDP, нейроморфные системы.

1. Введение

Нейроморфные сенсорные системы развиваются в направлении архитектур, в которых регистрация сигнала, память и вычисление объединяются в едином контуре. Для вкусовой модальности такой подход особенно естественен, поскольку вкусовой стимул имеет многомерную структуру и должен преобразовываться из физико-химического пространства в распределенную нейронную активность. Современные искусственные вкусовые нейроны и электронные языки уже позволяют непосредственно преобразовывать ионные концентрации в импульсные сигналы и выполнять первичную нейроморфную обработку [1, 2]. Однако для перехода от простого распознавания к адаптивному сенсорному поведению требуется механизм, связывающий локальную синаптическую пластичность с функциональной значимостью предъявляемого стимула.

Мемристивные устройства представляют интерес как физическая основа синаптической памяти, поскольку их проводимость может изменяться постепенно и зависеть от предыстории электрического воздействия. Это позволяет реализовывать нелинейное обновление весов и STDP-подобные механизмы в импульсных нейронных сетях [3, 4]. Вместе с тем локальное правило пластичности, основанное только на активности пре- и постсинаптических нейронов, само по себе не содержит информации о том, является ли конкретный сенсорный эпизод полезным или значимым для текущей задачи. Решением является трехфакторная пластичность, где локальная корреляция активности дополняется глобальным или модулирующим сигналом [5]. В биологических системах сходную роль выполняют нейромодуляторы, в частности дофамин, связанный с ошибкой предсказания вознаграждения.

Цель настоящей работы – определить, изменяет ли дофаминоподобное управление мемристивной пластичностью динамику обучения и внутреннее кодирование непрерывных вкусовых стимулов. Для этого сравниваются две идентично инициализированные сети: исходная и сеть с

[1*] Разработка модели выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSMG-2025-0070); тестирование устойчивости выполнено при поддержке Программы развития Регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2026-1346); обучение и численное моделирование поддержаны Российским научным фондом (проект № 25-71-30008).

дофаминоподобной модуляцией возбуждающих синаптических обновлений. Основное внимание уделяется не только качеству декодирования, но и структуре представления, формируемой во втором нейронном слое.

2. Архитектура сети и модель пластичности

Каждый вкусовой стимул задается вектором $s = [s_{sweet,}\, s_{sour,}\, s_{salty}, s_{bitter}]^T$ компоненты которого нормированы в диапазоне от 0 до 1 и соответствуют сладости, кислоте, солености и горечи. Входная популяция содержит 24 гауссовых place cells, имеющих предпочтительные точки в четырехмерном пространстве вкусов. Отклик каждой входной клетки определяется евклидовым расстоянием от предъявленного стимула до ее предпочтительного вектора при ширине рецептивного поля σ_s = 0,20. Полученные непрерывные отклики преобразуются в пуассоновские последовательности импульсов.

Далее сигнал поступает в два слоя LIF нейронов: первый слой содержит 64 нейрона, второй – 48. Для обоих слоев постоянная времени мембраны составляет 20 мс, потенциал покоя равен -65 мВ, базовый порог генерации импульса -50 мВ. После спайка мембранный потенциал сбрасывается до -65 мВ, а адаптационная переменная увеличивает порог на 0,5 мВ и затем экспоненциально релаксирует с постоянной времени 200 мс. Абсолютный рефрактерный период составляет 5 мс, шаг численного интегрирования – 0,1 мс. Такая динамика обеспечивает зависимое от предшествующей активности снижение возбудимости и препятствует неконтролируемому росту частоты разрядов.

Связи между первым и вторым слоями включают возбуждающий и тормозный пути. Возбуждающие синапсы обучаются по трехфакторному правилу. Для каждого синапса формируется локальный след пригодности e_{ji}, экспоненциально затухающий с постоянной времени 50 мс и изменяемый при пре- и постсинаптических спайках согласно парному STDP. Этот след объединяется с задачезависимым и гомеостатическим компонентами. Величина возбуждающего обновления дополнительно зависит от расстояния текущего веса до верхней границы, что ограничивает насыщение весов. Тормозные L_1, L_2 связи обновляются независимо на основе мемристивного STDP, параметризованного экспериментально измеренными изменениями проводимости при положительных и отрицательных временных задержках между спайками [6].

3. Дофаминоподобная модуляция

Модулирующий механизм вводится на уровне отдельных испытаний. Линейный механизм (C) оценивает ожидаемую ценность текущего вкусового стимула по вектору частот активности первого слоя. Разность между заданной гедонической ценностью $r(s)$ и оценкой C образует ошибку предсказания вознаграждения. После каждого испытания параметры critic корректируются с коэффициентом обучения 0,02. Ошибка предсказания возбуждает дофаминоподобную переменную D, которая сохраняет память о предыдущих испытаниях и затухает с характерным временем 8 испытаний. Из нее вычисляется коэффициент усиления g_{DA}, ограниченный диапазоном 0,2-3,0.

Принципиально важно, что данный сигнал является разрешающим, а не самостоятельным источником пластичности. Коэффициент g_{DA} лишь масштабирует уже сформированное локальным правилом возбуждающее обновление. Поэтому при нулевом локальном трехфакторном сигнале дофаминоподобный контур не создает изменения синаптического веса. Такая организация сохраняет локальный характер синаптического обучения, одновременно позволяя учитывать информацию, определенную на более длительной поведенческой временной шкале. Аналогичная концепция трехфакторной нейромодулируемой пластичности ранее рассматривалась для нейроморфных аппаратных платформ [5, 7].

Обе исследуемые сети используют одинаковые начальные условия и проходят общую предварительную STDP-фазу, после чего разделяются на контрольную и дофамин-модулируемую конфигурации. Далее применяется одинаковый пятиэтапный учебный корректор. Качество непрерывной реконструкции оценивается после обучения с помощью линейного R-декодера, обученного на 1200 образцах и протестированного на 300 согласованных стимулах.

В качестве метрик используются коэффициент детерминации R^2 и евклидова ошибка реконструкции, а организация активности второго слоя дополнительно анализируется по селективности отдельных нейронов и косинусному сходству популяционных ответов.

4. Результаты

В обеих конфигурациях в ходе пяти этапов обучения наблюдалось последовательное снижение валидационной ошибки. В исходной сети она уменьшилась с 0,7617 на первом этапе до 0,5493 на пятом, что соответствует относительному снижению примерно на 27,9 %. В дофамин-модулируемой сети значение уменьшилось с 0,7580 до 0,5543, то есть приблизительно на 26,9 %. На промежуточных этапах траектории несколько различались, однако к завершению обучения их валидационные потери практически совпадали. Следовательно, введение дофаминоподобного коэффициента не привело к заметному улучшению конечной оптимизационной характеристики при использованном протоколе.

При этом динамика возбуждающих весов изменилась более выраженно. Разность среднего веса между модулируемой и исходной сетями была отрицательной на первых четырех этапах и составляла -0,0049, -0,0082, -0,0135 и -0,0039 соответственно. На пятом этапе знак различия изменился, а величина достигла +0,0109. Итоговые средние веса составили 0,7779 в исходной сети и 0,7888 при наличии модуляции. Таким образом, дофаминоподобный контур перестраивал траекторию синаптической самоорганизации даже при сходных конечных значениях валидационной ошибки.

Сам коэффициент g_{DA} работал двунаправленно. За 77 839 испытаний его среднее и медианное значения составили 0,972 и 0,968, а наблюдаемый диапазон - от 0,200 до 2,678. В 52,9 % испытаний коэффициент был меньше единицы. Совокупные абсолютные величины потенцирующих и депрессирующих обновлений составили соответственно 24 125,5 и 24 381,1 условных единиц, а их отношение было близко к единице (0,99). Это показывает, что модулятор не являлся простым постоянным усилителем пластичности: он попеременно ослаблял и усиливал локально сформированные изменения весов.

Главный результат состоит в различии между точностью декодирования и внутренней организацией представления. Коэффициент детерминации для 300 тестовых стимулов составил R^2 = 0,3799 в исходной сети и R^2 = 0,3792 в дофамин-модулируемой, то есть практически не изменился. Средняя евклидова ошибка реконструкции, напротив, незначительно уменьшилась с 0,3991 до 0,3967, но масштаб этого различия недостаточен, чтобы говорить об улучшении непрерывного декодирования. Следовательно, при данном размере сети и протоколе обучения нейромодуляция не увеличивала количество информации о вкусовом векторе, доступной линейному декодеру.

Одновременно средний индекс селективности нейронов второго слоя увеличился с 0,3100 до 0,3626. Это указывает на более выраженную специализацию части нейронов по отношению к отдельным компонентам или областям вкусового пространства. Однако число нейронов с $SI > 0{,}5$ уменьшилось с 6 до 4, поэтому рост средней селективности не следует интерпретировать как однозначное увеличение числа высокоспециализированных единиц. На популяционном уровне среднее внедиагональное косинусное сходство ответов для шести репрезентативных вкусовых профилей выросло с 0,9550 до 0,9591. Более высокое косинусное сходство соответствует более близким направлениям векторов активности, то есть разделение прототипов не улучшилось и даже слегка снизилось.

5. Заключение

Проведенное моделирование показывает, что дофаминоподобная модуляция способна существенно влиять на организацию мемристивного синаптического обучения, не обязательно повышая конечную точность сенсорного декодирования. В исследованной сети модулятор изменял фазовую траекторию возбуждающих весов и повышал среднюю селективность нейронов второго слоя, тогда как коэффициент детерминации непрерывной реконструкции оставался практически неизменным. Полученный результат подчеркивает различие между качеством ли-

нейно декодируемого сенсорного сигнала и структурой внутреннего нейронного представления.

Ограничением работы является сравнительно небольшой масштаб сети и фиксированная плотность рецептивного кодирования. Невысокое абсолютное значение R^2 может быть связано с ограниченной разрешающей способностью входного представления, поэтому перенос обнаруженной реорганизации на более высокую точность декодирования требует проверки на более крупных сетях, при иной плотности place cells и при систематическом варьировании параметров модуляции. Тем не менее предложенная схема демонстрирует вычислительно контролируемый способ интеграции локальной мемристивной пластичности с сигналом функциональной значимости и может использоваться как основа для дальнейшего развития адаптивных нейроморфных сенсорных систем.

Литература

1. Han J.-K., Park S.-C., Yu J.-M., Ahn J.-H., Choi Y.-K. A bioinspired artificial gustatory neuron for a neuromorphic based electronic tongue // Nano Letters. 2022. Vol. 22, No. 13. P. 5244–5251. DOI: 10.1021/acs.nanolett.2c01107.
2. Yang L., Wang Z., Zhang S., Li et al. Neuromorphic gustatory system with salt-taste perception, information processing, and excessive-intake warning capabilities // Nano Letters. 2023. Vol. 23, No. 1. P. 8–16. DOI: 10.1021/acs.nanolett.2c02775.
3. Kim T., Hu S., Kim J., et al. Spiking neural network (SNN) with memristor synapses having nonlinear weight update // Frontiers in Computational Neuroscience. 2021. Vol. 15. Art. 646125. DOI: 10.3389/fncom.2021.646125.
4. Kipelkin I.M., Gerasimova S.A., Guseinov D.V., et al. Periodic and quasi-periodic dynamics of neuronal oscillators based on an inorganic memristive device // Chaos, Solitons & Fractals. 2026. Vol. 208. Art. 118304. DOI: 10.1016/j.chaos.2026.118304.
5. Frémaux N., Gerstner W. Neuromodulated spike-timing-dependent plasticity, and theory of three-factor learning rules // Frontiers in Neural Circuits. 2016. Vol. 9. Art. 85. DOI: 10.3389/fncir.2015.00085.
6. Nikiruy K.E., Emelyanov A.V., Demin V.A., et al. Dopamine-like STDP modulation in nanocomposite memristors // AIP Advances. 2019. Vol. 9, No. 6. Art. 065116. DOI: 10.1063/1.5111083.
7. Mikaitis M., Pineda García G., Knight J.C., Furber S.B. Neuromodulated synaptic plasticity on the SpiNNaker neuromorphic system // Frontiers in Neuroscience. 2018. Vol. 12. Art. 105. DOI: 10.3389/fnins.2018.00105.
8. Zhang Y., Liu L., Qiao Y., Yao T., Zhao X., Yan Y. Confinement of ions within graphene oxide membranes enables neuromorphic artificial gustation // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2025. Vol. 122, No. 28. Art. e2413060122. DOI: 10.1073/pnas.2413060122.

МОРФИНГ РАСЧЁТНОЙ СЕТКИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ[1*]

И.Г. Лебедев, М.А. Быкова, Д.А. Фадеев, И.А. Шумилов, А.Д. Буянов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Предложен алгоритм переноса вычислительной сетки с одного геометрического тела на другое, представленное STEP-моделью. Метод включает установление соответствия между двумя геометрическими моделями, построение соответствия между первой моделью и исходной сеткой, перенос узлов на рёбра по параметру и перенос узлов граней с использованием методов свободной деформации и проекции сетки на грань. После фиксации соответствующих поверхностных узлов выполняется перенос объёмной сетки методом свободной деформации по ключевым точкам. При этом сохраняется топология исходной сетки, а деформация распространяется по ней с минимальными локальными искажениями.

Ключевые слова: расчетная сетка, перенос сетки, STEP-геометрия, проекция на грань, свободная деформация.

1. Введение

Построение качественной расчетной сетки для сложных геометрических моделей является трудоемкой и вычислительно затратной задачей. При многократном изменении геометрии, например в задачах оптимизации и параметрического моделирования, повторная генерация сетки существенно увеличивает время подготовки расчетов. Если изменения геометрии не приводят к изменению ее топологии, целесообразно использовать существующую сетку, выполняя ее перенос и деформацию в соответствии с новой геометрией [1, 2]. При этом необходимо обеспечить соответствие геометрических объектов исходной и целевой моделей и сохранить топологию расчетной сетки. Для решения этой задачи предлагается многоэтапный алгоритм морфинга, выполняющий перенос сетки последовательно для ребер, граней и объемной части модели. В качестве исходных данных используются две геометрические модели в формате STEP и расчетная сетка исходной модели в формате K.

2. Описание метода

2.1. Общая схема алгоритма

Алгоритм состоит из пяти основных этапов: чтение входных данных; установление соответствия между первой моделью и исходной сеткой; перенос узлов, лежащих на рёбрах; перенос узлов граней и последующий перенос объёмной сетки. Такая последовательность позволяет использовать уже определённые соответствия как ключевые данные для следующих этапов.

На первом этапе считываются две STEP-модели [3] и K-сетка. В текущей реализации предполагается топологическая эквивалентность моделей, а также идентичность их представления в соответствующих файлах. На следующем этапе устанавливается геометрическое соответствие между узлами поверхностной части исходной сетки и топологическими элементами первой CAD-модели. Выделяются все узлы сетки, расположенные на её поверхности. Далее выполняется поиск узлов, принадлежащих рёбрам модели. Для этого положение узла сопоставляется с геометрическими рёбрами с учетом их ограничивающих областей и допуска по расстоянию. При успешном сопоставлении для узла фиксируется соответствующее ребро модели и его положение на ребре, задаваемое параметром.

[1*] Работа выполнена при поддержке программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030».

Оставшиеся поверхностные узлы, не принадлежащие рёбрам, классифицируются как внутренние точки граней. Для каждой грани рассматривается замкнутый цикл её граничных рёбер, принадлежность узла грани определяется его нахождением во внутренней области, ограниченной соответствующим циклом. Таким образом, для каждого поверхностного узла устанавливается принадлежность либо ребру, либо внутренней области конкретной грани модели.

Полученное соответствие используется в дальнейшем в качестве набора ключевых геометрических ограничений при переносе сетки на вторую CAD-модель. Точки сетки, расположенные на рёбрах первой модели, переносятся на соответствующие рёбра второй модели. Для сохранения их относительного положения используется параметр точки на ребре. Таким образом, для каждой исходной точки сохраняется её параметрическое положение на соответствующем геометрическом объекте второй модели.

Следующим этапом выполняется перенос точек, принадлежащих каждой грани. Для каждой грани исходные узлы рассматриваются отдельно, а точки на её границе используются как ключевые. На основе этих данных применяется алгоритм свободной деформации сетки и проекции поверхностной сетки на грань [4, 5]. Такой подход позволяет согласовать внутренние узлы граней с уже определённым положением узлов на рёбрах и получить сетку, лежащую на целевой грани и покрывающую её с минимальными искажениями.

После переноса узлов всех граней полученные поверхностные узлы используются в качестве ключевых точек для переноса всей объёмной сетки на новое тело. В основе этого этапа лежит также алгоритм свободной деформации по ключевым точкам (проекция на данном этапе уже не нужна).

2.2. Алгоритм свободной деформации сетки

Алгоритм представляет собой двухэтапную деформацию сетки по заданным ключевым узлам. Сначала алгоритм деформирует сетку аффинным преобразованием, а затем оставшуюся, нелинейную часть деформации распространяет по сетке через её локальную связность [6].

Входные данные алгоритма:

1. Сетка, состоящая из узлов с координатами и ячеек, задающих связность. Ячейки сетки могут быть плоскими или объёмными и состоять из любого количества узлов.
2. Список ключевых узлов сетки. Пользователь может назначить ключевыми столько узлов, сколько будет удобно.
3. Целевое положение для каждого ключевого узла. Может совпадать с исходным, если требуется, чтобы часть сетки была зафиксирована на месте.

Выходные данные: сетка, изоморфная исходной, но с ключевыми точками в новых позициях и с минимальными необходимыми искажениями локальной геометрии.

Описание алгоритма:

Алгоритм морфинга расчётной сетки включает два последовательных этапа.

1. Глобальное аффинное преобразование. По координатам ключевых точек и их целевым положениям формируется система линейных уравнений относительно 12 параметров матрицы аффинного преобразования. Поскольку система может быть несовместной, параметры определяются методом наименьших квадратов [7]. Для повышения эффективности вычислений задача разбивается на три независимые подзадачи – по одной для каждой координаты. Найденное преобразование применяется ко всем узлам сетки и учитывает её глобальные поворот, перенос и растяжение.

2. Локальная деформация по дифференциальным координатам. Положение каждого узла задаётся через невзвешенное среднее координат его соседей и вектор коррекции. В систему включаются целевые положения ключевых точек; неизвестные координаты узлов находятся методом наименьших квадратов, при необходимости – независимо для каждой координаты. После решения координаты присваиваются узлам при неизменной связности сетки, а ключевым точкам задаются точные целевые положения.

Двухэтапная схема сочетает глобальную аффинную аппроксимацию с локальной гладкой деформацией. Это позволяет обрабатывать конфигурации, не представимые одним аффинным преобразованием, например перемещение одних углов сетки при фиксации других. На рис. 1 показана деформация плоской расчётной сетки с фиксацией двух углов и подъёмом двух дру-

гих. Аффинное преобразование не может обеспечить такой переход из плоской конфигурации в неплоскую.

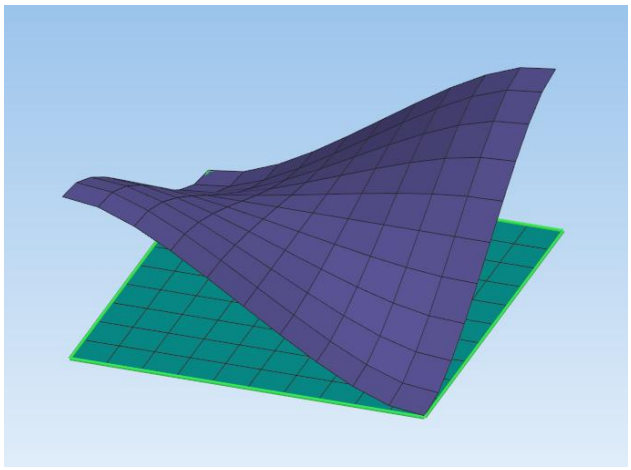


Рис. 1. Неплоская деформация сетки

3. Результаты

Разработанный и реализованный алгоритм был протестирован на тестовых моделях. На рисунках 2 и 3 показаны примеры работы морфинга.

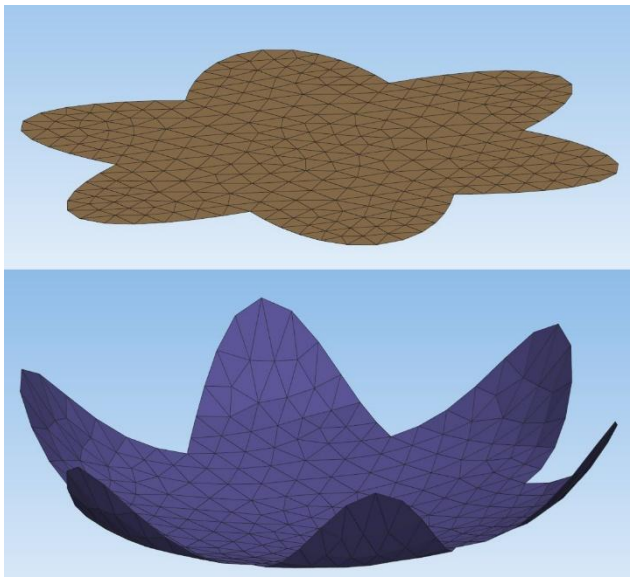


Рис. 2. Морфинг двумерной сетки

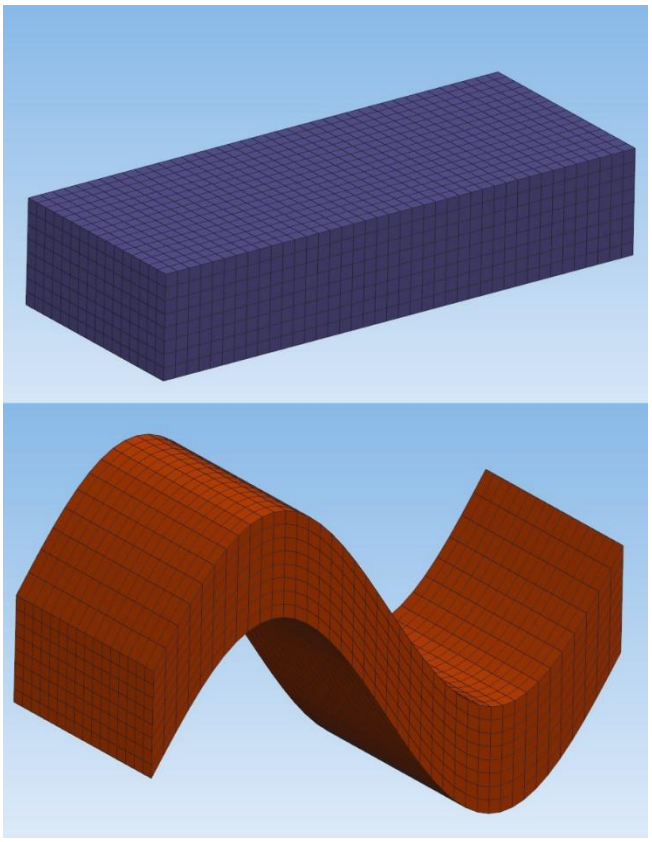


Рис. 3. Морфинг трехмерной сетки

4. Заключение

Предложен алгоритм переноса вычислительной сетки между двумя геометрическими моделями, включающий автоматизированное установление соответствия геометрических объектов, определение принадлежности поверхностных узлов граням и рёбрам, параметрический перенос граничных узлов, свободную деформацию сетки и проекцию сетки на поверхность. Комбинация этих процедур позволяет сохранять изоморфность исходной и результирующей сетки и распространять заданные перемещения граничных узлов на весь объём с минимальными локальными искажениями.

Литература

1. Bah M.T., Nair P.B., Browne M. Mesh morphing for finite element analysis of implant positioning in cementless total hip replacements // Medical Engineering & Physics. 2009. Vol. 31, No. 10. P. 1235–1243. DOI: 10.1016/j.medengphy.2009.08.001.
2. Claus F., Hamann B., Hagen H. A finite-element based mesh morphing approach for surface meshes // Computer-Aided Design. 2022. Vol. 146. Art. 103232. DOI: 10.1016/j.cad.2022.103232.
3. Pratt M.J. Introduction to ISO 10303 – the STEP Standard for Product Data Exchange. National Institute of Standards and Technology, 2000. URL: https://www.nist.gov/publications/introduction-iso-10303-step-standard-product-data-exchange (дата обращения: 04.09.2026).
4. Botsch M., Kobbelt L., Pauly M., Alliez P., Lévy B. Polygon Mesh Processing. Natick, MA: A K Peters, 2010. 250 p.
5. Floater M.S. Mean Value Coordinates // Computer Aided Geometric Design. 2003. Vol. 20, No. 1. P. 19–27. DOI: 10.1016/S0167-8396(03)00002-5.

6. Lipman Y., Sorkine O., Cohen-Or D., Levin D., Rössl C., Seidel H.-P. Differential Coordinates for Interactive Mesh Editing // Proceedings of Shape Modeling International. 2004. P. 181–190. DOI: 10.1109/SMI.2004.1314505.
7. Eigen. Eigen: A C++ template library for linear algebra [Электронный ресурс]. URL: https://eigen.tuxfamily.org/ (дата обращения: 04.09.2026).

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СИМУЛЯЦИИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В УСЛОВИЯХ МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ

М.А. Лебедев, И.Г. Черных

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

В настоящее время количество общедоступных специализированных программных пакетов для проведения симуляций химических реакций в условиях межзвездной среды ограничено. Большинство представленных решений либо являются закрытыми, либо используют модели и методы, плохо подходящие для астрохимических задач. Исходя из этого, был разработан программный пакет, позволяющий проводить полный цикл работ по подготовке и обработке данных: от химической системы до расчета симуляции.

Ключевые слова: астрохимия, симуляция химических реакций в условиях межзвездной среды, разработка программного обеспечения.

1. Введение

На текущий момент существует огромное количество программных пакетов для численного моделирования астрофизических процессов. Однако, если поискать программные пакеты для полноценного численного моделирования химических процессов в условиях межзвездного газа с учетом трехмерной газовой динамики и протестировать их, то окажется, что работоспособных не более десятка. И те имеют большое количество недостатков.

К главным недостаткам можно отнести попытку расчета кинетических схем только с бессеточными газодинамическими методами, ограничение по количеству моделируемых химических реакций и задание исследуемых процессов из стандартных баз данных без возможности редактирования кинетических схем. Данные обстоятельства обуславливают необходимость разработки собственного программного пакета.

Данная работа описывает требования и структуру программного пакета, разработанного для подготовки данных для проведения астрохимических симуляций. Также представлены результаты тестирования ПО и описание принципа полного цикла работ: формирование химической сети, генерация системы обыкновенных дифференциальных уравнений и матрицы Якоби, конфигурация решателя Ливермора.

2. Структура программного пакета

Основной задачей пакета является упрощение обработки данных и их подготовки к проведению астрохимических симуляций. В связи с этим, к нему было выдвинуто несколько требований: простота использования, модульность, расширяемость и возможность использования на суперкомпьютерном кластере через командную консоль Linux. Основываясь на этих требованиях были сформулированы высокоуровневая и низкоуровневая структуры системы, а также выбран используемый язык разработки.

2.1. Высокоуровневая структура и методы

Высокоуровневая структура описывает основные модули и их взаимодействия, которые следуют из основного алгоритма подготовки данных к астрохимическим симуляциям, который, на данном этапе, включает в себя четыре основных модуля (см. рис. 1).

Первый модуль “Chemical network” представляет собой стандарт записи химических систем и является основным источником данных для последующих вычислений. Пользователю

необходимо записать систему химических реакций, после чего остальные модули смогут автоматически считать эту информацию и преобразовать в необходимый вид. Стандарт должен быть реализован таким образом, чтобы легко считываться как человеком, так и программно.

Второй модуль “ODE System” является автоматическим конструктором системы ОДУ. Он получает на вход данные химической системы и преобразует их в систему ОДУ формата, соответствующего формату ввода решателя Ливермора для дальнейшей интеграции [1].

Третий модуль “Jacobian Matrix” является автоматическим конструктором матрицы Якоби на основе системы ОДУ и химической системы. Система ОДУ и матрица Якоби являются входными данными для последнего модуля.

Четвертый модуль “ODE solver” включает в себя все элементы необходимые для проведения вычислений с помощью решателя Ливермора на данных, сгенерированных ранее другими модулями.

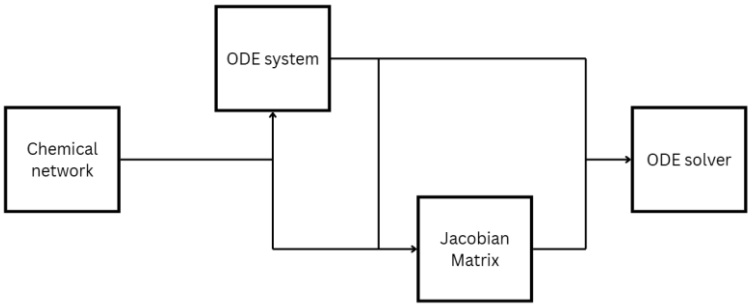


Рис. 1. Высокоуровневая структура ПО

Представленная структура позволяет сформулировать перечень инструментов и стандартов, которые необходимо разработать и интегрировать в систему для реализации полного цикла, однако, для начала, необходимо выбрать язык и другие инструменты разработки.

2.2. Язык и методы

В качестве основного языка разработки для этого проекта был выбран Python, в связи с его распространенностью, доступностью и расширяемостью большим количеством доступных библиотек. Так как основная вычислительная нагрузка приходится на решатель (разработка которого не является частью данной работы), производительность не считается основным приоритетом, так что, хотя существуют другие опции (такие как C++), Python лучше подходит под поставленную задачу.

В системе также есть несколько точек взаимодействия с пользователем для ввода данных, которые будут представлены в низкоуровневой структуре. Эти данные должны быть доступны без графического интерфейса, а также иметь возможность взаимодействовать как с пользователем, так и с программой напрямую. Таким образом, для этой задачи был выбран язык разметки данных YAML. Он удовлетворяет требованиям, описанным выше и будет служить для конфигурации и хранения данных там, где необходимо вмешательство пользователя.

2.3. Низкоуровневая структура

Ниже представлена более подробная структура разрабатываемого пакета и всех его модулей (см. рис. 2).

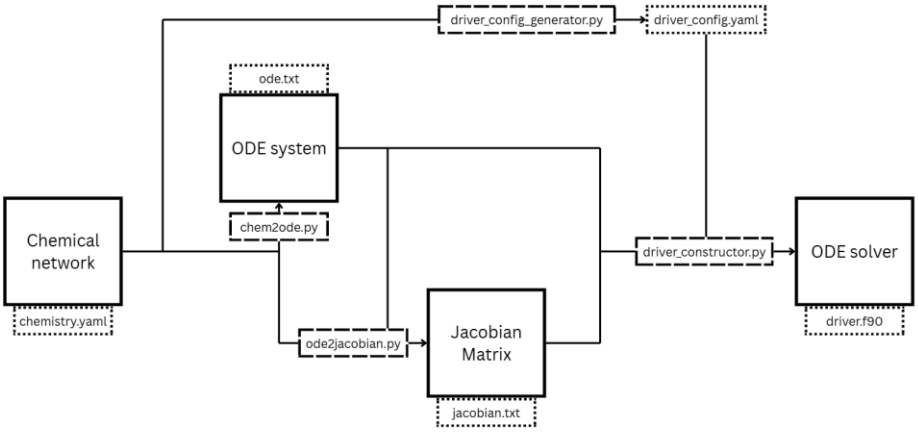


Рис. 2. Низкоуровневая структура ПО

Пунктирными линиями отмечены элементы, представляющие файлы данных и конфигурации. Эти файлы могут быть сконструированы пользователем (химическая система), сгенерированы программой (система ОДУ, матрица Якоби, файл решателя) или программно-сгенерированы и требовать ручного редактирования (конфигуратор решателя). Штрихованными линиями обозначены файлы исполняемого кода, которые генерируют или транслируют данные между модулями.

3. Работа с ПО

В данной главе описаны стандарты записи файлов YAML (химическая система и конфигуратор решателя), а также основной способ взаимодействия с программой.

3.1. Формат записи химической системы

Запись химической системы состоит из двух основных элементов: соединений и реакций (см. рис. 3). Перечень соединений представлен в виде списка, каждый пункт которого обозначен дефисом. Реакции также представлены в виде списка, содержащего поля ‘reagents’, ‘products’, ‘reversible’ и ‘rates’. Эти слова, как и ‘species’ и ‘reactions’ являются системными и необходимы для корректного считывания данных программой. Поле ‘reversible’ является булевым и принимает значения True/False (обозначая обратимость реакции), поле ‘rates’ (скорость реакции) принимает список чисел двойной точности в формате Фортрана (nDm = n*10^m). Первое число - скорость прямой реакции, второе - скорость обратной. Если реакция необратима, второе поле остается пустым. Поля ‘reagents’ и ‘products’ (реагенты и продукты реакции соответственно) принимают списки элементов формата ‘количество_соединение’.

```
species:
  - CH4
  - O2
  - CO2
  - H20
reactions:
  -
    reagents:
      - 1_CH4
      - 2_O2
    products:
      - 1_CO2
      - 2_H20
    reversible: False
    rates:
      - 3D-2
      -
```

Рис. 3. Формат записи химических систем

Формат реализован таким образом, что не регламентирует количество соединений и реакций, а также реагентов и продуктов в реакциях, таким образом, являясь полностью масштабируемым.

3.2. Формат конфигуратора решателя

Как и файл химической системы, файл конфигуратора решателя представлен в формате YAML. Он генерируется автоматически с некоторыми предустановленными параметрами, которые необходимо отредактировать под конкретную решаемую задачу (см. рис. 4).

```
ATOLS:
- 1D-6
- 1D-6
- 1D-6
ITOL: 2
RTOL: 1D-4
end time: 1D0
initial conditions:
- 1D0
- 1D0
- 1D0
start time: 0D0
```

Рис. 4. Формат записи конфигуратора решателя

Главным полем в этом файле является ‘initial conditions’, задающее начальное распределение соединений. Остальные параметры ‘ATOLS’, ‘ITOL’ и ‘RTOL’ отвечают за погрешности вычислений, а подробная информация по ним представлена в документации к решателю [2].

3.3. Запуск программного комплекса

Для простоты пользования, вся система была интегрирована в один исполняемый файл, который содержит командный интерфейс для запуска отдельных модулей в нужном порядке и генерации и трансляции всех необходимых данных от химической системы до файла конфигура-

тора. Для его работы не нужен установленный на машине Python, а только файлы ‘driver_template.f90’ и ‘chemistry.yaml’. Первый является шаблоном для генерации файла решателя и находится в открытом доступе вместе с кодом, а второй создается пользователем по шаблону, который также находится в открытом доступе.

4. Верификация работоспособности

В данной главе представлены некоторые тесты, проведенные над системой, а также пример решения астрохимической задачи.

4.1. Тестирование на простейших химических системах

В первую очередь были протестированы все отдельные модули на модельных химических системах, после чего была представлена простейшая химическая система из 5 соединений (H2, O2, H2O, C, CO2) и 2 необратимых реакций (2 H2 + O2 -> 2 H2O, C + O2 -> CO2) с искусственными скоростями. Начальные условия соответствовали стандартным (равномерное распределение начального количества соединений). В результате симуляции, как и ожидалось, система сошлась к устойчивому состоянию, исчерпав O2 и полностью остановив протекание реакций (см. рис. 5).

```
At t =  0.1000D+01   y =  0.262756D+00  0.257963D+00  0.173724D+01  0.626585D+00  0.137341D+01
At t =  0.1000D+02   y =  0.161503D+00  0.181253D-02  0.183850D+01  0.421061D+00  0.157894D+01
At t =  0.1000D+03   y =  0.160935D+00 -0.221041D-07  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+04   y =  0.160935D+00  0.595154D-13  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+05   y =  0.160935D+00  0.626417D-19  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+06   y =  0.160935D+00  0.693560D-27  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+07   y =  0.160935D+00  0.771969D-37  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+08   y =  0.160935D+00  0.859578D-49  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+09   y =  0.160935D+00  0.966955D-63  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+10   y =  0.160935D+00  0.000000D+00  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+11   y =  0.160935D+00  0.000000D+00  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
At t =  0.1000D+12   y =  0.160935D+00  0.000000D+00  0.183906D+01  0.419532D+00  0.158047D+01
```

Рис. 5. Результаты первого тестирования

4.2. Тестирование масштабируемости

Помимо начального тестирования было проведено тестирование масштабируемости системы (модулей генерации ОДУ и матрицы Якоби). Для этого были сгенерированы химические системы с различным количеством соединений и реакций. Реакции были сгенерированы случайно. В таблице 1 представлены все проведенные замеры (количество соединений, реакций и время генерации системы ОДУ и матрицы Якоби в секундах). Запуск производился в среде разработки (IntelliJ PyCharm) на потребительском ЦП (AMD Ryzen 5 5500).

Таблица 1. Результаты тестирования масштабирования

Число соединений	**Число реакций**	**Время генерации ОДУ**	**Время генерации матрицы Якоби**
100	100	0.0210	0.0174
200	200	0.0812	0.0580
500	500	0.6416	0.3213
1000	500	1.5763	0.7893
500	1000	1.2900	0.5550
1000	1000	3.2290	1.1903

Как видно из таблицы, тестирование показало, что система стабильно работает с крупными химическими системами.

4.3. Тестирование на астрохимической задаче

Помимо тестов на искусственных данных, система была применена к задаче, построенной на упрощенной химической системе из [3], описывающей реакции в выбросе суперновой. На рис. 6 изображены результаты проведенных вычислений. Полученные концентрации совпадают с выводами, полученными на тех же данных в лаборатории суперкомпьютерного моделирования ИВМиМГ СО РАН.

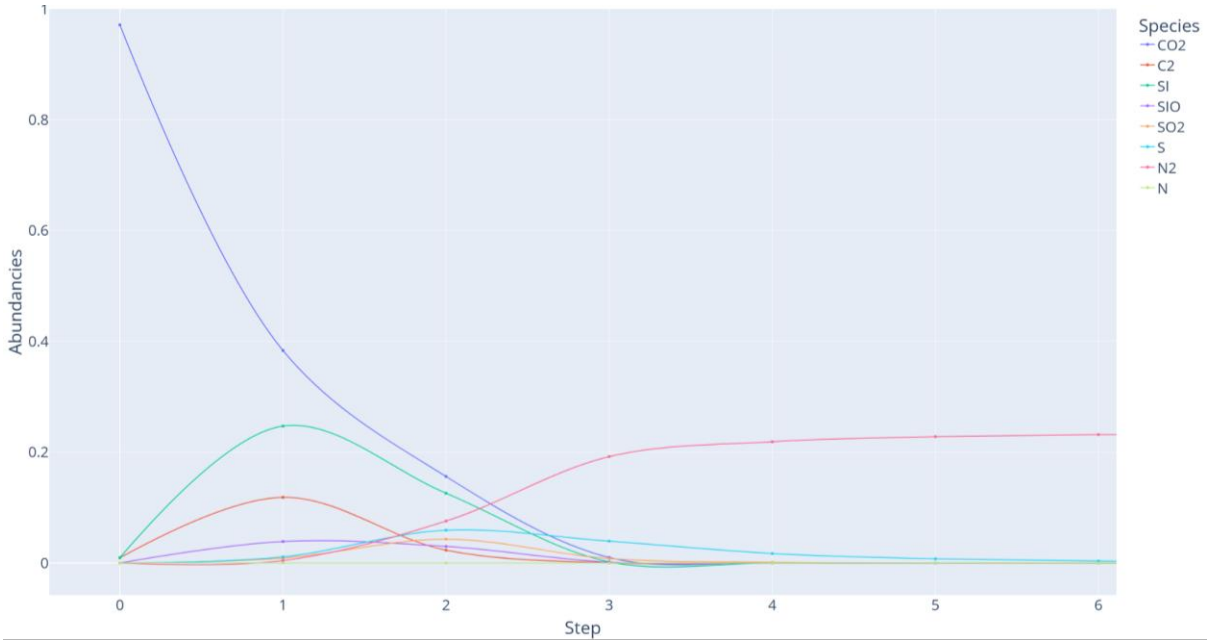


Рис. 6. Результаты тестирования на реальной задаче

5. Доступ к исходным файлам

Исходный код, вместе с сопутствующими файлами и краткой документацией находятся в открытом доступе на платформе GitHub по ссылке: https://github.com/MarkLebedev/chem2odePy.

6. Заключение

В рамках данного проекта была разработана первая версия программного комплекса для проведения полного цикла работ по подготовке и обработке данных для проведения симуляций химических реакций в условиях межзвездной среды с использованием решателя Ливермора. Данный инструмент позволит ускорить работу по решению подобных задач, предоставив исследователям актуальные инструменты и методы. В дальнейшие планы работы входит совершенствование структуры кода, а также расширение функционала: включение термодинамических реакций и использование других решателей ОДУ.

Литература

1. Черных И. Г. Алгоритмический и программный инструментарий для численного решения прямых задач химической кинетики с использованием супер-ЭВМ. – 2006.
2. Radhakrishnan K., Hindmarsh A. C. Description and use of LSODE, the Livermore solver for ordinary differential equations. – Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), Livermore, CA, 1993. – №. UCRL-ID-113855.
3. Cherchneff, I., Dwek, E. (2009) The chemistry of population III supernova ejecta: I - formation of molecules in the early universe. The Astrophysical Journal (703) 642-661.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В НЕЙРОН-АСТРОЦИТАРНОЙ СРЕДНЕПОЛЕВОЙ МОДЕЛИ ИЗ ДАННЫХ МЕТОДАМИ РЕЗЕРВУАРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ[1*]

Т.А. Леванова[1], С.М. Оленин[1], Н.В. Громов[1], Л.А. Смирнов[1], А.Н. Писарчик[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Политехнический университет Мадрида, Испания

В работе исследуется влияние робастности хаоса целевой системы на реконструкцию её динамики методами резервуарных вычислений. Исследование проведено на примере среднеполевой модели нейрон-астроцитарного взаимодействия (ТМА). В указанной системе хаотический аттрактор, соответствующий хаотический пачечной активности не является структурно устойчивым. Численные эксперименты показывают, что среди 720 моделей десяти различных архитектур резервуаров достоверные хаотические модели получены в 36 % случаев в робастной области и в 1,7 % – в хрупкой. Показано, что этот результат не объясняется недостатком информации или отсутствием обобщённой синхронизации. Показано, что для моделей с параметрическим входом узким местом является ёмкость считывающего слоя.

Ключевые слова: резервуарные вычисления, сети с эхо-состояниями, реконструкция аттракторов, робастный хаос, нейрон-астроцитарное взаимодействие, модель Цодыкса–Маркрама, обобщённая синхронизация, показатели Ляпунова.

1. Введение

Реконструкция динамической системы по временным рядам является обратной задачей: по конечной, зашумлённой и, как правило, неполной записи требуется построить порождающую модель, долговременное поведение которой (аттрактор, инвариантная мера, показатели Ляпунова) совпадает с поведением неизвестной системы. Одним из наиболее успешных инструментов решения этой задачи являются резервуарные вычисления: сеть с эхо-состояниями (ESN), замкнутая в автономный контур, воспроизводит важные свойства хаотических аттракторов и их ляпуновские спектры [1-3].

Практически все тестовые задачи для таких методов используют системы с робастным хаосом. Примером может служить система Лоренца, аттрактор которой сохраняется при C^1-малых возмущениях [4]. Реконструированная модель никогда не бывает точной – в лучшем случае это близкая система. Если хаос переживает малые возмущения, достаточно точная модель его наследует; если нет, качественный режим модели определяется деталями ошибки, которые данные не ограничивают, и обратная задача «данные → качественный режим» становится некорректной по Адамару. Для гладких маломерных моделей нейронной активности достаточно типичной именно вторая ситуация: хаос возникает в каскадах удвоения или добавления периода, негиперболичен и перемежается плотными окнами периодичности [5, 6]. Поэтому уместным понятием робастности здесь является не структурная устойчивость, а робастность «по мере» – вероятность того, что возмущённая система остаётся хаотической; робастным исключением служат дикие псевдогиперболические аттракторы [7].

Цель работы –исследовать влияние робастности хаоса целевой системы на качество реконструкции её динамики методами резервуарных вычислений. В работе проблема восстановления таких систем из временных рядов исследуется на примере среднеполевой модели нейрон-астроцитарного взаимодействия (модель ТМА) [8, 9].

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-22-00465).

2. Модель и индикаторы робастности хаоса

Модель TMA является модификацией среднеполевой модели Цодыкса–Маркрама [10], в которой учитывается влияние медленной обратной связи со стороны астроцитов. Модель демонстрирует различные типы динамики, в том числе регулярную и хаотическую пачечную активность.

Состояние $X = (E, x, u, y)$ включает среднюю частоту разрядов E (Гц), долю доступных синаптических ресурсов x, вероятность высвобождения u и активность астроцита y [8, 9]:

$$\begin{cases} \tau \dot{E} = -E + \alpha \ln\left(1 + \exp\frac{JuxE + I_0}{\alpha}\right), \\ \dot{x} = \frac{1-x}{\tau_D} - uxE, \\ \dot{u} = \frac{U(y)-u}{\tau_F} + U(y)(1-u)E, \\ \dot{y} = -\frac{y}{\tau_A} + \beta\,\sigma\left(\frac{x - x_{thr}}{\sigma_H}\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma(s) = 1/(1 + e^{-s})$, $U(y) = U_0 + \Delta U_0 \sigma((y - y_{\text{thr}})/\sigma_U)$. Бифуркационным параметром служит внешний ток $I_0 = I_0^{\text{c}} + \delta$. В работе исследуется две области параметров, в которых существуют хаотические аттракторы. Номинальные значения параметров, известные из работы [9] (τ = 0,013 с, τ_D = 0,15 с, τ_F = 1 с, τ_A = 1,8 с, α = 1,5, J = 3,07, U_0 = 0,23, ΔU_0 = 0,305, β = 0,4375, x_{thr} = 0,9, y_{thr} = 0,5, σ_H = 0,05, σ_U = 0,02, I_0^{c} = −1,4564), задают область A. Найденная в работе область R отличается только значениями x_{thr} = 0,704 и I_0^{c} = −1,4814.

Робастность оценивалась тремя операционными индикаторами: долей хаотических систем среди 128 случайных соседей в пространстве 12 положительных параметров (относительный радиус r от 0,25 до 2 %); долей хаотических точек при сканировании I_0 на интервалах $I_0^{\text{c}} \pm 0{,}002$ и $I_0^{\text{c}} \pm 0{,}02$ (по 201 точке); долей хаотических систем среди 64 случайных гладких возмущений векторного поля

$$\dot{X} = f(X) + g(X), \quad g_j(X) = \textstyle\sum_k a_{jk} \cos\left(w_k^{\top} \tilde{X} + b_k\right), \tag{2}$$

где $\tilde{X}$ – состояние, стандартизованное на аттракторе, а амплитуды a_{jk} нормированы так, что среднеквадратичное значение g_j на аттракторе составляет долю ε от f_j. Последний индикатор выражен в тех же единицах, что и относительная ошибка векторного поля обученных моделей. Траектория считалась хаотической при старшем показателе Ляпунова $\lambda > 0{,}03$ с$^{-1}$, что в 10–15 раз превышает смещение оценки на предельных циклах.

3. Постановка вычислительного эксперимента

Обучающие данные представляют собой траектории на аттракторе длиной 1500 временных отсчетов (шаг выборки 0,01 с) с шумом наблюдения 1 %. Рассматривались две постановки задачи: полное (E, x, u, y) и частичное (E, y) наблюдения. В случае частичного наблюдения синаптические переменные x, u скрыты.

Все модели резервуарных вычислений предсказывают приращения и в режиме генерации работают автономно, получая на вход собственный прогноз:

$$z_{k+1} = z_k + W\varphi_k, \quad \varphi_k = \varphi(r_{k+1}, z_k), \quad r_{k+1} = F(r_k, z_k), \tag{3}$$

где r_k – состояние резервуара, φ_k – вектор признаков, а матрица считывания W находится гребневой регрессией в замкнутой форме. Сравнивались десять архитектур с выровненной ёмкостью считывания (около 600 признаков): ESN, ESN с квадратичным считыванием, DeepESN, простой циклический резервуар, ансамбль ESN, многомасштабная ESN (MTS-ESN), ESN с задержками, случайные признаковые отображения, резервуарные вычисления нового поколения NG-RC [11] и гибридная ESN [12], в которой моделью знаний служит модель Цодыкса–Маркрама без астроцита.

Конечные точки фиксировались до тестирования. Модель считалась хаотической, если 1000 временных отсчетов автономной генерации не расходились и оценка $\hat{\lambda} > 0{,}2\lambda$; достоверной – если, кроме того, $|\ln(\hat{\lambda}/\lambda)| \le \ln 2$, а нормированные расстояния Вассерштейна между распределениями максимумов спайков, межспайковых интервалов и размеров пачек не превышали порогов, выбранных по нуль-распределению истинной системы. Гиперпараметры подбирались

оптимизатором TPE с функционалом, учитывающим хаотичность. Было проведено 3 серии численных экспериментов. Итоговый тест серии I включал 720 моделей (2 области × 2 сценария наблюдения × 10 архитектур × 18 моделей). В сериях II и III исследовались обучение с параметрическим входом, данные из бассейна сосуществующего равновесия, ограничения на якобиан, переоптимизация гиперпараметров и удвоение резервуара.

4. Результаты

4.1. Хрупкость хаоса в номинальной области

В области A система (1) имеет хаотический аттрактор, соответствующий хаотическому пачечному режиму, с $\lambda = 0{,}0963 \pm 0{,}0018$ $с^{-1}$ и в среднем 11,4 спайка в пачке, сосуществующий с устойчивым равновесием. При сканировании $I_0 \in [-1{,}462; -1{,}450]$ хаос обнаружен лишь в изолированных точках (около 5 % сетки), а сдвиг I_0 на $2 \cdot 10^{-5}$ превращает хаос в предельный цикл. Такой сдвиг соответствует относительной ошибке векторного поля около $6 \cdot 10^{-5}$, тогда как обученные резервуарные модели имеют ошибки 0,02–0,17, т. е. на 2,5–3,5 порядка больше. Модель с такой ошибкой является системой, для которой хаос – исключение.

4.2. Область хаоса, робастного по мере

Поэтапный поиск (глобальная выборка 2000 точек, сечения плоскостями (I_0, p), адаптивный поиск и карты в плоскости (I_0, x_{thr})) показал, что области хаотического пачечного режима содержат окна периодичности. Их ширина по I_0 достигает $(1{,}6–2) \cdot 10^{-3}$, что примерно в 100 раз больше ширины окон хаоса вблизи области A. Выбранная точка R сохраняет тип аттрактора (11,1 спайка в пачке), но по всем трём индикаторам является почти на порядок робастнее (табл. 1). Вместе с тем в области R хаос также чередуется с окнами периодичности, а 26 из 64 случайных начальных условий сходятся к равновесию: область R робастна по мере, но не является структурно устойчивой.

Таблица 1. Сравнение областей A и R (в скобках – 95 % интервалы Уилсона)

Показатель	Область A	Область R
Старший показатель Ляпунова λ, $с^{-1}$	0,0963 ± 0,0018	0,1249 ± 0,0009
Среднее число спайков в пачке	11,4	11,1
Доля хаоса при сканировании $I_0^c \pm 0{,}002$	0,075 [0,046; 0,119]	0,527 [0,458; 0,595]
Доля хаоса при сканировании $I_0^c \pm 0{,}02$	0,030 [0,014; 0,064]	0,294 [0,235; 0,360]
Доля хаоса среди параметрических соседей, $r = 0{,}5$ %	0,016	0,180
Доля хаоса при возмущениях поля, $\varepsilon = 0{,}01$	0,031	0,266
Доля хаотических моделей (серия I)	0,128	0,511
Доля достоверных моделей (серия I)	0,017	0,361

4.3. Сравнение десяти архитектур

При объединении сценариев наблюдения хаотическими оказались 51,1 % моделей в области R против 12,8 % в области A, достоверными – 36,1 % против 1,7 %. Консервативные тесты на уровне 20 ячеек эксперимента дают $p \le 0{,}003$ с поправкой Холма. Для области A все шесть достоверных моделей являются моделями архитектуры MTS-ESN при полном наблюдении. При этом хаотические модели в основном воспроизводили неверную статистику. Например, гибридная ESN при частичном наблюдении была хаотической в 78 % случаев, но ни разу не достоверной, завышая λ примерно в 2,7 раза. В области R лучшие архитектуры давали 78 % достоверных моделей при полном наблюдении (DeepESN, гибридная ESN, MTS-ESN) и до 89 % при частичном (гибридная ESN). Архитектура NG-RC в области R воспроизводила хаотический режим в 94 % случаев при полном наблюдении, при этом результат ни разу не был достоверным, т. е. модель генерировала «не тот хаос». Вероятность получить хаотический режим убывала с ростом ошибки модели в области R и, напротив, имела тенденцию возрастать в A, что согласуется с артефактным происхождением хаоса в неточных моделях.

4.4. Информация и синхронизация

Для наблюдения $(E,\ y)$ ранговое условие наблюдаемости выполняется всюду: $\det O_1 = -(\partial f_E/\partial u)(\partial f_y/\partial x) \neq 0$, хотя второй множитель является экспоненциально малым в фазах покоя между пачками. Показано, что частичное наблюдение не создаёт информационного барьера. Отметим, что все 80 протестированных резервуаров серии II находились в режиме обобщённой синхронизации, и для всех выполнялось условие дифференцируемости Ханта–Отта–Йорка [13].

4.5. Ограничения на якобиан

Следуя идее [14], в серии II к функционалу гребневой регрессии добавлялся прямой штраф на отклонение якобиана считывания $I + WD_k$ от якобиана потока J_k.

Утверждение 1. При полном наблюдении и дифференцируемой обобщённой синхронизации $r_k = \Psi(X_k)$ прямой штраф совместим с истинным касательным отображением замкнутого контура лишь при $W(\partial\varphi_k/\partial r_{k+1})(\partial F/\partial r_k)(\partial r_k/\partial z_k) = 0$, т. е. он не учитывает неявную зависимость состояния резервуара от предыстории входа.

Численно штраф уменьшал измеряемую им ошибку якобиана, но разрушал замкнутый контур: доля расходящихся моделей в области R при этом возрастала с 0,05 до 0,95. Поэтому было построено согласованное ограничение («касательное принуждение учителя»): возмущения распространяются истинными якобианами потока и через резервуар из точки, где равенство $\delta r = 0$ выполняется точно. Такой подход не требует производной отображения синхронизации и сохраняет замкнутую форму решения для W.

Утверждение 2. Если касательные строки удовлетворяют условию $W\delta\varphi_k = \delta z_{k+1} - \delta z_k$ на окне обучения, то на этом окне касательная динамика линеаризованного замкнутого контура совпадает с истинной касательной динамикой наблюдаемых.

Согласованное ограничение не дестабилизировало контур и снизило касательную ошибку в R с 0,052 до 0,028, однако прирост числа достоверных моделей (с 19/36 до 24/36) статистически не является значимым ($p = 0{,}33$). Причина может быть в том, что обычная гребневая регрессия уже воспроизводит касательную динамику замкнутого контура с точностью около 5 % в области R.

4.6. Ёмкость считывания

Модели с параметрическим входом в области R количественно воспроизводили каскад добавления периода, но при этом не воспроизводили чередование узких областей хаоса и окон периодичности. В области A добавление ни одной модификации метода (параметрический вход, данные бассейна, прямой штраф на якобиан) не дало достоверных моделей, а в области R каждое из них снижало достоверность относительно базовой модели. Дополнительная серия экспериментов III разделила возможные причины. Включение целевой точки $\delta = 0$ в обучение не изменило результат; сокращение данных в целевой точке с 1500 до 200 с также существенно не повлияло на результат. Удвоение емкости считывающего слоя резервуара (1200 признаков) повысило долю достоверных моделей с 5/36 до 21/36. Это единственное сравнение серии III, значимое после поправки. Таким образом, резервуар с 600 признаками не может одновременно хранить параметрическое семейство, бассейн равновесия и тонкую статистику хаотического аттрактора [15].

5. Заключение

Успех реконструкции хаоса методами резервуарных вычислений в модели TMA (а также моделей с похожими хаотическими аттракторами) определяется прежде всего робастностью хаоса целевой системы. При номинальных параметрах, найденных в работах [9], хаотический пачечный режим сосредоточен в изолированных окнах, соответствующих ошибкам векторного поля порядка 10^{-5}, и ни одна из протестированных стратегий не дала надёжно достоверных моделей. В соседней, робастной по мере области тот же вычислительный конвейер даёт достовер-

ные модели примерно в трети случаев, а для лучшей архитектуры – до 89 %. Недостаток информации и отсутствие синхронизации исключены как объяснения. Мы предлагаем сопровождать каждую хаотическую тестовую систему для методов реконструкции хотя бы одним индикатором робастности по мере, а для хрупкого хаоса считать корректно поставленной целью реконструкции не отдельный аттрактор, а параметрическое семейство и меру его хаотического множества.

Литература

1. Jaeger H., Haas H. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication // Science. 2004. Vol. 304. P. 78–80. DOI: 10.1126/science.1091277.
2. Pathak J., Lu Z., Hunt B.R., Girvan M., Ott E. Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data // Chaos. 2017. Vol. 27. Art. 121102. DOI: 10.1063/1.5010300.
3. Lu Z., Hunt B.R., Ott E. Attractor reconstruction by machine learning // Chaos. 2018. Vol. 28. Art. 061104. DOI: 10.1063/1.5039508.
4. Tucker W. The Lorenz attractor exists // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1999. Vol. 328. P. 1197–1202. DOI: 10.1016/S0764-4442(99)80439-X.
5. Barreto E., Hunt B.R., Grebogi C., Yorke J.A. From high dimensional chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space // Physical Review Letters. 1997. Vol. 78. P. 4561–4564. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4561.
6. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear Dynamics and Turbulence / Eds. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.
7. Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system // Nonlinearity. 2021. Vol. 34. P. 2018–2047. DOI: 10.1088/1361-6544/abc794.
8. Barabash N., Levanova T., Stasenko S. Rhythmogenesis in the mean field model of the neuron–glial network // The European Physical Journal Special Topics. 2023. Vol. 232. P. 529–534. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-00778-9.
9. Barabash N.V., Levanova T.A., Smirnov L.A. Blue sky catastrophe in the phenomenological model of neuron–astrocyte interaction // Chaos. 2024. Vol. 34. Art. 123141. DOI: 10.1063/5.0231551.
10. Tsodyks M.V., Markram H. The neural code between neocortical pyramidal neurons depends on neurotransmitter release probability // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 1997. Vol. 94. P. 719–723. DOI: 10.1073/pnas.94.2.719.
11. Gauthier D.J., Bollt E., Griffith A., Barbosa W.A.S. Next generation reservoir computing // Nature Communications. 2021. Vol. 12. Art. 5564. DOI: 10.1038/s41467-021-25801-2.
12. Pathak J., Wikner A., Fussell R., Chandra S., Hunt B.R., Girvan M., Ott E. Hybrid forecasting of chaotic processes: Using machine learning in conjunction with a knowledge-based model // Chaos. 2018. Vol. 28. Art. 041101. DOI: 10.1063/1.5028373.
13. Hunt B.R., Ott E., Yorke J.A. Differentiable generalized synchronization of chaos // Physical Review E. 1997. Vol. 55. P. 4029–4034. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.4029.
14. Park J., Yang N., Chandramoorthy N. When are dynamical systems learned from time series data statistically accurate? // Advances in Neural Information Processing Systems 37 (NeurIPS 2024). 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.06311.
15. Dambre J., Verstraeten D., Schrauwen B., Massar S. Information processing capacity of dynamical systems // Scientific Reports. 2012. Vol. 2. Art. 514. DOI: 10.1038/srep00514.

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА, МОДУЛЬНО КОНЕЧНЫЕ НАД ЦЕНТРОМ[1*]

О.В. Любимцев[1], А.А. Туганбаев[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Кольцо R с ненулевой единицей называется центрально существенным, если для любого его ненулевого элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$. В работе изучаются нетеровы центрально существенные кольца, модульно конечные над своим центром.

Ключевые слова: центрально существенное кольцо, 2-примальоне кольцо, классическое кольцо частных.

1. Введение

Все кольца, рассматриваемые в работе, являются ассоциативными с ненулевой единицей. Кольцо R называется *центрально существенным*, если для любого его ненулевого элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$. Ясно, что кольцо R с центром $C(R) = C$ является центрально существенным в точности тогда, когда модуль R_C − существенное расширение модуля Z_C. Необходимые сведения о центрально существенных кольцах можно найти в монографии [1].

Через $N(R)$, $P(R)$ и $J(R)$ мы обозначаем все нильпотентные элементы, первичный радикал и радикал Джекобсона, соответственно. Кольцо R называется *модульно конечным над центром C,* если R конечно порожден как C-модуль. Правый (левый) идеал кольца называется *существенным*, если он имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым правым (левым) идеалом. Для правого (соотв., левого) R-модуля M его подмодуль, образованный всеми элементами, аннуляторы которых являются существенными правыми (соотв., левыми) идеалами в R, называется *сингулярным подмодулем* для M и обозначается через $Z(M)$. При $M = R_R$ (соотв., $M = {}_RR$) идеал $Z(R_R)$ называется правым (соотв., $Z({}_RR)$ называется левым) *сингулярным* идеалом кольца R. Кольцо называется *инвариантным* (*квазиинвариантным) справа*, если всякий его правый идеал (максимальный правый идеал) является двусторонним. Аналогичным образом можно определить *инвариантность* (*квазиинвариантность) слева*. Кольцо, инвариантное (квазиинвариантное) справа и слева называется *инвариантным (квазиинвариантным)*. Кольцо R называется *полулокальным*, если $R/J(R)$ − полупростое артиново кольцо. Кольцо R называется *2-примальным*, если $P(R) = N(R)$. Идеал I в кольце R называется *2-примальным*, если $P(R/I) = N(R/I)$. Кольцо R называется *сильно 2-примальным*, если всякий собственный идеал в R является *2*-примальным; см., например, [2].

Если P − первичный идеал и $P = P_1, \ldots, P_k$ − список всех первичных идеалов над $P \cap C$, то множество $P_1, \ldots, P_k$ называется *кланом* идеала P. Мы обозначим $\mathcal{J}(I) = \{r \in R \mid r + I$ − регулярный элемент в $R/I\}$. В частности, $\mathcal{J}(0)$ − множество регулярных элементов в R. В [3, Corollary 2.3, Proposition 2.6] доказано, что нетерово кольцо R содержит единственное несократимое конечное множество первичных идеалов $P_1, \ldots, P_n$, таких что $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}(P_1) \cap \ldots \cap \mathcal{J}(P_n)$. Эти идеалы называются *регулярными первичными* в R.

[1*] Работа О.В. Любимцева поддержана Минобрнауки РФ, проект Н-044-0_2026-2028, и научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего".
Исследование А.А. Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 26-11-00001.

2. Основные результаты

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 5.

Теорема 1. Пусть R − нетерово центрально существенное кольцо, модульно конечное над центром $C(R)$. Тогда

1) факторкольца $R/P(R)$ и $R/J(R)$ коммутативны;
2) всякий первичный идеал кольца R является вполне первичным;
3) R − сильно 2-примальное кольцо;
4) $N(R) = P(R) = Z(R_R) = Z({}_RR)$.

Следствие 2. В нетеровом центрально существенном кольце R, модульно конечным над центром, факторкольца по первичным идеалам являются коммутативными областями.

Из работы [4, Theorem 1.4(1), Theorem 1.7(2)] получаем следствия 3 и 4.

Следствие 3. Всякий минимальный идеал центрально существенного кольца, модульно конечного над центром, лежит в центре кольца.

Следствие 4. Нетерово центрально существенное кольцо, модульно конечное над центром, является квазиинвариантным.

Теорема 5. Пусть R − нетерово центрально существенное кольцо, модульно конечное над центром.

1) R обладает классическим кольцом частных $Q_{\{cl\}}(R)$ тогда и только тогда, когда первичные идеалы из кланов регулярных первичных идеалов не содержат регулярных элементов.
2) Если R − полулокальное кольцо с ниль $J(R)$, то R имеет классическое кольцо частных.

В обоих случаях кольцо $Q_{\{cl\}}(R)$ является центрально существенным.

3. Замечания

Замечание 6. Нетерово центрально существенное кольцо, модульно конечное над центром, содержит ненулевой центральный главный идеал.

Замечание 7. Если R − центрально существенное кольцо, то его коммутаторный идеал не содержит регулярных элементов.

Замечание 8. Если R − центрально существенное кольцо, то для любых регулярных элементов $t_1, t_2, \ldots, t_n \in R$ существует такой $z \in C$, что $0 \neq t_i z \in C(R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из статьи [5, Example 4.1] следует замечание 9.

Замечание 9. Центрально существенные кольца, модульно конечные над центром, не инвариантны в общем случае.

Замечание 10. Если I − минимальный идеал центрально существенного кольца R, модульно конечного над центром, то $I^2 = 0$ или I − поле. Действительно, если $I^2 \neq 0$, то I содержится в центре $C(R)$ и является простым коммутативным кольцом, которое является полем.

Замечание 11. Фактор кольцо $R/P(R)$ центрально существенного кольца R по первичному радикалу может не быть центрально существенным и, в частности, полупервичное кольцо $R/J(R)$ может не быть коммутативным; см. [6, Theorem 1.5].

Литература

1. Туганбаев А.А. Кольца с существенным центром: монография. Москва: Флинта, 2025. 200 с.
2. Birkenmeier G.F, Heatherly H.E., Lee E.K Completely prime ideals and associated radicals // in: S.K. Jain, S.T. Rizvi (Eds.), Proceedings of the Biennial Ohio State-Denison Conference, 1992, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 102−129.
3. Small L.W., Stafford J.T. Regularity of zero divisors // Proceedings of the London Mathematical Society. 1982. Vol. 44, No. 3. P. 405−419. DOI: 10.1112/plms/s3-44.3.405.
4. Lyubimtsev O.V., Tuganbaev A.A. Centrally essential factor rings and subdirect indecomposability //Communications in Algebra. 2024. Vol. 52, No. 4. P. 1614−1621. DOI: 10.1080/00927872.2023.2267688.
5. Lyubimtsev O.V., Tuganbaev A.A. Local centrally essential subalgebras of triangular algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2022. Vol. 70, No. 13. P. 2415−2424. DOI: 10.1080/03081087.2020.1802402.
6. Markov V.T., Tuganbaev A.A. Constructions of Centrally Essential Rings // Communications in Algebra. 2020. Vol. 48, No. 1. P. 198−203. DOI: 10.1142/S0218196725500274.

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ GEMM НА ПРОЦЕССОРЕ SPACEMIT K3

Е.М. Максимов[1], А.А. Власов[1,2], Д.С. Бакуневич[1,3], А.Р. Когерманов[1]

[1]Новосибирский государственный университет,
[2]Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск,
[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

В данной работе проведено сравнительное однопоточное исследование производительности операции умножения плотных матриц общего вида (GEMM) на новом процессоре архитектуры RISC-V Spacemit K3 для форматов FP32 и FP64. Исследование проводилось на платформе AiBox K3 с использованием векторного расширения RVV 1.0. Установлено, что производительность достигает 62% от пика на FP32 и 71% от пика на FP64, что демонстрирует прогресс по сравнению с предыдущим поколением процессоров Spacemit K1 и прочими решениями на RISC-V. Выявлен пилообразный характер зависимости с просадками на кратных 32 точках. Данный результат демонстрирует эффективность современных программно-аппаратных оптимизаций архитектуры RISC-V.

Ключевые слова: RISC-V, GEMM, Spacemit K3, GEMM, RVV 1.0, OpenBLAS, анализ производительности, высокопроизводительные вычисления

1. Введение

В высокопроизводительных математических вычислениях, в частности в задачах, связанных с запуском нейронных сетей, часто применяется операция умножения плотных матриц общего вида – GEMM. Благодаря особенностям расположения матриц в памяти эта операция хорошо поддается оптимизации с использованием векторных и матричных регистров. Поэтому одна из ключевых задач исследований в области векторизации – оценка того, насколько эффективной может быть такая оптимизация.

В данной работе была протестирована функция GEMM на новом процессоре от компании Spacemit – Spacemit K3 на архитектуре RISC-V с использованием RVV 1.0. Процессор содержит два типа ядер: 8 X-ядер с частотой 2.4 ггц в пике и шириной векторного регистра в 256 бит, а также 8 A-ядер с частотой 2.1 ггц в пике и шириной 1024 бит с возможностью задействовать данные регистры как матричные[1]. При этом некоторые элементы архитектуры отключены, например: out-of-order исполнение. На данном процессоре основана платформа AiBox K3, которая в дальнейшем будет использоваться для тестирования производительности реализации алгоритмов умножения плотных матриц. Целевая платформа обладает также 16 гигабайтами оперативной памяти типа LPDDR5 с частотой 4200 МГц.

2. Методология анализа

Методология тестирования применялась следующая. Сравнивалось три реализации алгоритма GEMM для FP32 и FP64: стандартная реализация с измененным порядком циклов обхода; библиотечная функция sgemm/dgemm из библиотеки OpenBLAS и minigemm (только для FP32). Реализация minigemm использует алгоритм блочного перемножения матриц [3]. Все реализации тестировались в однопоточном режиме. OpenBLAS был скомпилирован в однопоточном режиме с пресет RISCV-64-VLEN256. На плате была установлена операционная система Bianbu OS 4.0 на базе Ubuntu 26.04. Размеры матриц варьировались от 32 до 2048. Для сравнения полученных результатов использовались данные, полученные ранее на платах Lichee PI и Banana Pi[3], а также результаты, полученные в ходе аналогичных тестов на плате Orange Pi 5+

с 8 гигабайтами оперативной памяти и операционной системой Ubuntu 26.04. Ядра Cortex A76 близки по теоретическим показателям производительности к X-ядрам платформы AiBox K3.

3. Результаты

В итоге были получены следующие результаты тестирования. По сравнению с предыдущими поколением процессоров Spacemit K3 и аналогичными платами на RISC-V производительность приблизилась к теоретическим пределам: если на K1 GEMM достигал 40-50% производительности от максимума [3], то на K3 удается достичь 62% на FP32-операциях и 71% на FP64. В обоих случаях пики достигались на значениях размеров в диапазоне от 128 до 256. При этом в обоих случаях график имеет пилообразную структуру с просадками на значениях, кратным 32. Профилирование показало, что в этих точках вырастает процент задержек процессорного конвейера, как на фронтенде, так и на бэкенде, а также процент промахов кэша(cache-miss). Эта тенденция наблюдалась и на предыдущем поколении, а также была отмечена в сторонних источниках [2].

Подводя итоги, можно отметить прогресс в аппаратной реализации векторных расширений архитектуры RISC-V, так и в программных оптимизациях (переход от RVV 0.7.1 к RVV 1.0), пусть пока показатели ARM-архитектуры и не достигнуты на сегодняшний день.

Литература

1. С.С. Лылова, А.А. Власов, Е.И. Латкин, И.И. Знаменский, В.Д. Волокитин. Исследование производительности умножения плотных матриц в библиотеке OpenBLAS на архитектуре RISC-V с использованием векторных инструкций. Вычислительные технологии, 2026, том 31, 2, с. 104–119. DOI:10.25743/ICT.2026.31.2.008.
2. Stepan Nassyr, Prateek Chawla, Daniel Seibel, Jayesh Badwaik, Kaveh Haghighi Mood, Andreas Herten. Great Expectations: Benchmarking the Real-World Performance of RVV 1.0 in HPC // arXiv:2608.28097v1 [cs.DC] 28 Aug 2026, URL: https://arxiv.org/html/2608.28097v1.
3. Goto K., van de Geijn R.A. Anatomy of high-performance matrix multiplication. ACM Transactions on Mathematical Software. 2008; 34(3):Art. 12. DOI:10.1145/1356052.1356053.

АНАЛИЗ ПРОПРИОЦЕПТИВНОЙ КОМПОНЕНТЫ РИТМОВ ЭЭГ ДЛЯ ОЦЕНКИ МОТОРНЫХ НАРУШЕНИЙ[1*]

А.Е. Мальков[1], А.В. Лебедева[1], Е.Я. Мацнева[1], Е.Е. Рыжкова[1], А.Н. Писарчик[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Политехнический университет Мадрида, Испания

Проприоцептивная обратная связь играет ключевую роль в контроле движений, а её нарушение вовлечено в патогенез моторных дефицитов при инсульте и болезни Паркинсона. В работе предложен подход к выделению проприоцептивных компонентов ЭЭГ с использованием машинного обучения. Модель классификации реального и воображаемого движения достигла Accuracy 0,813 и ROC-AUC 0,741; EEG-score статистически значимо изменялся до и после медикаментозной терапии ($p = 0,0054$). Подход может использоваться для объективной оценки моторной дисфункции и мониторинга терапевтических эффектов.

Ключевые слова: проприоцепция, электроэнцефалография, моторные нарушения, болезнь Паркинсона, машинное обучение, биомаркеры, сенсомоторная интеграция.

1. Введение

Двигательная активность зависит от постоянного взаимодействия нисходящих команд от моторных областей мозга и сенсорной информации, поступающей от тела. Среди различных компонентов соматосенсорной обратной связи проприоцепторный компонент играет ключевую роль в контроле осознанных движений. Повреждение обратной связи неминуемо приводит к ухудшению двигательного контроля даже в случаях, когда способность к движению не нарушена. Такие нарушения могут быть вовлечены в патогенез неврологических заболеваний, связанных с моторными нарушениями, например инсульт или болезнь Паркинсона, когда нарушение обработки проприоцептивных сигналов приводит к дефициту в моторной функции и сенсомоторной интеграции [1–3].

Электроэнцефалография (ЭЭГ) позволяет оценить обработку проприоцептивной информации при выполнении пассивных или контролируемых со стороны движений. Проприоцептивные вызванные потенциалы, связанные с изменением длины мышечных волокон, регистрируются через 90 мс после начала движения (N90). Эти потенциалы сохраняются при болезни Паркинсона и болезни Хантингтона, но наблюдаются нарушения более поздних ответов 170–180 мс. Таким образом, неврологические нарушения могут отражаться на обработке и интеграции кинестетической информации.

Отдельным классом электрографических биомаркеров является нарушение связанной с движением осцилляторной активности. В частности, пассивные движения связаны со снижением мощности μ- и β-ритмов и последующим усилением бета-осцилляций (бета-ребаунд). Vinding et al. продемонстрировали, что у пациентов с болезнью Паркинсона сохраняется десинхронизация β-ритма во время пассивного движения пальцев, но наблюдается значительно ослабленный β-ребаунд после движения по сравнению со здоровыми контрольными группами.

Более прямые доказательства клинической значимости проприоцептивных ЭЭГ-ответов были получены с использованием контролируемых роботизированных воздействий. Van Kordelaar et al. исследовали корковые ответы на роботизированные воздействия на лучезапястный сустав у 31 пациента, перенесших инсульт. У пациентов с клинически выявленными нарушениями проприоцепции показатели отношения сигнал/шум вызванного ответа были ниже,

[1]*Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2026-0012 «Генетические, молекулярные и клеточно-сетевые механизмы организации моторного контроля в головном мозге»)

чем у пациентов с сохранной проприоцепцией, и обнаруженные показатели обладали подтверждённым прогностическим потенциалом в отношении последующего восстановления двигательной функции верхней конечности.

Проприоцептивные ЭЭГ-биомаркеры не следует рассматривать исключительно как единый электрофизиологический параметр; скорее, их нужно воспринимать как многомерный набор потенциальных маркеров, отражающих различные этапы процесса сенсомоторной обратной связи. Оценка проприоцептивной обработки с помощью ЭЭГ может представлять собой дополнительный объективный подход к оценке моторной дисфункции. В отличие от традиционных клинических тестов, оценивающих преимущественно конечный функциональный результат, ЭЭГ позволяет непосредственно исследовать корковые реакции, связанные с передачей и интеграцией афферентной информации. Вызванные потенциалы, изменения активности в μ- и β-диапазонах, постдвигательный β-ребаунд, межполушарная асимметрия и характеристики функциональной связности могут отражать различные этапы обработки проприоцептивного сигнала [1–5]. Их совокупная оценка потенциально позволяет получить более полное представление о состоянии сенсомоторной системы и отслеживать её изменения в процессе восстановления.

Особый интерес такой подход представляет при использовании спинальной стимуляции и других методов нейромодуляции, направленных на восстановление или усиление сенсомоторной передачи. Изменения проприоцептивных компонентов ЭЭГ после стимуляции могут отражать восстановление передачи афферентной информации по оси «спинной мозг–кора» и, следовательно, служить физиологическим показателем эффективности вмешательства. При этом оценка динамики таких компонентов может быть более информативной, чем анализ абсолютных значений в отдельной временной точке.

В настоящем исследовании мы использовали открытые базы данных ЭЭГ здоровых участников и пациентов с повреждением спинного мозга, выполнявших двигательные паттерны и задачи воображаемого движения. С помощью методов машинного обучения мы исследовали возможность алгоритмического выделения из многоканальной ЭЭГ компонентов, связанных с обработкой проприоцептивной информации. Полученные показатели были далее использованы для количественной оценки выраженности моторной дисфункции и её изменений в контексте медикаментозного лечения болезни Паркинсона. Таким образом, наше исследование направлено на разработку объективного ЭЭГ-подхода к оценке проприоцептивной составляющей сенсомоторной функции, который в перспективе может использоваться для мониторинга восстановления двигательных функций и оценки эффективности нейромодуляционных вмешательств.

2. Материалы и методы

2.1. Данные ЭЭГ

В исследовании использовали два открытых набора данных ЭЭГ. Первый – EEG Motor Movement/Imagery Dataset, опубликованный G. Schalk и доступный через платформу PhysioNet. Набор содержит 64-канальные записи ЭЭГ, полученные при выполнении реальных и воображаемых движений верхних и нижних конечностей. Всего проанализировано 1526 сессий от 109 пациентов. Записи проводились с частотой дискретизации 160 Гц в соответствии с системой размещения электродов 10–10. Из данного набора выделяли 5-секундные эпохи, соответствующие периодам выполнения движений конечностями и воображения движений.

Второй набор – UC San Diego Resting State EEG Data from Patients with Parkinson's Disease, доступный через NEMAR. Набор содержит записи ЭЭГ 15 пациентов с болезнью Паркинсона, включая клинические показатели и данные, полученные при различных состояниях медикаментозной терапии.

2.2. Извлечение признаков ЭЭГ

Из каждой 5-секундной эпохи ЭЭГ извлекали многопараметрические характеристики ритмической активности по алгоритму, ранее описанному Malkov et al. Для каждого канала рассчитывали спектральную мощность методом Welch с последующим интегрированием в стан-

дартных частотных диапазонах: δ (1–4 Гц), θ (4–8 Гц), α (8–13 Гц), β (13–30 Гц) и γ (30–100 Гц). Для оценки межполушарной асимметрии рассчитывали коэффициент латерализации для гомологичных пар электродов F3/F4, C3/C4 и P3/P4. Дополнительно рассчитывали суммарную мощность для основных корковых областей и наклон спектра мощности в диапазоне 30–70 Гц как характеристику соотношения возбуждающих и тормозных процессов.

Для оценки взаимодействия ритмических компонентов анализировали фазово-амплитудную связь (phase-amplitude coupling, PAC). Мгновенные фаза и амплитуда определялись с использованием непрерывного вейвлет-преобразования с комплексным вейвлетом Морле. Для каждой пары частот рассчитывали индекс модуляции (modulation index, MI) на основе нормированной дивергенции Кульбака–Лейблера между распределением амплитуды по фазе и равномерным распределением. Полученные значения формировали частотно-фазовые карты PAC, из которых далее извлекали усреднённые показатели для выбранных частотных диапазонов.

Таким образом, для каждой ЭЭГ-эпохи формировался многомерный набор признаков, характеризующих спектральную мощность, межполушарную латерализацию, спектральный наклон и фазово-амплитудные взаимодействия.

Для классификации EEG-признаков использовали многослойный перцептрон (MLP) для разделения образцов на классы Ex (реальное движение с проприоцептивным сигналом) и MI (воображаемое движение). Данные разделяли на обучающую (80%) и тестовую (20%) выборки со стратификацией по классам. Эффективность модели оценивали по Accuracy, Balanced Accuracy, Precision, Recall, F1-score и ROC-AUC. Качество вероятностных прогнозов дополнительно оценивали по Brier score и log loss.

Для анализа данных из датасета UC San Diego Parkinson Disease использовали сохранённые параметры импутации, стандартизации и обученную модель. Для каждого образца рассчитывали вероятности принадлежности к классам Ex и MI. Для количественной оценки выраженности проприоцептивного сигнала рассчитывали EEG-score, рассчитываемый как вероятность класса Ex, умноженная на 100. Для каждого испытуемого отдельно рассчитывали средний EEG-score для состояний ses-off (до медикаментозного вмешательства) и ses-on (после применения медикаментов).

3. Результаты

На первом этапе была проведена классификация данных EEG Motor Movement/Imagery Dataset для разделения эпизодов, соответствующих реальному движению (Ex) и воображаемому движению (MI). Обученная модель многослойного перцептрона продемонстрировала Accuracy 0,8130 и ROC-AUC 0, 7406. При этом Balanced Accuracy составила 0,5846, Precision для класса Ex – 0,8239, Recall – 0,1800, а F1-score – 0,2954. Качество вероятностных предсказаний характеризовалось Brier score 0,1402 и log loss 0,4379.

Трёхмерное представление данных после PCA продемонстрировало различия в распределении образцов двух классов, соответствующих реальному (Ex) и воображаемому (MI) движению (рис. 1).

Полученную модель применили к EEG-данным пациентов с болезнью Паркинсона для количественной оценки проприоцептивного EEG-паттерна до и после приёма лекарственного препарата. Для каждого пациента рассчитывали EEG Score, отражающий вероятность принадлежности EEG-сигнала к классу реального движения (Ex). Сравнение индивидуальных значений Score до и после приёма препарата выявило статистически значимое различие. По результатам двустороннего точного критерия Уилкоксона для связанных выборок $p = 0,0054$, что указывает на достоверное изменение EEG Score после приёма препарата (рис. 2).

Эффективность парного сравнения также была статистически значимой: коэффициент корреляции Спирмена между парными измерениями составил $r_s = 0,5964$ ($p = 0,0106$). В анализ было включено 15 пар наблюдений, без совпадающих значений (ties). Таким образом, применение обученной модели позволило выявить статистически значимое изменение проприоцептивного EEG Score между состояниями до и после приёма препарата.

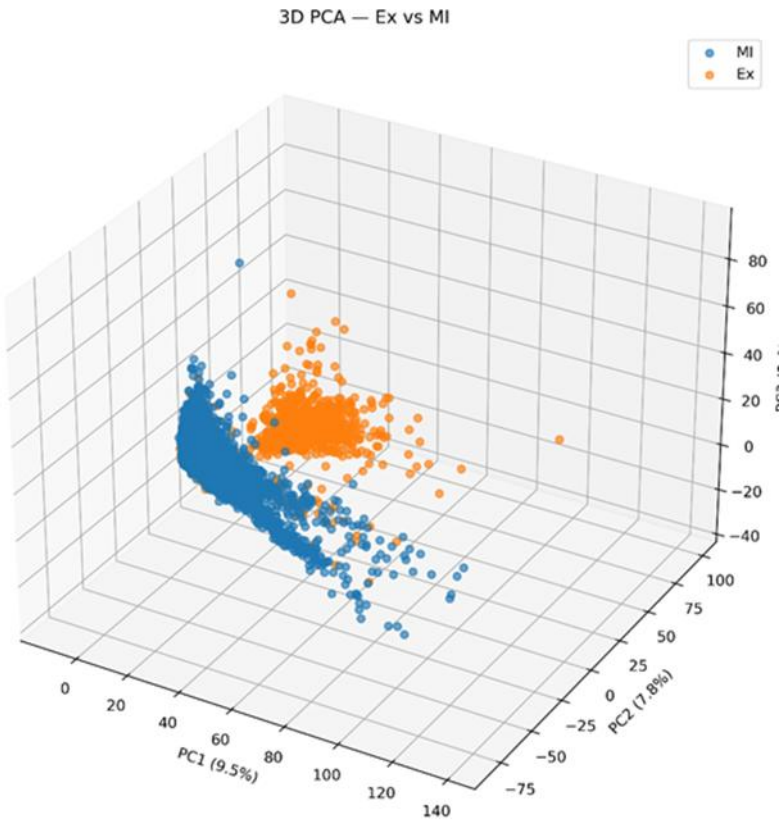


Рис. 1. Трёхмерное представление EEG-признаков после PCA. Пространственное распределение образцов демонстрирует разделение классов реального движения (Ex) и воображаемого движения (MI).

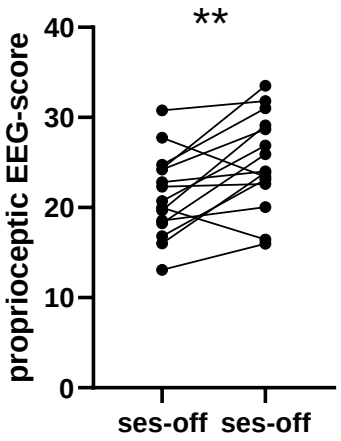


Рис. 2. EEG-score до и после приема медикаментов, компенсирующих моторные нарушения

4. Заключение

Проведённый анализ подтверждает, что проприоцептивная компонента ритмов ЭЭГ содержит информативные биомаркеры для оценки моторных нарушений при неврологических заболеваниях. Применение машинного обучения к многомерным ЭЭГ-признакам позволяет алгоритмически выделять паттерны, связанные с проприоцептивной обработкой, и использовать их для количественной оценки моторной дисфункции. Полученные результаты демонстрируют статистически значимое изменение EEG-score у пациентов с болезнью Паркинсона после медикаментозного вмешательства, что подтверждает чувствительность подхода к терапевтическим

эффектам. В перспективе такой метод может служить объективным инструментом мониторинга восстановления двигательных функций и оценки эффективности нейромодуляционных вмешательств, включая спинальную стимуляцию

Литература

1. Seiss E., Hesse C.W., Drane S., et al. Proprioception-related evoked potentials: origin and sensitivity to movement parameters // NeuroImage. 2002. Vol. 17, No. 1. P. 461–468. DOI: 10.1006/nimg.2002.1211.
2. Seiss E., Praamstra P., Hesse C.W., Rickards H. Proprioceptive sensory function in Parkinson's disease and Huntington's disease: evidence from proprioception-related EEG potentials // Experimental Brain Research. 2003. Vol. 148, No. 3. P. 308–319. DOI: 10.1007/s00221-002-1291-6.
3. Vinding M.C., Tsitsi P., Piitulainen H., et al. Attenuated beta rebound to proprioceptive afferent feedback in Parkinson's disease // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. Art. 2604. DOI: 10.1038/s41598-019-39204-3.
4. Campfens S.F., Meskers C.G.M., Schouten A.C., et al. Stretch Evoked Potentials in Healthy Subjects and After Stroke: A Potential Measure for Proprioceptive Sensorimotor Function // IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering. 2015. Vol. 23, No. 4. P. 643–654. DOI: 10.1109/TNSRE.2015.2388692.
5. van Kordelaar J., van de Ruit M., Solis-Escalante T., et al. The Cortical Response Evoked by Robotic Wrist Perturbations Reflects Level of Proprioceptive Impairment After Stroke // Frontiers in Human Neuroscience. 2021. Vol. 15. Art. 695366. DOI: 10.3389/fnhum.2021.695366.
6. Schalk G. EEG Motor Movement/Imagery Dataset (version 1.0.0). PhysioNet, 2009. DOI: 10.13026/C28G6P.
7. Rockhill A.P., Jackson N., George J., Aron A., Swann N.C. UC San Diego Resting State EEG Data from Patients with Parkinson's Disease (Version v1.0.2) [Data set]. NEMAR, 2026. DOI: 10.82901/nemar.on002778.
8. Malkov A.E., Lebedeva A.V., Gerasimova S.A., et al. Multiparametric machine learning for predicting epileptic hyperexcitability from interictal EEG background activity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2026. Vol. 152, Part B. Art. 109210. DOI: 10.1016/j.cnsns.2025.109210.
9. Schalk G., McFarland D.J., Hinterberger T., Birbaumer N., Wolpaw J.R. BCI2000: A general-purpose brain-computer interface system // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2004. Vol. 51, No. 6. P. 1034–1043. DOI: 10.1109/TBME.2004.827072.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ФРЭЭ В ПЛАЗМЕ КОРОТКОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В АРГОНЕ С ПРИМЕСЯМИ АТОМОВ МЕДИ МЕТОДОМ PIC/MCC[1*]

А.Р. Мардеев, А.И. Сайфутдинов

[1]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева*

В работе представлена PIC/MCC модель тлеющего разряда, учитывающая формирование быстрых электронов, образованных в реакциях пеннинговской ионизации и сверхупругих столкновений. Численные расчеты были проведены для короткого тлеющего разряда в аргоне с примесью атомов меди. Результаты продемонстрировали классическую картину в распределении параметров плазмы, а также формирование узких пиков на функции распределения электронов по энергиям от быстрых электронов.

Ключевые слова: короткий тлеющий разряд, плазменная электронная спектроскопия, функция распределения электронов по энергиям.

1. Введение

Неравновесная газоразрядная плазма являются объектом пристального внимания как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. В частности, такая плазма активно используется в установках по плазмохимическому синтезу, травлению, а также нанесению тонких пленок и покрытий. Так, например, в последних применяются магнетронные установки на основе короткого (без положительного столба) тлеющего разряда постоянного тока в инертных газах. Для короткого тлеющего разряда характерна пространственная неоднородность: области катодного падения потенциала, отрицательного свечения и прианодной зоны существенно различаются по составу и энергетике электронного ансамбля [1]. При работе с электродами происходит распыление материала катода (мишени) и поступление атомов на подложку. Перспективным методом диагностики концентрации атомов, распыленных с мишени, являются метод плазменной электронной спектроскопии (ПЛЭС). В частности, в работе [2] была продемонстрирована возможность определения прекурсоров наноструктурированного кремния в области отрицательного свечения тлеющего разряда. Этот метод, основанный на зондовой диагностике, позволяет регистрировать энергетические спектры быстрых электронов, рождённых в результате реакций пеннинговской ионизации возбуждённых атомов инертного газа и частиц примесей. В плазме с нелокальными характеристиками – прежде всего в отрицательном свечении короткого тлеющего разряда – различные группы электронов не успевают прорелаксировать по энергии в объёме и ведут себя независимо, что даёт возможность наблюдать узкие пики на функции распределения, соответствующие характеристическим энергиям пеннинговских электронов. Регистрация этих пиков классическими зондами Ленгмюра или дополнительными электродами-сенсорами открывает путь к идентификации и определению концентрации примесных атомов в плазме [2,3].

Ключевой характеристикой, определяющей скорости ионизации, возбуждения и диссоциации, является функция распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ). В условиях, когда длина свободного пробега электронов сравнима с характерными размерами неоднородностей, а функция распределения формируется в существенно неравновесных условиях, гидродинамические модели оказываются недостаточными. Наиболее адекватным инструментом для таких систем является кинетическое моделирование методом PIC/MCC, который позволяет рассчитывать самосогласованное электрическое поле и функцию распределения без априорных предположений о её форме. В связи с этим в представленной работе поставлена цель смоделировать

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема FZSU-2026-0016.

параметры плазмы короткого тлеющего разряда в инертном газе с примесями металлов (в частности, меди) и воспроизвести формирование узких пиков на ФРЭЭ.

2. Описание модели

Для исследования формирования функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) в плазме короткого тлеющего разряда в аргоне с примесями атомов меди было проведено численное моделирование методом частиц в ячейке (Particle-In-Cell, PIC) с совместным применением метода Монте-Карло для описания столкновительных процессов (PIC/MCC) [4].

Рассматривалась одномерная плоскопараллельная геометрия разрядного промежутка длиной L, ограниченного двумя электродами. На один электрод подавалось постоянное напряжение, второй электрод был заземлён. Пространство между электродами дискретизировалось равномерной сеткой с числом узлов N_G и шагом

$$\Delta x = \frac{L}{N_G - 1}.$$

Временная эволюция системы рассчитывалась с использованием малых временных шагов Δt. Для электронов и ионов применяются различные шаги интегрирования, что обусловлено различием их характерных временных масштабов: электроны, обладая существенно меньшей массой, требуют более мелкого шага для устойчивого интегрирования уравнений движения и корректного разрешения плазменных колебаний.

Плазма представляется ансамблем макрочастиц (суперчастиц). Каждая макрочастица соответствует большому числу реальных частиц и характеризуется весовым коэффициентом W. В модели учитываются электроны, ионы аргона, а также дополнительные компоненты, включая возбуждённые атомы Ar^* и ионы меди. Ионы меди возникают в результате плазмохимических реакций, в частности пеннинговской ионизации с участием возбуждённых атомов аргона и атомов меди. Нейтральные атомы меди рассматриваются как примесные частицы, участвующие в столкновительных процессах.

Концентрация возбуждённых атомов аргона определялась из уравнения неразрывности. Концентрации заряженных частиц вычисляются на сетке методом взвешивания (cloud-in-cell), что обеспечивает согласованность с решением уравнения Пуассона.

Движение частиц описывается уравнениями Ньютона:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = q_i E, \frac{dx_i}{dt} = v_i,$$

где m_i, q_i, x_i, v_i – масса, заряд, координата и скорость i-й макрочастицы, E – напряжённость самосогласованного электрического поля. Интегрирование уравнений движения проводится с использованием схемы «leapfrog», обеспечивающей второй порядок точности по времени и хорошую устойчивость.

Электрическое поле рассчитывается из одномерного уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где φ – потенциал, ε_0 – электрическая постоянная, ρ – плотность объёмного заряда, вычисляемая по координатам макрочастиц с использованием cloud-in-cell взвешивания. Напряжённость поля определяется как

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Граничные условия задаются в виде полностью поглощающих электродов. При достижении электрода заряженная частица исключается из расчёта. Для поддержания разряда на катоде учитывается вторичная электронная эмиссия с коэффициентом γ. При бомбардировке катода ионами происходит эмиссия электронов, которые затем ускоряются в прикатодной области и участвуют в формировании ФРЭЭ.

Столкновения частиц с атомами газа моделируются методом Монте-Карло. Вероятность столкновения определяется через полное эффективное сечение и относительную скорость частиц. В модели учитываются следующие элементарные процессы:

– упругие столкновения электронов с атомами аргона и меди;

– возбуждение атомов аргона электронным ударом;
– прямая ионизация атомов аргона и меди;
– сверхупругие столкновения (тушение возбуждённых состояний);
– пеннинговская ионизация с участием возбуждённых атомов аргона и атомов меди:

$$\mathrm{Ar}^{*} + \mathrm{Cu} \rightarrow \mathrm{Ar} + \mathrm{Cu}^{+} + e.$$

Учёт пеннинговской ионизации позволяет описать рождение быстрых электронов, что принципиально важно для формирования немаксвелловской ФРЭЭ и интерпретации данных плазменной электронной спектроскопии.

В расчётах варьировались длина разрядного промежутка L, давление газа, приложенное напряжение и концентрация примесей меди. Основные параметры выбирались таким образом, чтобы соответствовать условиям короткого тлеющего разряда, в котором отсутствует положительный столб и существенную роль играют нелокальные кинетические эффекты.

3. Результаты и вывод

Численные расчёты короткого тлеющего разряда в аргоне с примесями меди были выполнены для давления 1 Торр и межэлектродного промежутка длиной 2 см. Полученные пространственные распределения параметров плазмы качественно соответствуют классической картине тлеющего разряда: вблизи катода формируется область катодного падения потенциала, за которой следует область отрицательного свечения, переходящая в фарадеево тёмное пространство и прианодную зону. При этом в каждой точке пространства по длине разрядного промежутка была рассчитана функция распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ), что позволило проследить эволюцию электронного ансамбля вдоль разряда.

В плазменной области отрицательного свечения на ФРЭЭ наблюдалось образование характерных пиков, обусловленных быстрыми электронами, рождёнными в реакциях пеннинговской ионизации и сверхупругих столкновениях. В частности, в объёме плазмы протекают процессы пеннинговской ионизации с участием возбуждённых атомов аргона, а также с участием атомов меди, поступающих в разрядный промежуток в результате катодного распыления.

Кроме того, существенный вклад в формирование ФРЭЭ вносят сверхупругие столкновения электронов с возбуждёнными атомами аргона, при которых медленный электрон приобретает энергию, соответствующую энергии возбуждения метастабильного состояния. Все эти каналы приводят к появлению в ФРЭЭ дополнительных групп быстрых электронов, которые проявляются в виде локальных максимумов (пиков) на энергетическом спектре. Положение и амплитуда этих пиков зависят от возбуждённых атомов буферного газа и потенциала ионизации атомов меди.

Полученные распределения демонстрируют, что регистрация таких пиков возможна с помощью зондовой диагностики, что открывает возможность определения концентрации возбуждённых атомов и примесей в плазме.

Таким образом, численные расчёты показали возможность диагностики быстрых электронов и использования метода плазменной электронной спектроскопии (ПЛЭС) для диагностики коротких тлеющих разрядов в процессах распыления и осаждения наноструктурированных металлических покрытий. Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации экспериментальных спектров быстрых электронов и оптимизации технологических режимов разряда.

Литература

1. Кудрявцев А. А., Морин А. В., Цендин Л. Д. Роль нелокальной ионизации в формировании коротких тлеющих разрядов //Журнал технической физики. – 2008. – Т. 78. – №. 8. – С. 71-82.
2. Сайфутдинов А.И., Сысоев С.С. Исследование кинетики быстрых электронов и параметров плазмы отрицательного свечения тлеющего разряда в гелии пониженного давления // Физика плазмы. – 2023. – Т. 49. – №7. – С. 712-726. doi: 10.31857/S0367292123600024.

3. Zhou C., Wang H., Saifutdinov A., Saifutdinova et al. Is it possible to dynamical monitoring the products of silane conversion in plasma with non-local characteristics using probe diagnostics? // Plasma Sources Science and Technology. – 2026.
4. Donkó Z., Hartmann P., Kutasi K. On the reliability of low-pressure dc glow discharge modelling // Plasma Sources Science and Technology. – 2006. – Т. 15. – №. 2. – С. 178-186.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ СРЫВА ЛОКАЛИЗАЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ АНСАМБЛЕ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ БАУТИНА СО СМЕШАННОЙ СВЯЗЬЮ[1*]

А.А. Маркелов[1,2], А.С. Дмитричев[2], В.И. Некоркин[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
[2]Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН

Исследована динамика кольца осцилляторов Баутина со смешанным диффузионно-аддитивным взаимодействием и случайным разбросом собственных частот. Численно определены границы устойчивости пространственно локализованного (уединенного) состояния, в котором активным является один элемент ансамбля, а амплитуды остальных осцилляторов близки к нулю. Такие состояния в современных моделях эпипепсии рассматриваются как интериктальные или межприступные, отвечающие нормальной активности систем. Методом расчета старших показателей Ляпунова установлено, что срыв локализации происходит через бифуркацию Неймарка–Сакера. Показано, что выход за границу устойчивости приводит к жёсткому переходу системы в однородное состояние, отражающее динамику генерализации эпилептического приступа.

Ключевые слова: осциллятор Баутина, смешанная связь, локализованное состояние, бифуркация Неймарка–Сакера, эпилептическая активность.

1. Введение

Математическое моделирование эпилептической активности головного мозга часто базируется на сетевых моделях бистабильных элементов с аддитивным и диффузионным типами связей [1–3]. Диффузионное взаимодействие стабилизирует «интериктальное» (interictal state – межприступное) состояние системы, которому отвечает локализованная (уединенная) синхронная активность части ее элементов на фоне покоя всех остальных, тогда как аддитивное интенсифицирует генерацию патологических (приступных) состояний и переход значительной части элементов системы к однородному синхронному состоянию (режим синхронных колебаний) [3]. Особый интерес представляет исследование пространственно протяженных кольцевых сетей, в которых за счет геометрии связей могут возникать режимы пространственного амплитудного хаоса и локализованного подавления колебаний [4].

Срыв системы в патологический режим происходит либо из-за случайных флуктуаций, переводящих траекторию в область притяжения однородных колебаний, либо в результате изменения параметров сети, приводящего к прямой потере устойчивости состояния равновесия [2, 5].

Большинство существующих работ ограничено идеализированными среднеполевыми архитектурами [5]. В то время как динамика изолированных пар осцилляторов Баутина детально исследована [6, 7], проблема поиска точных границ устойчивости фонового режима в крупномасштабных сетях со смешанным взаимодействием и разбросом частот остается открытой. Определение критических условий потери устойчивости интериктального состояния в таких кольцевых геометриях необходимо для понимания механизмов локализации приступов и составляет цель настоящей работы.

[1*] Работа выполнена при поддержке государственного задания Института прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук (проект № FFUF-2024-0011).

2. Модель

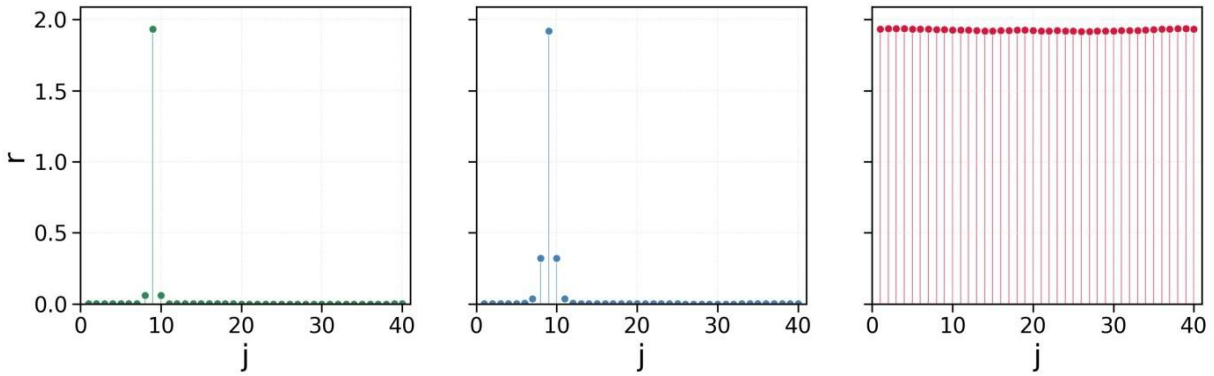
Рассматривается ансамбль из N упорядоченных в кольцо бистабильных осцилляторов Баутина, взаимодействующих только со своими ближайшими соседями слева и справа. В комплексной форме динамика исследуемой локально связанной системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_j = (\alpha + i\omega_j)z_j + \beta z_j|z_j|^2 - z_j|z_j|^4 + \beta_c(z_{j-1} + z_{j+1} - 2z_j) + \gamma_c(z_{j-1} + z_{j+1}), \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, N$ – индекс осциллятора, $z_j = x_j + y_j = r_j e^{i\varphi_j}$ комплексная переменная, описывающая динамику j-го элемента. Параметры α и β задают внутреннюю локальную динамику изолированного элемента и выбраны таким образом, что каждый изолированный элемент системы (1) является бистабильным. На его фазовой плоскости имеются устойчивые состояние равновесия в начале координат и предельный цикл большой амплитуды, а между ними существует неустойчивый предельный цикл, разделяющий аттракторы. Собственные частоты осцилляторов задаются как $\omega_j = \omega_0 + \delta\,\xi_j$, где $\xi_j \sim \mathcal{U}[0,1]$ – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$, с фиксированным зерном генератора. Взаимодействие элементов в кольце обеспечивается сочетанием двух видов связи: β_c задает коэффициент локальной диффузионной связи, а γ_c коэффициент локальной аддитивной связи.

3. Результаты

Численное исследование системы (1) проводилось при фиксированных параметрах $N = 40$, $\alpha = -1, \beta = 4$, $\omega_0 = 1.0$, $\delta = 0.2$. В области малых значений коэффициентов как диффузионной, так и аддитивной связей численно установлено существование устойчивого пространственно локализованного (уединенного) состояния в котором, активным является один элемент ансамбля ($r_9 \approx 2.0$), тогда как амплитуды остальных осцилляторов близки к нулю (рис. 1а). С ростом интенсивности взаимодействия между узлами амплитуды колебаний соседних элементов постепенно возрастают, что приводит к размытию границ локализации (рис. 1б). На границе происходит срыв локализованного режима (рис. 1в) с последующим жёстким переходом динамики системы к глобальному однородному синхронному состоянию, характеризующемуся выравниванием амплитуд всех элементов на уровне $r_j \approx 2.0$. Область существования уединенного состояния на плоскости управляющих параметров (β_c, γ_c) была найдена численно и выделена цветом на рис. 2.



(а) (б) (в)

Рис. 1. Амплитудные профили состояний сети при различных интенсивностях взаимодействия для $\gamma_c = 0.02858$: а – $\beta_c = 0.001$, б – $\beta_c = 0.10372$, в – $\beta_c = 0.10373$.

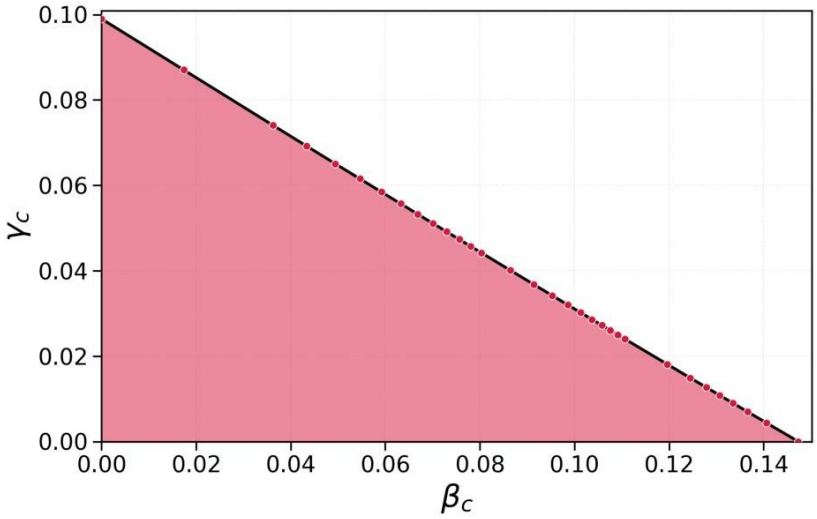


Рис. 2. Область существования локализованного режима на плоскости парметров (β_c, γ_c)

Для выяснения динамического механизма потери устойчивости были рассчитаны старшие показатели Ляпунова λ_i в зависимости от параметра γ_c при фиксированном $\beta_c = 0.08$ (рис. 3). При приближении к границе области ($\gamma_c \to \gamma_c^*$, пунктирная линия) вещественные части двух комплексно-сопряжённых пар старших показателей одновременно стремятся к нулю: $Re\ \lambda_{\{2,3\}} \to 0$ и $Re\ \lambda_{\{4,5\}} \to 0$, тогда как их мнимые части сохраняются. Это однозначно указывает на то, что срыв локализации происходит через бифуркацию Неймарка–Сакера.

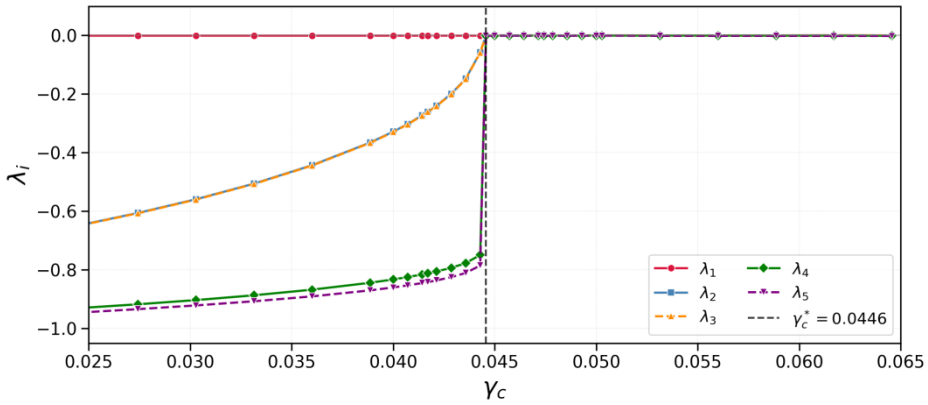


Рис. 3. Зависимости пяти старших показателей Ляпунова λ_i от параметра γ_c при $\beta_c = 0.08$. Вертикальная пунктирная линия – предсказанная граница $\gamma_c^* = 0.0446$.

4. Заключение

В работе исследован локализованный режим в кольце из $N = 40$ бистабильных осцилляторов Баутина со смешанной связью. В данном режиме активен лишь один осциллятор. Показано, что потеря его устойчивости происходит через бифуркацию Неймарка–Сакера. После бифуркации система переходит на однородный режим, в котором активны все осцилляторы с близкими амплитудами. Такой жесткий переход может описывать динамические механизмы генерализации эпилептического приступа, обсуждаемые в современных сетевых моделях эпилепсии.

Литература

1. Kant N., Mukherjee R. Investigating Bistable Dynamics of Coupled Oscillators With Simi-larities to Neural Activity in Epilepsy // IEEE Control Systems Letters. 2024. Vol. 8. P. 2919–2924. DOI: 10.1109/LCSYS.2024.3519014.

2. Liu Z., Qin Y., van Gerven M.A.J., Stursberg O. Synchronization and Control in Bistable Oscillator Networks: Towards Epilepsy Regulation // IEEE Control Systems Letters. 2025. Vol. 9. P. 1514–1519. DOI: 10.1109/LCSYS.2025.3582953.
3. Lopes M.A., Hamandi K., Zhang J., Creaser J.L. The role of additive and diffusive coupling on the dynamics of neural populations // Scientific Reports. 2023. Vol. 13, No. 1. Art. no. 4115. DOI: 10.1038/s41598-023-30172-3.
4. Emelianova A.A., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Disordered quenching in arrays of cou-pled Bautin oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32, No. 6. Art. no. 063126. DOI: 10.1063/5.0093947.
5. Qin Y., El-Gazzar A., Bassett D.S., Pasqualetti F., van Gerven M. Analytical Characterization of Epileptic Dynamics in a Bistable System // 2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control (CDC). 2024. P. 583–588. DOI: 10.1109/cdc56724.2024.10886408.
6. Markelov A.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I. Bifurcations of periodic orbits in the system of coupled extended Stuart-Landau oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Non-linear Science. 2026. Vol. 36, No. 9. Art. no. 093122. DOI: 10.1063/5.0349743.
7. Markelov A.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I. New Dynamical Mechanisms of Quenching in a System of Coupled Bautin Oscillators // Regular and Chaotic Dynamics. 2025. Vol. 30, No. 6. P. 992–1008. DOI: 10.1134/S1560354725060048.

МЕТОД АВТОМАТИЗАЦИИ КАЛИБРОВКИ ПАРАМЕТРОВ ПОДСИСТЕМЫ ПАМЯТИ GEM5 ДЛЯ ФИКСИРОВАННОЙ АППАРАТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЯДРА XUANTIE C910

А.Ю. Мартынов, Е.А. Козинов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается проблема высокой трудоемкости ручного подбора параметров конфигурации запуска симулятора gem5. Для решения данной задачи предлагается метод автоматической настройки, основанный на добавлении управляющего Python-слоя поверх симулятора и использовании фреймворка для подбора гиперпараметров Optuna. В качестве бенчмарка применяется набор тестов STREAM Triad. Оценка точности метода проводилась путем вычисления среднеквадратичной ошибки между результатами вычислительных экспериментов, полученными на реальном вычислительном устройстве и в симуляторе gem5. Предложенный подход позволил снизить значение ошибки в 4 раза по сравнению с базовой конфигурацией.

Ключевые слова: Настройка микроархитектурных параметров, эмуляция системных вызовов, бенчмаркинг, gem5, RISC-V.

1. Введение

Архитектурное моделирование зачастую используется для исследования вычислительных систем до появления готовой реализации в “железе”, а также для анализа влияния микроархитектурных параметров на производительность. Одним из наиболее популярных инструментов для исследований в области компьютерной архитектуры является gem5[1]. Данный симулятор поддерживает потактовое моделирование и логирование инструкций, а также подсистем памяти. Одно из главных преимуществ gem5 заключается в возможности гибкой настройки различных параметров конфигураций запуска: от моделей процессора до размеров буферов промахов MSHR.

Практическая проблема заключается в том, что подавляющее большинство параметров реальных RISC-V процессоров не раскрываются производителями [2]. Более того, использование стандартных параметров запуска для gem5 не позволяет добиться близких результатов с реальными устройствами. К тому же, стандартные конфигурации запуска gem5 являются устаревшими и не поддерживаются разработчиками, что приводит пользователя к ручному подбору параметров. При этом, уже существуют подходы к автоматической настройке gem5, но они выполнены для архитектуры ARM [3], достаточно тяжеловесны и могут изменять известные параметры процессоров, например, размеры кэш-памяти, которые в некоторых задачах важно оставить неизменными. Альтернативой является ручной подбор параметров, который требует большого количества запусков, что приводит к колоссальным затратам времени со стороны пользователя.

Целью данной работы является разработка метода для автоматизации процесса калибровки параметров запуска gem5, основываясь на заранее известных измерениях, полученных на фиксированной платформе при помощи бенчмарка на основе Stream Triad. Калибровка будет осуществляться путём изменения параметров подсистемы памяти.

2. Постановка задачи

В качестве объекта настройки будем рассматривать конфигурацию запуска gem5 с фиксированными аппаратными характеристиками процессора XuanTie C910. Тактовая частота процессора, размеры кэш-памяти в процессе настройки не меняются. На рисунке 1 представлены

все перебираемые параметры подсистемы памяти, а также допустимые значения для этих параметров.

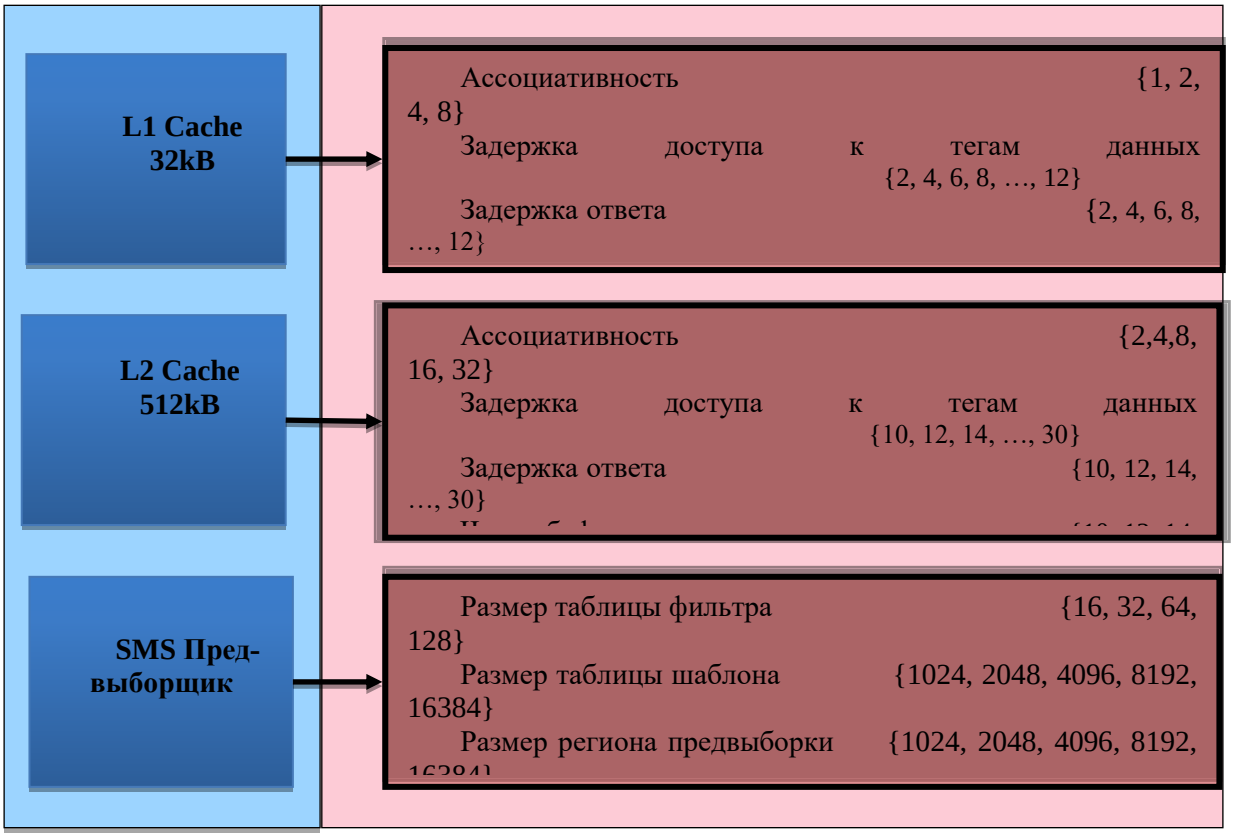


Рис. 1. Настраиваемые параметры θ подсистемы памяти в модели gem5 и их допустимые значения

Пусть θ обозначает множество настраиваемых параметров. Проводим N тестов, отличающихся сложностью задачи. Для каждого теста доступны значения времени $t_{sim_i}(\theta)$ и t_{hw_i}, где $t_{sim_i}(\theta)$ – это время работы теста, полученное из симуляции, t_{hw_i} – время работы теста, которое было получено с платы Lichee Pi. Необходимо найти такое множество θ, которое бы приводило в минимум квадратичную сумму отклонений:

$$F(\theta) = \sum_{i=0}^{N} (t_{sim_i}(\theta) - t_{hw_i})^2 \to min \quad (1)$$

3. Программная реализация автотюнера

В рамках данной работы в качестве набора тестов был выбран сценарий STREAM Triad, предназначенный для оценки пропускной способности памяти и вычислительной производительности простых сценариев [4]. Описать данный сценарий можно при помощи следующей простой формулы:

$$A_i = B_i + C_i * d, \text{где } i = 0, \dots, N-1, d = 3 \quad (2)$$

Для автоматической настройки параметров разработан метод, общая вычислительная схема которого представлена на рисунке 2.

В качестве начального этапа, для получения значений времени t_{hw} необходимо на реальной вычислительной системе запустить тесты STREAM Triad. В дальнейшей, t_{hw} будет использоваться в качестве эталона для настройки всей подсистемы.

Когда данные собраны, следующим этапом необходимо настроить конфигурацию запуска. Для реализации этого шага в алгоритме присутствуют блок оркестратора, блок выбора параметров θ на основе Optuna, а также блок, предоставляющий работу с gem5. Оркестратор формирует набор параметров, которые передаются в блок, отвечающий за работу с gem5, а также

запускает симуляцию, считывает вывод gem5 из командной строки, и вычисляет значение функции $F(\theta)$ из (1).

Блок выбора параметров на основе Optuna реализует поиск и перебор параметров с использованием алгоритма TPE [6], при этом в качестве критерия оптимизации выступает значение функции ошибки $F(\theta)$ из (1).

Блок, отвечающий за работу с gem5, реализован в виде python-скрипта, который принимает значения настраиваемых параметров от оркестратора и задаёт архитектуру устройства.

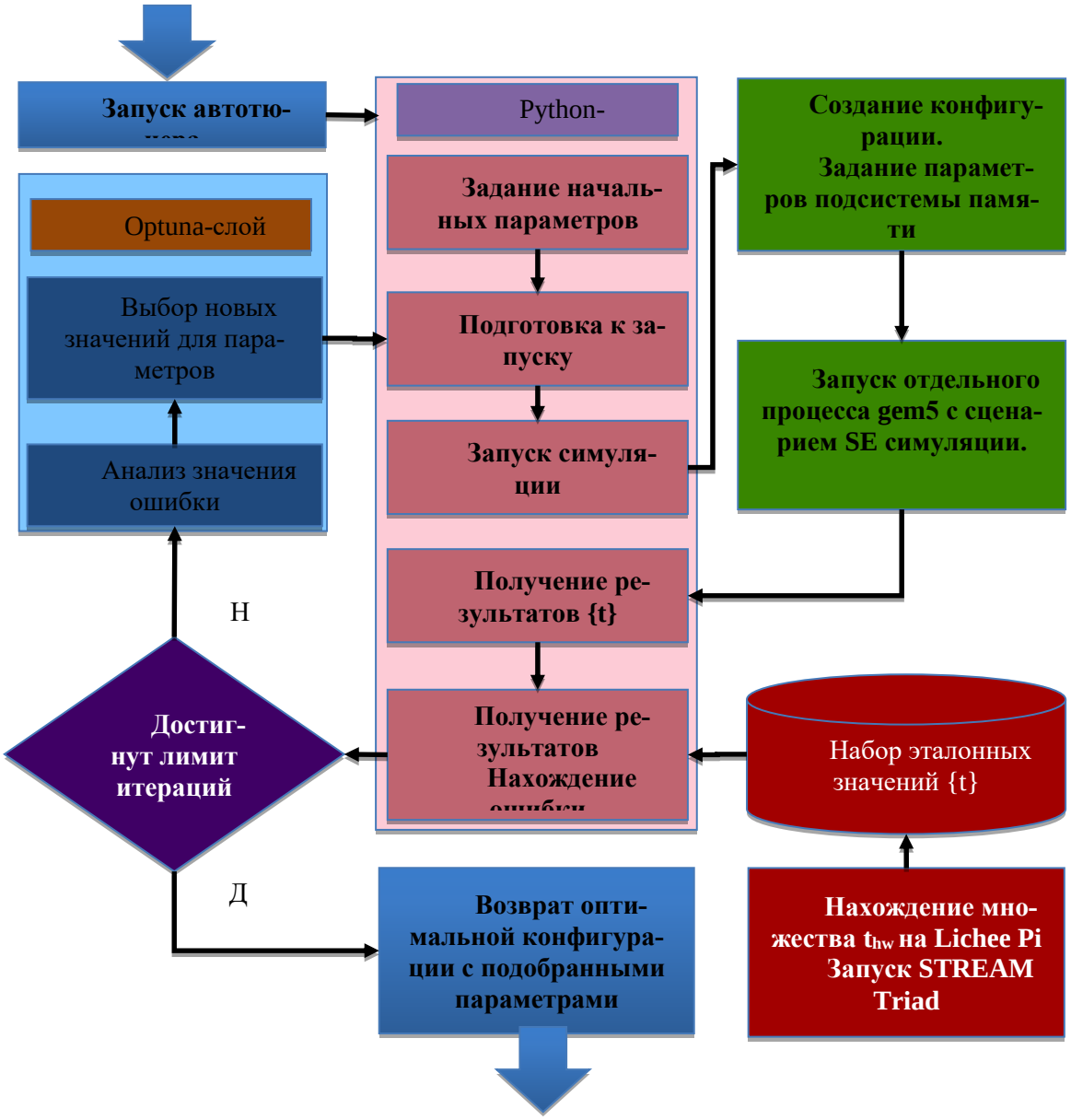


Рис. 2. Общая схема алгоритма для автоматической настройки параметров gem5

Процесс настройки продолжается до достижения заданного числа испытаний. По окончании работы алгоритма, пользователю выводится минимальное найденное значение функции $F(\theta)$ из (1), а также набор параметров θ, при котором достигается найденное минимальное значение.

4. Результаты вычислительных экспериментов

Для оценки качества получившегося метода был проведёт ряд экспериментов. Для получения эталонного времени проводились запуски STREAM Triad на плате Lichee Pi с ядром XuanTie C910, которые в дальнейшем использовались в оркестраторе автотюнера.

Эксперименты проводились для двух вариантов доступа к памяти. В первом случае использовался последовательный доступ к памяти – шаг равен 1 элементу. Во втором случае применялся доступ к памяти с шагом, равным 2 элементам. Подобное сочетание тестов позволяет более точно настроить конфигурацию для различных сценариев, в частности для разработки и тестирования пользовательских векторных инструкций RVV [7].

Для каждого варианта доступа к памяти сравнивались две конфигурации gem5: стандартная конфигурация запуска и конфигурация, настроенная при помощи разработанного алгоритма. На рисунке 3 представлены графики зависимости времени выполнения бенчмарка STREAM Triad от размера массивов. Стандартная конфигурация демонстрирует существенное отклонение от реальных данных. После настройки результаты варианта STREAM Triad с доступом к памяти с шагом 2 на больших размерностях становятся близки к значениям, полученным на Lichee Pi. Для последовательного доступа на больших размерностях расхождение сохраняется, однако настроенная конфигурация демонстрирует результаты, более близкие к реальным, чем стандартная конфигурация.

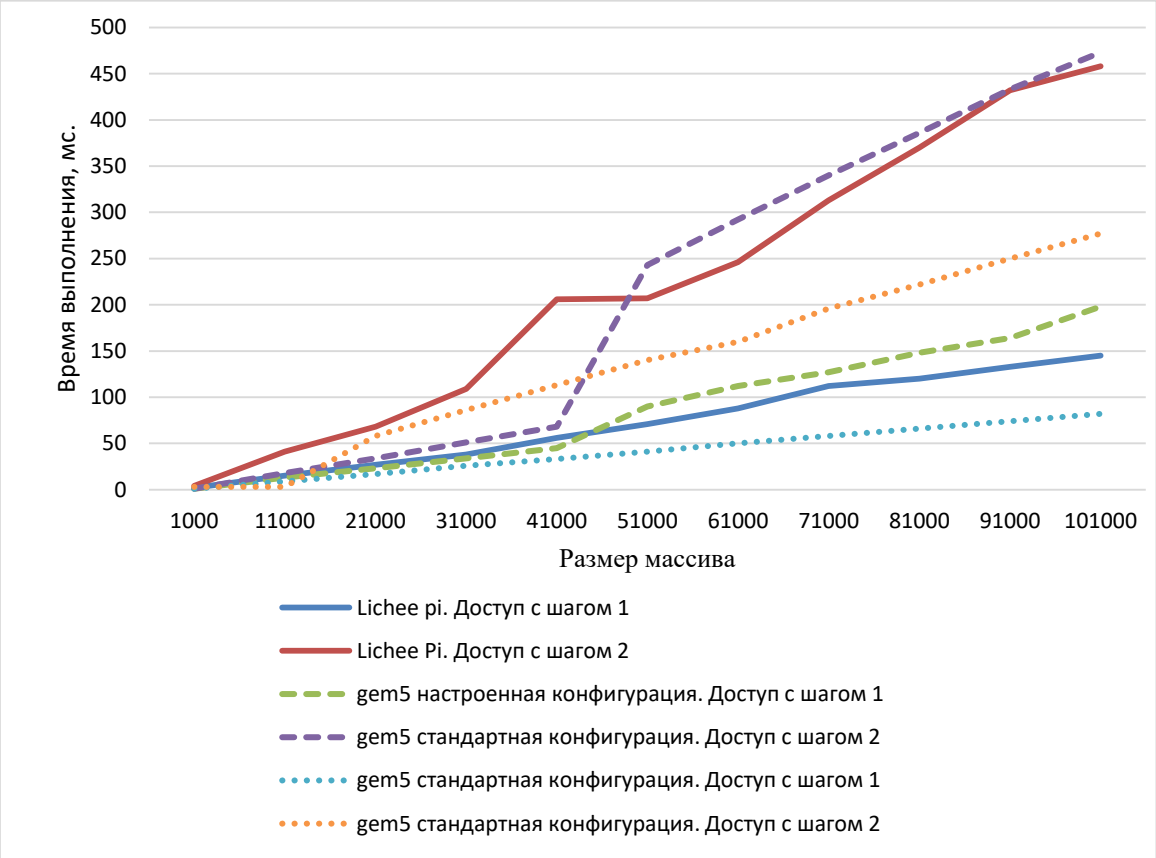


Рис. 3. Время работы теста STREAM Triad в зависимости от размера массива

Для количественной оценки качества настроенной конфигурации использовалась функция $F(\theta)$ из (1). Для стандартной конфигурации, предоставляемой gem5, значение составляло 140522. После настройки значение суммы ошибок снизилось до 34599. Таким образом, используемый алгоритм автотюнинга позволил уменьшить значение ошибки более чем в 4 раза, что является хорошим результатом. Таким образом, проведённые вычислительные эксперименты подтверждают работоспособность предложенного подхода к автоматической настройке параметров симулятора gem5.

Таблица 1. Сравнение качества конфигураций gem5

Вид конфигурации параметров gem5	Значение суммы квадратов ошибок
Стандартная конфигурация	140 522
Конфигурация, настроенная при помощи автотюнинга	34 599

5. Заключение

В работе предложен метод автоматической настройки параметров ядра на основе симулятора gem5 для конкретной аппаратной платформы. Метод позволяет подбирать параметры подсистемы памяти на основе результатов теста STREAM Triad и измерений, полученных с платы Lichee Pi. Проведены численные эксперименты, показавшие, что после настройки значение ошибки снизилось более чем в 4 раза по сравнению со стандартной конфигурацией запуска gem5. Это подтверждает работоспособность предложенного метода.

В качестве направлений дальнейших исследований предполагается расширение набора настраиваемых параметров, в том числе параметров латентности основных инструкций, а также применение предложенного подхода к другим аппаратным платформам. Кроме того, представляет интерес сравнение эффективности различных алгоритмов оптимизации с целью повышения точности и сокращения времени настройки.

Литература

1. Binkert N. et al. The gem5 Simulator // ACM SIGARCH Computer Architecture News. – 2011. – Vol. 39, No. 2. – P. 1–7. – DOI: 10.1145/2024716.2024718.
2. T-Head Semiconductor. XuanTie C910/C920 User Manual. – 2021/2023.
3. Qiu Y., Huang T., Tang Y., Liu Y., Kong Y., Yu X., Zeng X., Fan Y. Gem5Tune: A Parameter Auto-Tuning Framework for Gem5 Simulator to Reduce Errors // IEEE Transactions on Computers. – 2024. – Vol. 73, No. 3. – P. 902–914. – DOI: 10.1109/TC.2023.3347675.
4. McCalpin, John D. Memory Bandwidth and Machine Balance in Current High Performance Computers // IEEE Computer Society Technical Committee on Computer Architecture (TCCA) Newsletter. – 1995. – December. – Pp. 19–25.
5. Akiba, T. Optuna: A Next-generation Hyperparameter Optimization Framework / T. Akiba, S. Sano, T. Yanase, T. Ohta, M. Koyama // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. – Anchorage: ACM, 2019. – P. 2623–2631.
6. Bergstra J., Bardenet R., Bengio Y., Kégl B. Algorithms for Hyper-Parameter Optimization // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2011. – Vol. 24.
7. Volokitin V., Kozinov E., Petrov V., Meyerov I. A New Cross-Product Instruction for RISC-V CPUs // Parallel Computing Technologies. – Cham: Springer, 2025. – Vol. 14750. – P. 169–184.

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ КРОСС-МОДАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ЦВЕТОВЫЕ ОТТЕНКИ

А.Э. Медведев, В.М. Михелев

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Представлена методология кросс-модального преобразования акустических сигналов в цветовые представления, разделённая по типу входного сигнала. Для категориальных звуков окружающей среды предложено введение промежуточной текстовой модальности с последующим семантическим сопоставлением описаний в латентном пространстве. Для эмоциональной окраски речевого сигнала как отдельного вида акустической информации предложен подход, основанный на непрерывном пространстве Valence–Arousal–Dominance и цветовой модели HSV. Экспериментально показана согласованность формируемых цветовых соответствий и пригодность компактных нейросетевых архитектур для функционирования в реальном времени.

Ключевые слова: искусственный интеллект, кросс-модальность, акустические сигналы, цветовое отображение, семантическое сопоставление, латентное пространство, модель Valence–Arousal–Dominance, модель HSV.

1. Введение

Проблема установления устойчивых соответствий между разнородными сенсорными модальностями приобретает всё большую значимость в контексте развития мультимедийных технологий, систем дополненной реальности и интерактивного дизайна [1, 2]. В частности, задача перевода акустической информации в визуально интерпретируемый формат представляет собой нетривиальную научную проблему, объединяющую методы психоакустики, теории цвета, семантического анализа и машинного обучения.

В отличие от устоявшихся кросс-модальных пар «текст – изображение» или «речь – текст», переход от звука к цвету лишён стандартизированной теоретической базы. Существующие исторические системы соответствий (например, цвето-тональные шкалы Ньютона, Кляйна, Скрябина) характеризуются выраженной субъективностью и ориентированы преимущественно на музыкальные тоны [3], не затрагивая широкий спектр бытовых, природных и урбанистических акустических событий. В связи с этим возникает необходимость разработки формализованного, воспроизводимого и вычислительно обоснованного подхода к установлению связи «звук – цвет».

В данной работе представлено два подхода для кросс-модального перехода от акустической модальности к цветовой: для категориальных звуков окружающей среды и для эмоций речевого сигнала. В первом случае вводится промежуточное текстовое представление с последующим семантическим сопоставлением в латентном пространстве, а во втором – предлагается проецирование непрерывного пространства Valence–Arousal–Dominance в модифицированную цветовую модель HSV. Также обсуждаются экспериментальные результаты обоих решений.

2. Кросс-модальный переход из категориальных звуков в цвет

Прямое кросс-модальное отображение акустического сигнала в цветовой код затруднено по двум причинам. Во-первых, модальность цвета остаётся недостаточно исследованной с точки зрения наличия крупных размеченных корпусов и предобученных моделей. Во-вторых, субъективность цветового восприятия не позволяет сформировать универсальную таблицу соответствий без дополнительных формальных критериев.

Для преодоления этих ограничений предложено ввести вспомогательную текстовую модальность в виде семантического «переводчика» между звуком и цветом. С одной стороны,

каждому акустическому событию присваивается текстовый класс из заданного словаря, а с другой – цветовому оттенку даётся текстовая характеристика, включающая, например, название, ассоциативное описание, эмоциональную окраску и символическое значение. Далее оба текстовых описания проецируются в единое латентное пространство, где близость определяется косинусным расстоянием между векторными представлениями, как показано на рис. 1.

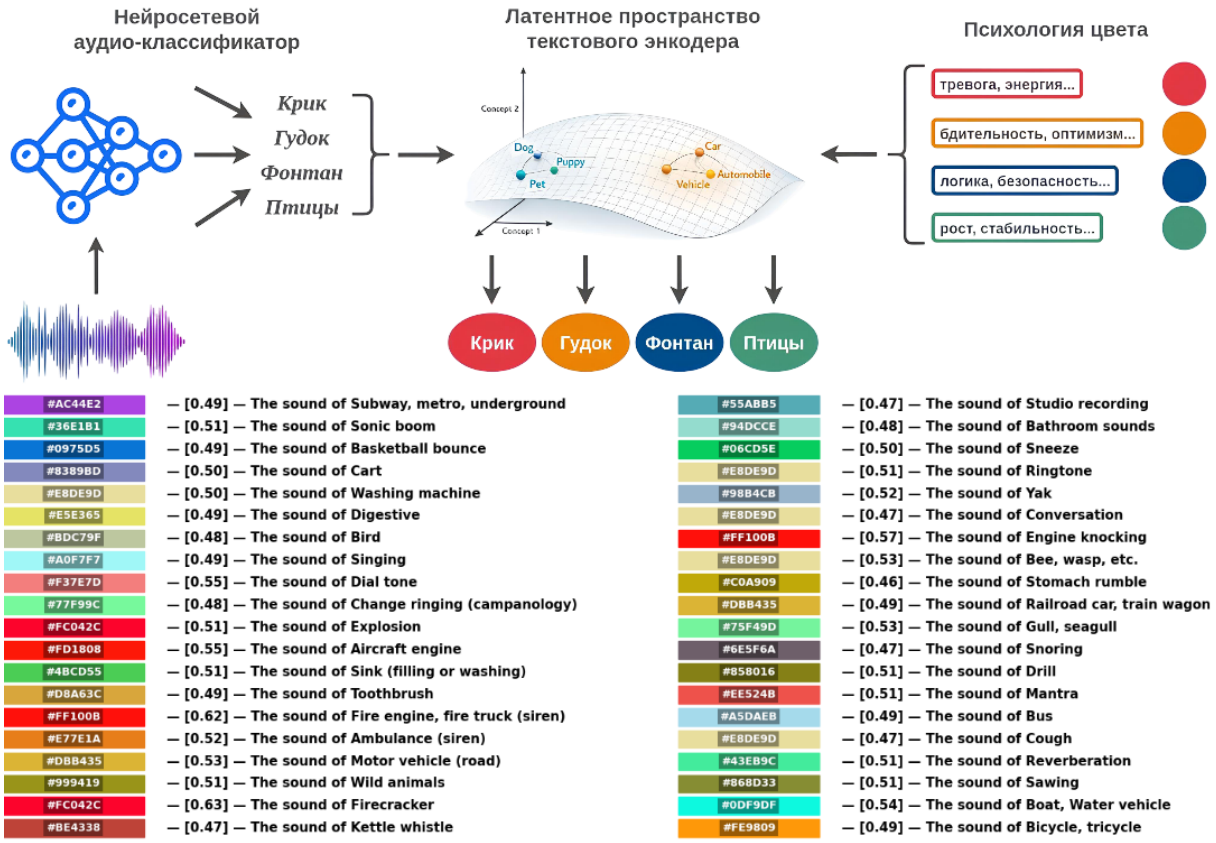


Рис. 1. Семантическое сопоставление категориальных звуков и цветовых оттенков

В качестве текстового энкодера применена модель BGE-M3 [4], демонстрирующая высокие показатели на задачах многоязычного семантического поиска. Для формирования корпуса цветовых описаний задействован набор данных Color-Pedia [5], содержащий структурированные аннотации широкой палитры оттенков. Акустические метки заимствованы из онтологии AudioSet [6]. К каждой звуковой метке добавлен префикс «The sound of…», что повышает селективность энкодера при сопоставлении. Результаты экспериментального сопоставления показали, что формируемые пары «звук – цвет» обладают семантической согласованностью и хроматическим разнообразием. Значения метрики сходства концентрируются в диапазоне 0,5–0,6, что существенно превышает уровень случайного шума и свидетельствует о наличии устойчивой тенденции соответствия. Итоговый словарь пар в формате HEX генерируется однократно и не требует вычислительных затрат на этапе функционирования системы.

В качестве базовой архитектуры было выбрано семейство EfficientAT [7, 8], в котором компактные свёрточные блоки формируются посредством дистилляции знаний из более крупной модели-учителя на основе трансформера. Для адаптации к задаче оперативного анализа коротких фрагментов выполнено дообучение на подмножестве AudioSet-Strong [9], содержащем около 120 тысяч аудио с временными границами событий. Классификационная голова выравнена на 456 классов; в каждом случае процесс дообучения составил 30 эпох.

Были исследованы 12 конфигураций: три архитектуры с четырьмя длинами скользящего окна. Установлено, что оптимальным является окно длительностью 2,5 секунды при перекрытии 1,25 секунды: именно в этом режиме достигаются максимальные значения метрик mAP, ROC-AUC и F1 для всех трёх архитектур, как представлено в таблице 1.

Таблица 1. Сравнительный анализ дообученных моделей семейства EfficientAT

	окно = 1 (с), шаг = 0.5 (с);			**окно = 2 (с), шаг = 1 (с);**			**окно = 2.5 (с), шаг = 1.25 (с);**			**окно = 3 (с), шаг = 1.5 (с);**		
	mAP	ROC	F1	mAP	ROC	F1	mAP	ROC	F1	mAP	ROC	F1
dymn_10	30.6	95.4	44.9	33.1	96	49.8	34.6	96.4	52.9	33.5	96	51.6
mn_10	30.3	95.3	45.1	35.2	96.7	53.7	**36.9**	**96.9**	**56.6**	34.9	96.8	53.6
mn_05	30.6	95	44.4	31.7	95.6	46.8	34	95.9	50.7	31.7	95.7	49

Увеличение окна до 3 секунд приводит к деградации показателей, что можно объяснить потерей внимания импульсной акустической информации и наложением разнородных событий. Среди протестированных вариантов модель «mn10_as» (на базе MobileNetV3-Large [10]) обеспечивает наилучшее соотношение точности и быстродействия. Средняя задержка инференса составляет порядка 45 мс, коэффициент реального времени – 0,0026, размер модели – 18,5 МБ. Квантование признано нецелесообразным вследствие значительного замедления работы при минимальном выигрыше в объёме.

3. Кросс-модальный переход из эмоциональной окраски речи в цвет

Вторым направлением работы является визуализация аффективных характеристик речевого сигнала. Вместо дискретных категориальных меток (гнев, радость, грусть и т. п.) предложено использовать непрерывное 3D пространство Valence–Arousal–Dominance (в реализации [11]), что устраняет субъективность границ между классами и обеспечивает более равномерное представление эмоциональных состояний, как показано на рис. 2.

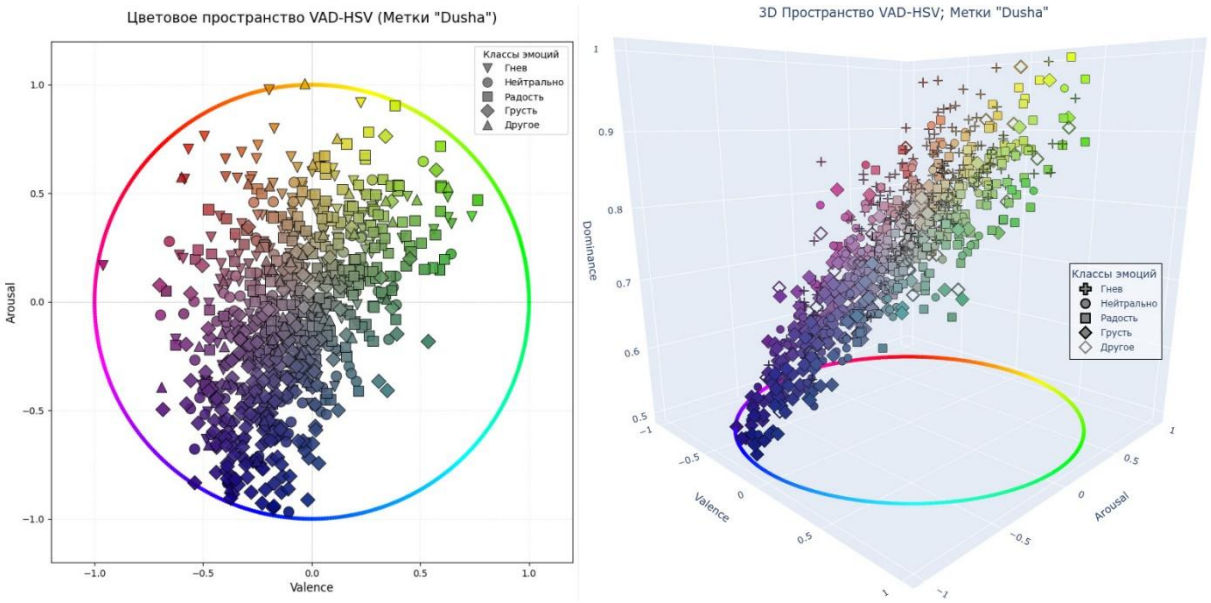


Рис. 2. Семантическое сопоставление эмоциональной окраски речи и цветовых оттенков

Для отображения VAD-координат в цвет использована модель HSV: квадратная область «валентность – возбуждение» (V-A) вписывается в окружность, где валентность и возбуждение определяют декартовы координаты, а доминирование кодируется яркостью. Оттенок (Hue) вычисляется через арктангенс приведённых координат, насыщенность (Saturation) – через их евклидову норму. Введён угловой сдвиг цветового круга на 135° для согласования с общепринятыми ассоциациями (например, отнесение возбуждённых или негативных состояний к красно-оранжевому спектру). Dominance масштабирован в Value с диапазоном 0,5–1,0 с учётом того, что зрительная система имеет повышенную чувствительность к светлым тонам.

Экспериментальная проверка проведена на выборке из 850 записей русскоязычного корпуса Dusha [12]. Визуализация в пространстве VAD показала, что жёсткие категориальные метки неэффективны, так как их распределение существенно перекрывается, в то время как непрерывные координаты дают объективную равномерную оценку эмоциональной окраски.

4. Выводы и перспективы дальнейших исследований

В работе были представлены методы кросс-модального перехода «звук–цвет», при которых для категориальных акустических событий используется промежуточная текстовая модальность, а для эмоциональной окраски речи – непрерывное пространство Valence–Arousal–Dominance.

Для категориальных звуков окружающей среды введение промежуточной текстовой модальности обеспечивает воспроизводимые и семантически обоснованные соответствия без привлечения экспертных оценок, а компактные архитектуры семейства EfficientAT гарантируют функционирование в режиме реального времени.

Для эмоциональной окраски речевого сигнала непрерывное пространство Valence–Arousal–Dominance в сочетании с модифицированной моделью HSV предоставляет математически формализованный инструмент цветовой кодировки аффективных характеристик, лишённый произвольности субъективности категориальных границ.

Среди перспективных направлений дальнейших исследований можно выделить интеграцию разработанных методов в среды дополненной реальности, калибровку нелинейной яркостной шкалы с учётом особенностей зрительного восприятия, расширение словаря акустических классов, а также проведение пользовательских тестов с обратной связью для оценки и дополнительной калибровки предложенного визуального кодирования.

Литература

1. Gibson J.J. The senses considered as perceptual systems. Boston: Houghton Mifflin, 1966. – 335 p.
2. Медведев А.Э., Михелёв В.М. Анализ принципа кросс-модальности в задачах искусственного интеллекта на примере модели CLIP. Цифровые, компьютерные и информационные технологии в науке и образовании. 2. – 2026. – 343 с.
3. Collopy F. Playing (With) Color. Glimpse. 2(3). – 2009. – P. 62-67.
4. Chen J., Xiao S., Zhang P., et al. M3-Embedding: Multi-Linguality, MultiFunctionality, Multi-Granularity Text Embeddings Through Self-Knowledge Distillation. – 2025. – arXiv:2402.03216v5.
5. Boltuix. Color-Pedia: a dataset for color naming tasks, palette generation and emotional analysis. Hugging Face. – 2025. URL: https://huggingface.co/datasets/boltuix/color-pedia (дата обращения: 01.10.2026).
6. Gemmeke J.F., Ellis D.P.W., Freedman D., et al. Audio Set: An ontology and human-labeled dataset for audio events. Proc. IEEE ICASSP. – 2017. – pp. 776-780, doi: 10.1109/ICASSP.2017.7952261.
7. Schmid F., Koutini K., Widmer G. Efficient Large-Scale Audio Tagging Via Transformer-to-CNN Knowledge Distillation. 2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Rhodes Island, Greece, 2023, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICASSP49357.2023.10096110.
8. Schmid F., Koutini K., Widmer G. Dynamic Convolutional Neural Networks as Efficient Pre-trained Audio Models. – 2023. – ArXiv:2310.15648.
9. Hershey S., Ellis D.P.W., Fonseca E., et al. The Benefit of Temporally-Strong Labels in Audio Event Classification. – 2021. – ArXiv:2105.07031.
10. Howard A., Sandler M., Chu G., et al. Searching for MobileNetV3 // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2019. P. 1314–1324. DOI: 10.1109/iccv.2019.00140. URL: https://arxiv.org/abs/1905.02244.
11. Wagner J., Triantafyllopoulos A., Wierstorf H., et al. Dawn of the transformer era in speech emotion recognition: closing the valence gap. IEEE Transactions on Pattern Analysis and

Machine Intelligence. – 2023. – vol. 45, no. 9, pp. 10745-10759, doi: 10.1109/TPAMI.2023.3263585.
12. Kondratenko V., Sokolov A., Karpov N., et al. Large Raw Emotional Dataset with Aggregation Mechanism. – 2022. – ArXiv:2212.12266.

АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТА В ВИБРОУДАРНОМ УПЛОТНЕНИИ ГРУНТА

В.С. Метрикин, И.В. Никифорова, Д.Е. Шапошников

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе изучена динамика виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний. Ключевая особенность модели – учёт переменного коэффициента восстановления скорости, который зависит от накопленной осадки грунта. Такой подход позволяет точнее описывать процесс уплотнения, поскольку в реальности жёсткость контакта и диссипативные свойства среды эволюционируют по мере работы механизма. Выполнено численное моделирование для одно-, двух- и трёхпоршневых систем. Результаты применимы для расчёта и оптимизации виброударных уплотнителей.

Ключевые слова: виброударный механизм, математическое моделирование, нелинейная динамика, периодический режим, переменный коэффициент восстановления, адаптивная система

1. Введение

В настоящее время виброударные машины и механизмы широко применяются в различных отраслях промышленности, горном деле, строительстве (промышленном, гражданском, дорожном) и быту. В строительной практике они используются для погружения и извлечения свай и шпунта, разработки и рыхления мёрзлых грунтов, уплотнения грунтов, дробления материалов и др. [1-6].

В последние годы наряду с ударно-вибрационными механизмами с дебалансным возбудителем колебаний всё большее распространение получают ударно-вибрационные механизмы с кривошипно-шатунным возбудителем, применяемые для уплотнения грунтов. При этом точность прогнозирования их работы остаётся ограниченной из-за использования упрощённых моделей контакта с грунтовой средой. В частности, в большинстве расчётных подходов коэффициент восстановления скорости при ударе принимается постоянным, хотя в реальных условиях он закономерно возрастает по мере уплотнения грунта – вследствие увеличения жёсткости контакта и изменения характера диссипации энергии [7,8].

В настоящей работе предложена модель динамики виброударного механизма, в которой коэффициент восстановления скорости является переменной величиной и зависит от накопленной осадки грунта. Такая зависимость позволяет более адекватно отражать эволюцию механических свойств уплотняемой среды в процессе работы механизма.

Рассмотрены одно-, двух- и трёхпоршневые схемы механизмов, реализующие различные режимы ударного воздействия. Проведён сравнительный анализ переходных режимов для указанных схем. Показано, что учёт переменного коэффициента восстановления скорости существенно влияет на динамику системы: меняются длительность переходного этапа, скорость выхода на установившийся режим и оценка числа ударов до стабилизации.

Полученные результаты могут быть использованы для расчёта и оптимизации параметров виброударных механизмов, а также для повышения точности прогнозирования технологических режимов уплотнения грунтов.

2. Математическая модель

В работе изучается динамика многопоршневого виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний с учетом влияния обрабатываемой среды (грунта). Обрабатываемая среда представлена в виде упруго закрепленной с коэффициентом упругости k массы M_1. Потери энергии в среде учитываются в виде вязкого трения с коэффициентом демпфирования b.

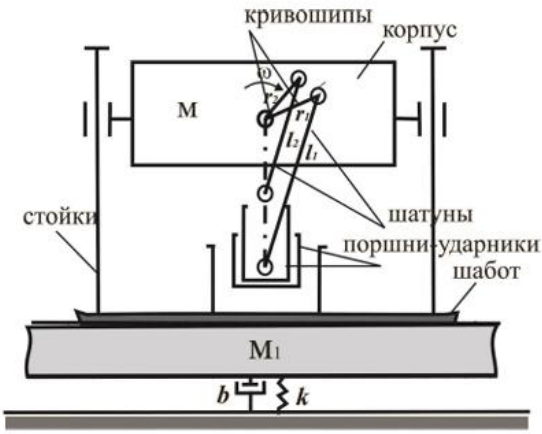


Рис.1. Схема виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний с учетом влияния обрабатываемой среды

Уравнения движения в безразмерных координатах и параметрах имеют вид ($r_i \ll l$)

$$\begin{cases} x - x_1 > f(\tau) - \delta(n) \\ \ddot{x} = -p \\ \ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \lambda^2 x_1 = -p \end{cases} \quad (1)$$

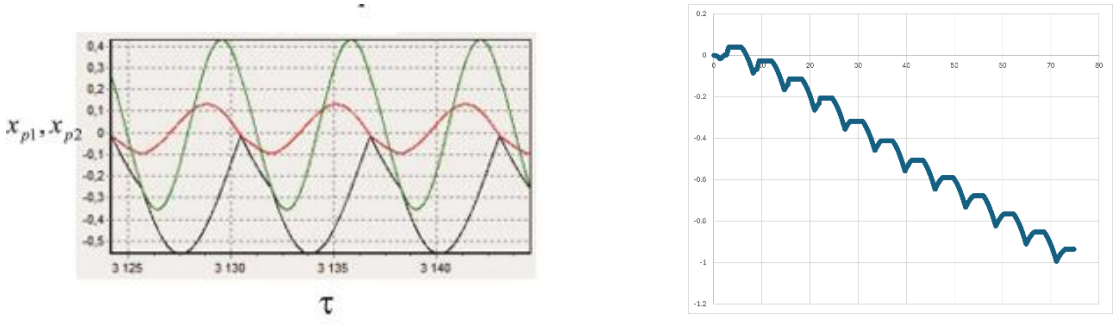
$$\begin{cases} x - x_1 = f(\tau) - \delta(n) \\ R(\delta) = R_{min} + (R_{max} - R_{min})\left(1 - e^{-\beta\delta(n)}\right) \\ \dot{x}^+ = \dfrac{\left((\mu_0 - R)\dot{x}^- + (1+R)\dot{x}_1^- + (1+R)\dfrac{df(\tau)}{d\tau}\right)}{(1+\mu_0)} \\ \dot{x}_1^+ = \dfrac{\left(\mu_0(1+R)\dot{x}^- + (1-R\mu_0)\dot{x}_1^- - \mu_0(1+R)\dfrac{df(\tau)}{d\tau}\right)}{(1+\mu_0)} \\ \Delta\delta = \eta(\dot{x}^- - \dot{x}^+)^2 \\ \delta(n+1) = \delta(n) + \Delta\delta \end{cases} \quad (2)$$

где $\tau = \omega t, x = \frac{(y - s_2 - l)}{l}, x_1 = \frac{y_c}{l}$ – безразмерные время, координата центра масс корпуса и координата среды, $f(\tau) = \max\{f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_N(\tau)\}$, $\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_- = \dot{x}^-$, $\left.\frac{dx_1}{d\tau}\right|_- = \dot{x}_1^-$ – скорости корпуса и среды соответственно непосредственно до удара, $\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_+ = \dot{x}^+$, $\left.\frac{dx_1}{d\tau}\right|_+ = \dot{x}_1^+$ – скорости после удара, $\mu = \frac{r_1}{l}$, $\gamma_i = \frac{r_i}{r_1}, \varepsilon_i = \frac{s_i - s_2}{l}, p = \frac{g}{\omega^2 l}, \lambda^2 = \frac{k}{M_1\omega^2}, 2h = \frac{b}{M_1\omega}, (i = 1 \dots N)$. R_{min} – коэффициент восстановления скорости для рыхлого грунта, R_{max} – предельное значение коэффициента восстановления скорости, β – скорость роста функции, $\delta(n)$ – накопленная осадка грунта к n-му удару, $\Delta\delta$ – вклад в осадку.

Исследования показали, что учёт переменной природы коэффициента восстановления даёт качественно иные результаты по сравнению с моделями, где R считается постоянным. Выявлены следующие закономерности:

- При переменном $R(\delta)$ время выхода системы на стационарный режим (постоянство накопленной осадки δ , достижение предельного значения коэффициента восстановления скорости R_{max}) существенно отличается от прогноза постоянной модели — в ряде случаев переход затягивается.
- В некоторых конфигурациях (например, при определённом соотношении параметров в двухпоршневой или трехпоршневой модели) наблюдается более быстрый выход на установившийся режим по сравнению с классическими вариантами работы механизма, когда коэффициент восстановления принимается постоянным на протяжении всего процесса и отсутствует учёт изменения свойств грунта при уплотнении.

На рис.2 хорошо видны различия в траекториях осадки для постоянной (рис.2а, траектория обозначена красным цветом) и адаптивной (рис.2б) моделей.



а) б)

Рис.2. Осцилограммы движения двухпоршневого виброударного механизма

3. Заключение

Существующие детерминистические модели, базирующиеся на гипотезе постоянства коэффициента восстановления в процессе уплотнения, демонстрируют существенные расхождения с экспериментальными данными вследствие игнорирования эволюции реологических характеристик грунтовой среды. Детерминированный подход к моделированию контактного взаимодействия приводит к систематическим погрешностям в прогнозировании динамики системы, недооценке энергозатрат на достижение требуемой степени уплотнения, некорректной оценке числа циклов воздействия до стабилизации, искажению реальной картины процесса уплотнения. Адаптивный подход к моделированию обеспечивает более адекватное описание динамики системы и формирует основу для разработки интеллектуальных систем управления, реализующих реальную оценку состояния грунтовой среды, оперативную корректировку режимов воздействия, оптимизацию параметров рабочего процесса, максимизацию эффективности уплотнения.

Литература

1. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем: приближенные методы. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. – 410 с.
3. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Виброударные системы. М.: Наука, 1973. – 592 с.
4. Крупенин В.Л. Проблемы математического анализа виброударных систем // Современные наукоемкие технологии, № 9, 2009. – С.94-95.
5. Woo K.-C., Rodger A.A., Neilson R.D., Wiercigroch M., Application of the harmonic balance method to ground moling machines operating in periodic regimes//Chaos, Solitons Fract. 11(15) (2000) 2515.
6. Metrikin, V., Nikiforova, I., Shaposhnikov, D. Dynamics of a Multi-piston Vibro-Impact Mechanism Equipped with a Reactive Mass. // In: Balandin, D., Barkalov, K., Meyerov, I. (eds) Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2025. CCIS 2815. 2026. P. 300-313. DOI: 10.1007/978-3-032-15761-4_21.
7. V.S. Metrikin L.A. Igumnov, I.V. Nikiforova. On the theory of multi-pulse vibro-impact mechanisms// Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Communications in Computer and Information Science. 2022. The Author(s), under exclusive license to Springer Nature Switzerland AG 2022 D.Balandin et al.(Eds): MMST 2022, CCIS 1750, 311 p. 2022. P. 67-81.
8. V.S. Metrikin L.A. Igumnov, I.V. Nikiforova. Mathematical Modeling of Multidimensional Strongly Nonlinear Dynamic Systems// Springer Nature Switzerland AG 2021 D. Balandin et al. (Eds.): MMST 2020, CCIS 1413, 2021. P. 63-76. DOI: 10.1007/978-3-030-78759-2_5.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА ГИДРООЧИСТКИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ЗЕРЕН[1*]

И.В. Митрюхин, О.С. Язовцева

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

В работе исследуется математическая модель нестационарного многостадийного процесса окислительной регенерации в слое катализатора гидроочистки с цилиндрической формой зерен. Модель учитывает три параллельно протекающие гетерогенные реакции окисления сульфидов активных металлов и кокса, массоперенос кислорода и продуктов реакции в порах зерна, а также теплоперенос в газовой и твёрдой фазах с учётом тепловых эффектов экзотермических реакций. Для решения уравнений модели на основе метода конечных объемов построен вычислительный алгоритм с расщеплением по физическим процессам.

Ключевые слова: математическая модель, численные методы, химическая кинетика, цилиндрическое зерно катализатора, окислительная регенерация.

1. Введение

Одним из важнейших химических промышленных процессов является окислительная регенерация, которая заключается в выжиге коксовых отложений и окислении сульфидов активных металлов из катализатора с целью восстановления его каталитической активности [1]. Сложные процессы, происходящие в катализаторах, включают не только химические реакции, но и процессы диффузии и взаимодействия между фазами. Эти факторы могут существенно влиять на эффективность катализаторов. В связи с этим моделирование подобных процессов становится особенно актуальным для исследования существующих технологий и разработки новых.

Общей проблемой процессов регенерации является правильный подбор условий для полного выжига отложений без разрушения катализатора. Математическое моделирование позволяет исследовать динамику концентраций компонентов как первый шаг к построению полной нестационарной модели [2].

2. Математическая модель процесса

Объектом исследования является процесс окислительной регенерации катализатора гидроочистки в неподвижном слое. Катализатор представляет собой гранулы цилиндрической формы. Через слой продувается кислородсодержащий газ, кислород диффундирует в поры зерен и вступает в реакцию с коксовыми отложениями и сульфидами активных металлов. Химические превращения описываются тремя параллельно протекающими гетерогенными реакциями [3].

3. Вычислительный алгоритм

Вычислительный алгоритм построен на основе принципа расщепления по физическим процессам с отщеплением источникового члена. При решении используется неявный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности. Пространственная дискретизация выполнена методом конечных объёмов на равномерной сетке.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00242).

4. Результаты вычислительных экспериментов

Химические превращения описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающей гетерогенные стадии окисления сульфидов металлов и кокса. Константы скоростей реакций определяются из уравнения Аррениуса. В цилиндрической геометрии модель явно учитывает радиальное и осевое распределение концентраций реагентов и температур. На оси симметрии задаются условия симметрии, на границе зерна – условия массообмена с окружающей газовой средой.

5. Практическая значимость и области применения

Построенный вычислительный алгоритм ориентирован на решение задач нефтепереработки и нефтехимии, связанных с регенерацией катализаторов. Численное прогнозирование теплофизических и химических процессов в трубчатых реакторах позволяет обойтись без дорогостоящих натурных экспериментов. Детальное исследование выгорания коксовых отложений и сульфидов активных металлов открывает возможности для управления процессами регенерации и оптимизации технологических режимов.

Литература

1. Масагутов Р.М. Регенерация катализаторов в нефтепереработке нефтехимии / Р.М. Масагутов, Б.Ф. Морозов, Б.И. Кутепов. – Москва : Химия, 1987. – 144 с.
2. Язовцева О.С. Математическое моделирование физико-химического процесса в слое катализатора / О.С. Язовцева. – DOI 10.7868/S3034504925060081. – Текст : непосредственный // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2025. – Т. 526, № 1. – С. 46–53.
3. Kinetic Model for Oxidative Regeneration of Spent Hydroprocessing Catalysts Based on Multiply Forms of Surface Coke and Sulfur / O.B. Abdulla, S.V. Zaghigalov, A.V. Elyshev, A.N. Zagoruiko. – DOI 10.1016/j.ces.2025.121534 // Chemical Engineering Science. – 2025. – V. 310. – Art. 121534. – P. 1–11.

СМЕШАННАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЦЕНТРОМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[1*]

К.Е. Морозов, К.В. Чижов, А.М. Митягин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе исследуются бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики, как явления пересечения аттрактора с репеллером, в системе $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + p_1 xy + p_2 sinvt$ которую можно рассматривать как периодическое во времени неконсервативное возмущение классической системы Дуффинга с нелинейным центром в начале координат $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3$. Для $p_2 \neq 0$ смешанная динамика, как явление пересечения аттрактора с репеллером, имеет место в соответствующем отображении Пуанкаре T за период $\frac{2\pi}{\nu}$. При малых возмущениях динамика T численно выглядит консервативной: наблюдаются замкнутые инвариантные кривые, окружающие начало координат, а также резонансные гирлянды эллиптических и седлообразных периодических орбит. По мере увеличения p_2 происходят бифуркации потери симметрии для R-симметричных периодических орбит разных порядков, для каждой из которых эллиптическая орбита превращается в консервативное седло и приводит к появлению R-симметричной пары «сток-источник». Затем некоторые из этих пар подвергаются каскадам удвоения периода, которые в конечном итоге приводят к образованию аттракторов и репеллеров типа Эно, которые затем сталкиваются в результате гетероклинических бифуркаций и наблюдается хаотический режим, соответствующий смешанной динамике.

Ключевые слова: уравнение Дуффинга, смешанная динамика, аттрактор, репеллер

1. Резонансы в уравнении Дуффинга

В статье рассматриваются бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в системе $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + p_1 xy + p_2 sinvt$, которую можно рассматривать как периодическое во времени неконсервативное возмущение классической системы Дуффинга с нелинейным центром в начале координат:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 \quad (1)$$

Возмущение выбирается таким образом, чтобы система (1) была обратимой, то есть инвариантной относительно инволюции $R_x: (x, y) \mapsto (-x, y)$, и обращения времени $t \mapsto -t$.

В автономном случае ($p_2 = 0$) при $0 < |p_1| < 2\sqrt{2}$, система (1) является неконсервативной (дивергенция $\sigma = p_1 x \not\equiv 0$), однако в любой области фазового пространства она топологически эквивалентна невозмущенной системе. В дальнейшем фиксируются значения $p_1 = 1 < 2\sqrt{2}, \nu = 3$, а p_2 изменяется в $[0,6]$.

Для $p_2 \neq 0$ смешанная динамика, как явление пересечения аттрактора и репеллера [1], возникает в соответствующем отображении Пуанкаре T за период $\frac{2\pi}{\nu}$. Отметим, что отображение T является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом, обратимым относительно той же инволюции R_x. При малых значениях параметра p_2 в численных экспериментах динамика T неотличима от консервативной: наблюдаются замкнутые инвариантные кривые, окружающие начало координат, а также четко видимые резонансные гирлянды эллиптических островов. Анализ резонансных зон показывает, что в первом порядке только главный резонанс является расщепляемым. Однако, поскольку в данном случае среднее значение дивергенции $\sigma = p_1 x$ по замкнутым фазовым кривым зануляется, возникают резонансы более высоких порядков, связанные с наложением гармоник. Общее число расщепляемых резонансов стремится к бесконечности при $p_2 \to 0$, однако ширина соответствующих резонансных зон резко убывает с ростом порядка ре-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-11-00339.

зонанса. В резонансных зонах обнаружены гомоклинические касания инвариантных многообразий симметричных седловых орбит, развёртки которых, как известно (см., например, [1]), приводят к появлению бесконечно большого числа стоков и источников, замыкания множеств которых имеют непустое пересечение. Таким образом, смешанная динамика в системе (1) образуется уже при малых значениях p_2, однако она проявляется лишь на сверхмалых масштабах, которые неразличимы для используемых нами численных методов.

2. Смешанная динамика

Совершенно другая ситуация наблюдается при увеличении p_2, когда смешанная динамика становится доминирующей, см. рис. 1. На рис. 1 показан фазовый портрет отображения Пуанкаре для $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, где аттрактор и репеллер показаны красным и синим цветами, соответственно. Они занимают почти одну и ту же область фазового пространства, но при этом сильно различаются и их различия остаются отчетливо заметными даже при увеличении числа итераций. Это связано с тем, что прямые и обратные итерации отображения порождают взаимно сингулярные инвариантные меры на хаотическом множестве.

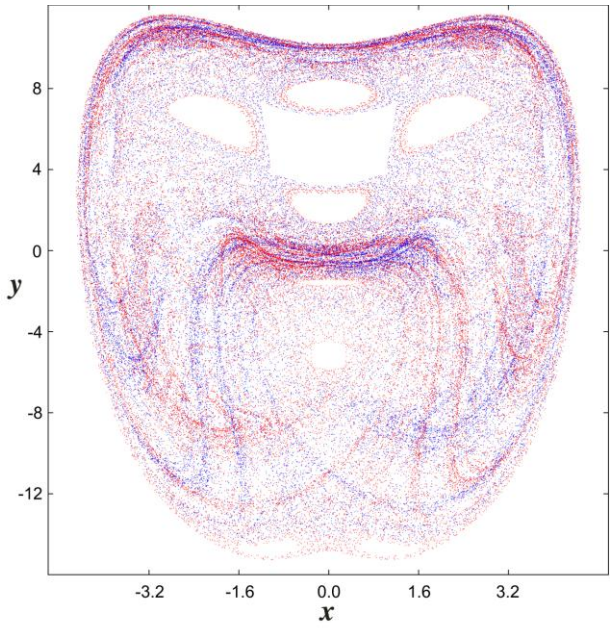


Рис. 1. Смешанная динамика в отображении Пуанкаре T для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = x\dot{x} + p_2 sin3t$ при $p_2 = 6$. Здесь аттрактор изображён красным цветом, репеллер – синим.

В докладе описывается бифуркационный сценарий, который приводит к постепенному проявлению смешанной динамики, наблюдаемой в численных экспериментах, на фоне консервативной динамики. Ключевую роль здесь играют бифуркации потери симметрии для R_x-симметричных периодических орбит [2], которые отслеживаются для периодов вплоть до 6. Для орбит всех изученных периодов, за исключением фиксированных точек, имеет место обратимая pitchfork-бифуркация, при которой симметричная эллиптическая орбита превращается в консервативное седло, порождая R_x-симметричную пару «сток-источник» с одинаковым периодом. Для орбит периодов выше 2 затем происходят гетероклинические пересечения многообразий резонансного седла и седла, возникшего в результате обратимой pitchfork-бифуркации, см. рис. 2, в результате чего фазовые траектории, находящиеся снаружи резонансной зоны, начинают стремиться к стоку в прямом времени и к источнику в обратном. Далее эти пары подвергаются каскаду бифуркаций удвоения периода, что в конечном итоге приводит к появлению аттракторов и репеллеров типа Эно. Затем эти аттракторы и репеллеры вовлекаются в общую хаотическую структуру через гетероклинические бифуркации. Как только все периодические орбиты низких периодов становятся седловыми, наблюдается хаотический режим, соответствующий смешанной динамике, см. рис. 1.

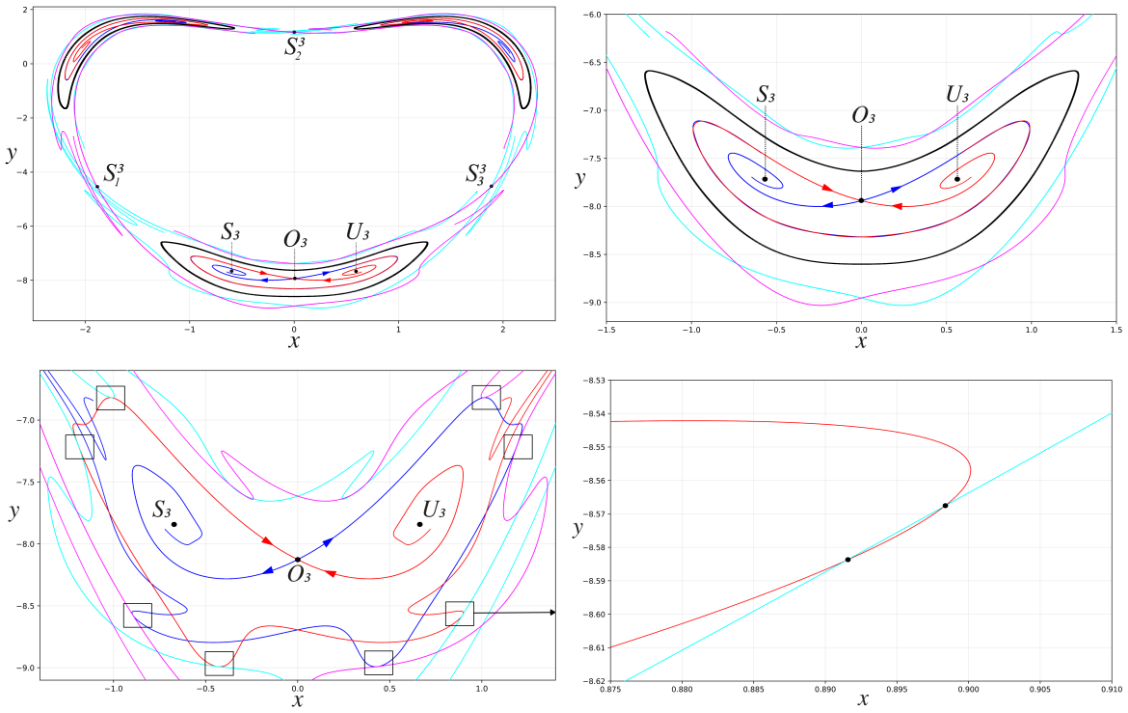


Рис. 2. Инвариантные многообразия резонансного седла и седла, возникшего в результате бифуркации потери симметрии: (а), (б) – до пересечения при $p_2 = 2.36$ и (в), (г) – после пересечения, $p_2 = 2.38$.

Литература

1. Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 2017. – Т. 297. – С. 116–137.
2. Лерман Л.М., Тураев Д.В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 323–343.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДОЗВУКОВЫХ РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ[1*]

М.С. Мустайкин, А.В. Панов

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

В докладе разработан и верифицирован параллельный вычислительный алгоритм для моделирования дозвуковых реагирующих потоков в трубах круглого сечения. Математическая модель представляет собой трёхмерную систему уравнений Навье-Стокса, модифицированную с учётом дозвукового течения, записанную в цилиндрической системе координат и дополненную уравнениями химической кинетики. В основе алгоритма лежит метод расщепления по физическим процессам. Распараллеливание реализовано средствами MPI с геометрической декомпозицией расчётной области. Тестирование алгоритма проведено на задаче Кармана об увлечении жидкости вращающимся диском и задаче об осесимметричной конверсии метана. Проведён анализ эффективности и масштабируемости алгоритма.

Ключевые слова: математическое моделирование, параллельный технологии, метод расщепления по физическим процессам, уравнения Навье-Стокса.

1. Актуальность

Актуальность задач моделирования химически реагирующих течений обусловлена потребностью науки и промышленности в расчетах газовых потоков в реакторах круглого сечения.

Решения трехмерных задач в данной области сопряжено с существенными вычислительными затратами и, более того, сложные физико-химические процессы приводят к разномасштабности в описании математической модели. Это приводит к потребностям в различных специализированных подходах для разработки вычислительных алгоритмов и использование параллельных технологий в данном классе задач.

2. Математическая модель

Математическая модель представляет собой систему уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат, модифицированной на дозвуковой характер течения, дополненной уравнениями химической кинетики [1]. В рамках всей модели используется модель средних по смеси коэффициентов, в связи с этим тепловые и вязкие коэффициенты рассчитываются как средневзвешенное коэффициентов всех компонент. Течение является сжимаемым, поскольку процесс характеризуется существенными локальными изменениями концентраций и термодинамических характеристик, что является следствием активной генерации радикалов.

3. Вычислительный алгоритм

Вычислительный алгоритм построен с применением метода расщепления по физическим процессам [2]. На первом этапе происходит решение уравнений химической кинетики с помощью подключаемого модуля RADAU5 [3]. На втором этапе решается система газодинамических уравнений без учёта динамической составляющей давления, в которой конвективные потоки аппроксимируются с помощью дискретных потоков Русанова, а диссипативные члены рассчитываются с помощью схемы с центральными разностями. На третьем шаге решается эллиптическое уравнение на динамическую поправку и корректируется вектор скорости.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 26-11-00095).

4. Распараллеливание алгоритма

Для распараллеливания вычислительного алгоритма используется технология MPI и метод декомпозиции области по осевой координате. Вся вычислительная область делится на подобласти и каждому вычислительному узлу отводится своё вычислительное пространство. На каждом шаге по времени происходит обмен граничными условиями между соседними подобластями, для этого используется слой фиктивных ячеек.

Для исследования масштабируемости алгоритма вычислительные эксперименты проводились на сетках различной размерности для расчета дозвуковых потоков для задачи без учета химических реакций с целью равномерной нагрузки на процессы.

Вычислительные эксперименты иллюстрируют повышение эффективности при измельчении расчетной сетки, что свидетельствует о масштабируемости алгоритма. Его эффективность выше 90 % даже при использовании достаточно большого количества процессов. Сравнение расчетов с химическими реакциями и без них выявило значительное увеличение расчетного времени задачи в случае наличия реакций и падение эффективности алгоритма при включении расчета химических реакций. Это связано с неравномерностью их течения по длине реактора.

5. Тестирование вычислительного алгоритма

Тестирование алгоритма проведено на основе аналитических решений задач об увлечении жидкости вращающимся диском и на основе ранее решенной задачи о конверсии этан-метановых смесей. Сравнение результатов моделирования данных задач показало хорошее согласование с эталонными решениями, что подтверждает корректность реализованных численных схем для рассмотренного класса задач.

Литература

1. Пескова Е.Е., Язовцева О.С., Мустайкин М.С. Численный алгоритм для исследования дозвукового потока с химическими реакциями под воздействием лазерного излучения // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 243-254.
2. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
3. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
4. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 2. С. 267-279.
5. Мустайкин М.С., Пескова Е.Е. Параллельный алгоритм для численного исследования дозвуковых реагирующих течений в цилиндрической системе координат // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2025): Труды XIX всероссийской научной конференции с международным участием. 2025. С. 211-217.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОГО РОТОРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ ВЫХОДУ[1*]

А.В. Мухин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача стабилизации движения вертикального гибкого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках. Применяется линейно-квадратичное управление в форме статической обратной связи по измеряемому выходу. Измеряемыми переменными являются поперечные смещения ротора в трех опорных плоскостях. Для постановки задачи управления применяется метод квадратичных функций Ляпунова. Решение задачи выполняется с помощью техники линейных матричных неравенств. Приведено моделирование динамики гибкого ротора с заданными параметрами.

Ключевые слова: гибкий ротор, электромагнитные подшипники, метод Фурье, условия Галеркина, линейно-квадратичное управление, статическая обратная связь.

1. Введение

Система управления электромагнитных подшипников позволяет бесконтактно изменять положение ротора относительно неподвижной части [1, 2]. Задача управления усложняется тем, что на определенных частотах вращения ротор движется не только как жёсткое тело, но и совершает изгибные колебания [1]. Амплитуды колебаний вблизи таких частот могут достигать предельных значений. Существуют разные способы гашения амплитуды вибраций (обзор некоторых результатов приведен в [3]). Несмотря на наличие решений, в общем случае, задача остаётся открытой.

В статье исследуется возможность линейно-квадратичного управления гибким ротором в электромагнитных подшипниках статической обратной связью по измеряемому выходу. Предполагается, что измерению доступны смещения ротора в трех опорных плоскостях, расположенных в центре и на концах ротора. Для построения конечномерной модели системы в пространстве состояний применятся метод Фурье совместно с проекционными условиями Галеркина. Для решения задачи управления задействуется техника линейных матричных неравенств [4, 5].

2. Математическая модель ротора

Изотропный вертикальный ротор радиуса R и длиной $L \gg R$ вращается с угловой скоростью ω. Направим оси неподвижной системы координат следующим образом: X – перпендикулярно плоскости рисунка, Y – горизонтально вправо, Z – вертикально вдоль оси ротора. Ось вращения совпадает с осью Z. Смещения центральных точек сечений ротора вдоль осей X, Y обозначим x, y соответственно. Свободные изгибные поперечные колебания ротора с учетом инерции поворотов сечений, гироскопического действия и внутреннего трения, описываются системой уравнений [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{EJ_0}{m_0}\left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}+\omega\chi\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}\right)+\chi\frac{EJ_0}{m_0}\frac{\partial^5 x}{\partial z^4\partial t}-\frac{R^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{EJ_0}{m_0}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-\omega\chi\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}\right)+\chi\frac{EJ_0}{m_0}\frac{\partial^5 y}{\partial z^4\partial t}-\frac{R^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2026-1346**)**.

В (1) использованы следующие обозначения: EJ_0 – жесткость сечения ротора при изгибе; m_0 – погонная масса ротора; χ – коэффициент внутреннего трения.

Добавим внешние магнитные силы, действующие на концы ротора со стороны радиальных подшипников. Каждый подшипник образован двумя парами электромагнитов, расположенных симметрично относительно центра ротора вдоль осей X и Y соответственно. Схема (вид сверху) представлена на рис. 1. Вертикальные координаты расположения нижнего и нижнего подшипников будем считать равными $z_1 = 0$ и $z_2 = L$ соответственно.

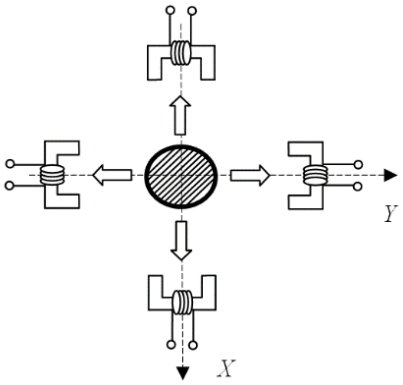


Рис. 1. Схема расположения электромагнитов (вид сверху)

С учетом распределенных нагрузок $q_x(z,t)$ и $q_y(z,t)$ уравнения (1) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{EJ_0}{m_0}\left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}+\omega\chi\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}\right)+\chi\frac{EJ_0}{m_0}\frac{\partial^5 x}{\partial z^4\partial t}-\frac{R^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{q_x(z,t)}{m_0}.\\ \frac{EJ_0}{m_0}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-\omega\chi\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}\right)+\chi\frac{EJ_0}{m_0}\frac{\partial^5 y}{\partial z^4\partial t}-\frac{R^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{q_y(z,t)}{m_0}.\end{gathered} \tag{2}$$

Перейдем от модели (2) с распределёнными параметрами к линейной конечномерной модели. Представим для этого движение ротора в виде разложения по собственным формам колебаний

$$\begin{gathered}x(z,t)=\sum_{i=1}^{n} s_i(z)\,X_i(t),\\ y(z,t)=\sum_{i=1}^{n} s_i(z)\,Y_i(t),.\end{gathered} \tag{3}$$

где $s_i(z)$ – собственные функции, описывающие собственные формы колебаний.

Для определения неизвестных $X_i(t)$ и $Y_i(t)$ применим проекционные условия Галеркина для модели (2) с безразмерными переменными:

$$\begin{gathered}\int_0^1\left\{\frac{\partial^2\hat{x}}{\partial\hat{t}^2}-\frac{\hat{R}^2}{4\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{x}}{\partial\hat{z}^2\partial\hat{t}^2}+\frac{\hat{\chi}}{\hat{L}^2}\frac{\partial^5\hat{x}}{\partial\hat{z}^4\partial\hat{t}}-\hat{\omega}\frac{\hat{R}^2}{2\hat{L}^2}\frac{\partial^3\hat{y}}{\partial\hat{z}^2\partial\hat{t}}+\frac{1}{\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{x}}{\partial\hat{z}^4}+\frac{\hat{\omega}\hat{\chi}}{\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{y}}{\partial\hat{z}^4}-\frac{\hat{q}_x(\hat{z},\hat{t})}{\hat{L}}\right\}\hat{s}_i(\hat{z})d\hat{z}=0,\\ \int_0^1\left\{\frac{\partial^2\hat{y}}{\partial\hat{t}^2}-\frac{\hat{R}^2}{4\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{y}}{\partial\hat{z}^2\partial\hat{t}^2}+\frac{\hat{\chi}}{\hat{L}^2}\frac{\partial^5\hat{y}}{\partial\hat{z}^4\partial\hat{t}}+\hat{\omega}\frac{\hat{R}^2}{2\hat{L}^2}\frac{\partial^3\hat{x}}{\partial\hat{z}^2\partial\hat{t}}+\frac{1}{\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{y}}{\partial\hat{z}^4}-\frac{\hat{\omega}\hat{\chi}}{\hat{L}^2}\frac{\partial^4\hat{x}}{\partial\hat{z}^4}-\frac{\hat{q}_y(\hat{z},\hat{t})}{\hat{L}}\right\}\hat{s}_i(\hat{z})d\hat{z}=0,\end{gathered} \tag{4}$$

где $i=1,\dots,n$.

В дальнейшем верхние значки в (4) опускаем. Выполнив подстановку (3) в (4), получим требуемую математическую конечномерную модель системы:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=x_0, \tag{5}$$

где $x=x(t)\in\mathbb{R}^{4n}$ и $u=u(t)\in\mathbb{R}^m$ – векторы состояния и управления соответственно.

Размерность вектора управления равна $m=4$. Матрица линеаризованной системы A имеет порядок $4n$, где n – число форм, участвующих в движении. Особенность задачи управления гибким ротором состоит в невозможности измерения всех переменных вектора x. В связи с этим введем уравнение измеряемого выхода $y\in\mathbb{R}^p$, предполагая, что измерению доступны смещения ротора в трех поперечных плоскостях с вертикальными координатами $z\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$:

$$y=Cx. \tag{6}$$

Смещения $x(z,t)$ и $y(z,t)$ модели (2) связаны с вектором x системы (5) соотношениями

$$\begin{gathered}x(z,t)=\sum_{i=1}^{n} s_i(z)\,x_i(t),\\ y(z,t)=\sum_{i=1}^{n} s_i(z)\,x_{i+n}(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Элементами матрицы C являются значения собственных функций $s_i(z)$, где $z \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Собственные функции определяются для случая упругого закрепления концов ротора.

3. Постановка задачи управления

Применим для стабилизации (5) закон управления статической обратной связью по измеряемому выходу $u = Ky$. Для задания критерия качества введём уравнение целевого выхода $z(t) \in \mathbb{R}^{p+m}$:

$$z = C_z x + D_z u,$$

где C_z и D_z – заданные весовые матрицы.

Запишем уравнение замкнутой системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = (A + BKC)x,\ x(0) = x_0, \\ z = (C_z + D_z KC)x. \end{gathered} \tag{8}$$

Цель управления состоит в поиске регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость (8) и выполнение неравенства

$$\int_0^\infty |z|^2\, dt < \gamma^2 |x_0|^2$$

для заданного параметра γ^2 и начального состояния $x_0 \neq 0$. С помощью метода квадратичных функций Ляпунова задача управления сводится к решению матричных неравенств [4]

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} AY + YA^T + BKCY + YC^T K^T B^T + 2\alpha Y & YC_z^T + YC^T K^T D_z^T \\ * & -I_{p+m} \end{pmatrix} \prec 0, \\ \begin{pmatrix} Y & x_0 \\ x_0^T & \gamma^2 |x_0|^2 \end{pmatrix} \succ 0 \end{gathered} \tag{9}$$

относительно матрицы функции Ляпунова $Y \succ 0$ и стабилизирующей матрицы регулятора K. Параметр $\alpha \geq 0$ задает величину степени устойчивости системы.

4. Алгоритм решения

Для решения (9) применим алгоритм, полученный на основе алгоритма одновременного поиска матрицы функции Ляпунова и стабилизирующей матрицы [5]:

Устанавливаем $j = 0$ и задаем $0 \leq \rho \leq 1$. Задаем начальные значения $X_j \succ 0$, $Y_j \succ 0$, $\varepsilon_j > 0$ и переходим к шагу 1.

1. Решаем задачу минимизации линейной функции на множестве, заданном линейными матричными неравенствами

$$\begin{gathered} \min_{X,Y \succ 0} \varepsilon: \\ \begin{pmatrix} -\varepsilon I & Y_j X + YX_j - \rho Y_j X_j - I \\ * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \\ \begin{pmatrix} AY + YA^T + BKCY_j + Y_j C^T K^T B^T + 2\alpha Y & YC_z^T + Y_j C^T K^T D_z^T \\ * & -I \end{pmatrix} \prec 0, \\ \mathcal{N}_C^T (XA + A^T X) \mathcal{N}_C \prec 0, \\ \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix} \prec 0, \\ \begin{pmatrix} Y & x_0 \\ x_0^T & \gamma^2 |x_0|^2 \end{pmatrix} \succ 0, \end{gathered}$$

относительно $X \succ 0$, $Y \succ 0$, и ε. Присваиваем $X_{j+1} \leftarrow X$, $Y_{j+1} \leftarrow Y$, $\varepsilon_{j+1} \leftarrow \varepsilon$ и переходим к следующему шагу.

2. Если $|\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| < \epsilon$ или $\varepsilon_{j+1} < (1 - \rho) + \epsilon$, где $\epsilon > 0$ – заданное малое число, то вычисления прекращаются. В противном случае переходим к шагу 1 с $j \leftarrow j + 1$.

5. Моделирование динамики ротора

Параметры используемого для моделирования ротора [7]: $L = 1$ м, $R = 10$ мм, $m = 16$ кг. Зазор между ротором и подшипниками $\delta = 0.5$ мм. Частота вращения 100 Гц. При разгоне и торможении ротору необходимо пройти три резонансные частоты: ~7 Гц, ~26 Гц и ~61 Гц. Исходя из этого, ограничимся $n = 3$. Графики амплитуд колебаний ротора в трех опорных плоскостях с законом управления, найденным для $x_0 = (0.05_6 \quad 0_6)^T$ и $\gamma = 1$, приведены на рис. 2 (безразмерное смещение 0.05 соответствует 25 мкм). На поиск решения потребовалось 17 итераций.

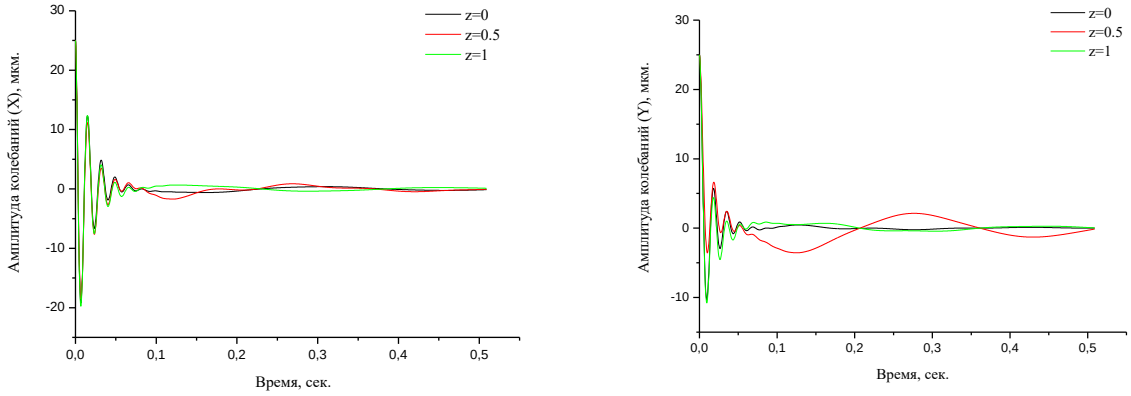


Рис. 2. Амплитуды колебаний поперечных плоскостей ротора
с вертикальными координатами $z \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ по осям X (слева) и Y (справа)

Максимальное значение управляющей магнитной силы подшипников не превышает 17 Н. Степень устойчивости системы $\max\limits_{1 \le i \le 4n} \left\{real\left(\lambda_i(A + BKC)\right)\right\} = -0.7988$.

6. Заключение

Решена задача стабилизации гибкого ротора в электромагнитных подшипниках законом линейно-квадратичного управления статической обратной связью по измеряемому выходу. Максимальная амплитуда поперечных колебаний на порядок меньше полувеличины зазора. Величины управляющих воздействия не превосходят предельно допустимых значений.

Задачами для дальнейших исследований являются решение задачи управления при меньшей размерности вектора выхода с учетом внешних возмущений, порождаемых как неточностями измерений, так и неучтенными формами колебаний более высокого порядка.

Литература

1. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники. Теория, расчет, применение. СПб.: Политехника, 2003. 2001 с.
2. Maslen E.H., Schweitzer G. Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery. London: Springer, 2009.
3. Siva Srinivas R., Tiwari R., Kannababu Ch. Application of active magnetic bearings in flexible rotordynamic systems – A state-of-the-art review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Vol. 106. P. 537–572.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Линейно-квадратичные и γ-оптимальные законы управления по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. №6. С. 5–14.
5. Мухин А.В. Алгоритм совместного поиска матриц функции Ляпунова и обратной связи в задачах квадратичной стабилизации линейных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2026. №3. С. 115–125.

6. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Ленанд, 2023. 248 с.
7. Николаев М.Я., Кирюшин А.А., Овчинников О.Ф. и др. Балансировка гибкого вертикального ротора на электромагнитном подвесе // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4(1). С. 134–139.

ДОМЕННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В СОСТЯЗАТЕЛЬНЫХ АТАКАХ УКЛОНЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ПРОТОКОЛОМ TCP

А.Г. Никольская[1,2], Д.А. Рыболовлев[1,2]

[1]Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН,
[2]Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

В работе представлен анализ доменных ограничений, которые обусловлены протоколом TCP в контексте состязательных атак против моделей машинного обучения в области анализа сетевого трафика. Определены основные типы таких ограничений применительно к задаче обнаружения сетевых вторжений. Задание универсального списка доменных ограничений является нетривиальной задачей из-за вариативности сетевой среды и реализаций протокола TCP.

Ключевые слова: анализ сетевого трафика, TCP, состязательная атака, система обнаружения вторжений, машинное обучение, доменные ограничения.

1. Введение

Протокол TCP (Transmission Control Protocol или протокол управления передачей) – один из основных сетевых протоколов, на которых построен современный интернет. Базовая спецификация протокола TCP изложена в документе RFC 9293 [1] и дополняется рядом других документов, определяющих отдельные расширения и механизмы TCP. Наличие спецификации для протокола предполагает, что сетевой трафик, в том числе полученный в результате состязательной атаки уклонения (adversarial evasion attack) против модели машинного обучения в области анализа сетевого трафика, должен соответствовать данной спецификации.

Примером таких моделей машинного обучения являются системы обнаружения вторжений (Intrusion Detection System, IDS), предназначенные для обнаружения компьютерных атак в сетевом трафике. Системы обнаружения вторжений обычно функционируют следующим образом: при помощи специальных инструментов извлекают из сетевого трафика его признаки, после чего для извлечённых признаков получают предсказание классификатора о том, содержится ли в обрабатываемом трафике сетевая атака. Целью злоумышленника при осуществлении состязательной атаки уклонения на такую модель классификации является получение некорректного предсказания модели для трафика, содержащего сетевую атаку. Например, в результате атаки уклонения модель должна классифицировать трафик, который содержит внедрение SQL-кода (SQL Injection), как безвредный трафик.

Основным подходом в современных исследованиях, касающихся оценки устойчивости IDS к атакам уклонения или методов защиты от таких атак, является применение распространённых состязательных атак уклонения, например, I-FGSM [2] или PGD [3]. Однако применение классических атак в данном сценарии может привести к нарушению спецификаций сетевых протоколов, поскольку подобные атаки были предназначены, прежде всего, для работы с изображениями и не учитывают строгую регламентированность структуры сетевого трафика. Анализ сетевого трафика может производиться как на уровне пакетов сетевого трафика, так и сетевых потоков (сессий), и извлекаемые из сетевого трафика признаки чаще всего включают в себя агрегированные характеристики сетевых потоков. Такие признаки не являются независимыми: изменение одного признака может повлечь за собой изменение других признаков. Зависимости между признаками, а также необходимость согласованности признаков на уровне пакетов и потоков, не учитываются в обычных атаках уклонения. Кроме того, традиционные атаки уклонения не гарантируют сохранность логики сетевого протокола, например, корректной последовательности TCP-состояний.

Независимо от того, применяется ли атака уклонения к извлечённым признакам сетевого трафика или напрямую к пакетам и потокам сетевого трафика, итоговые состязательные примеры должны отвечать спецификациям сетевых протоколов. В противном случае может быть

нарушено функционирование исходной компьютерной атаки. Использование таких состязательных примеров в оценке устойчивости модели машинного обучения к состязательным атакам или в методах защиты от таких атак станет нецелесообразным, поскольку перестанет отвечать реалистичному сценарию атаки уклонения.

Состязательные атаки с учётом доменных ограничений или ограничений предметной области (constrained adversarial attacks) учитывают доменные требования, позволяющие сохранить реалистичность состязательных примеров. Однако многие алгоритмы таких атак требуют явного выражения ограничений в виде отдельных условий задачи оптимизации, используемой для генерации состязательных примеров. Это обусловливает актуальность определения ограничений, связанных с протоколом TCP, в контексте состязательных атак против моделей машинного обучения в области анализа сетевого трафика.

Вместе с тем протокол транспортного уровня TCP функционирует не изолированно: совместно с протоколом IP сетевого уровня он образует стек TCP/IP. Кроме того, IDS обрабатывают трафик различных протоколов: так, в одном из популярных наборов данных для задачи выявления сетевых угроз, CICIDS2017 [4], помимо TCP содержится трафик протоколов UDP и ICMP. Таким образом, генерация состязательных примеров, соответствующих реалистичным сценариям угроз, требует более подробного изучения различных протоколов, релевантных конкретной сети и конкретной задаче.

2. Доменные ограничения, обусловленные протоколом TCP

Как было сказано выше, многие из признаков сетевого трафика не являются независимыми. Так, изменение признаков, представляющих собой статистические характеристики трафика, влечёт за собой необходимость корректного изменения тех признаков, на основе которых рассчитывается изменяемый признак. Например, для изменения такой характеристики, как скорость передачи данных, требуется изменить либо продолжительность сетевой сессии, либо количество переданных байтов, либо оба этих признака одновременно. Причём такое изменение характеристик может привести к необходимости модификации множества пакетов, входящих в данное соединение.

Кроме того, необходимо учитывать ограничения самой задачи: какие изменения злоумышленник способен осуществить на практике. Например, изменение полезной нагрузки может нарушить функционирование вредоносного кода, то есть самой компьютерной атаки, которую злоумышленник пытается скрыть при помощи состязательной атаки уклонения.

Перечисленные ограничения связаны с особенностями представления и анализа сетевого трафика и в общем случае справедливы и для других протоколов.

Протокол TCP определяет формат TCP-сегментов и правила их обработки в рамках TCP-соединения. Ограничения, обусловленные конкретно протоколом TCP, можно разделить на три группы, связанные со структурой сегментов TCP, машиной состояний протокола TCP или с механизмами контроля над передачей данных.

Первая группа ограничений возникает вследствие строгой регламентированности структуры сегментов TCP. Каждый сегмент включает в себя заголовок (header), содержащий информацию о сегменте, и полезную нагрузку (payload), содержащую данные. Поля заголовка имеют определённую спецификацией длину, что влияет на величину значений, которые могут принимать эти поля. Так, например, поле порта отправителя (Source Port) занимает 16 бит и потому допускает значения из диапазона от 0 до 65535 (2^{16} - 1).

Вторая группа ограничений связана с тем, что состояния соединения TCP и правила перехода между ними представляют собой конечный автомат. Следовательно, вносимые в трафик или его признаки состязательные возмущения не должны нарушать допустимое поведение TCP-соединения. Например, изменения управляющих флагов, инициирующих переходы между состояниями соединения (SYN, FIN, RST и др.), и связанных с ними полей не могут быть произвольными и независимыми: необходимо учитывать состояние соединения, историю обмена сегментами и другие аспекты.

Третья группа связана с механизмами обеспечения корректности и контроля над передачей данных: контрольными суммами, управлением перегрузкой, повторной передачей и другими. Например, любое изменение полезной нагрузки требует пересчёта контрольной суммы

(checksum), содержащейся в заголовке TCP-сегмента, а изменение длины полезной нагрузки может потребовать корректировки Sequence Number и Acknowledgment Number в последующих сегментах. Другим примером подобных ограничений является значение MSS (Maximum Segment Size), передаваемое в опциях SYN-сегмента. Значение MSS задаёт максимальный размер полезной нагрузки, который готова принять сторона соединения. Значение MSS не может превышать MTU (Maximum Transmission Unit), то есть максимальный размер IP-пакета, который сетевое устройство может передать без фрагментации.

Несмотря на наличие спецификации, протокол TCP допускает различные реализации. Конкретные доменные ограничения для поиска состязательных примеров зависят от различных условий: реализации протокола, используемых операционных систем, оборудования в сети. Поэтому список ограничений должен отвечать конкретным условиям, в которых эксплуатируется атакуемая модель машинного обучения. Вводимых ограничений должно быть достаточно, чтобы обеспечить реалистичность сгенерированного сетевого трафика, не нарушив практическую реализуемость атаки. Большое количество ограничений может негативно влиять на сходимость некоторых алгоритмов состязательных атак с ограничениями [5].

3. Заключение

Состязательные атаки с учётом доменных ограничений предназначены для обеспечения реалистичности состязательных примеров. Для области анализа сетевого трафика такие доменные ограничения обусловлены в том числе особенностями сетевых протоколов, в частности, протокола TCP. Существование различных реализаций протокола TCP и зависимость характеристик сетевого трафика от сетевой среды делают создание универсального списка доменных ограничений нетривиальной задачей.

В целом, для задачи обнаружения сетевых вторжений можно выделить несколько типов доменных ограничений, обусловленных протоколом TCP и связанных со структурой сегментов TCP, машиной состояний протокола TCP или с механизмами контроля над передачей данных.

В качестве одного из направлений дальнейших исследований можно выделить определение видов доменных ограничений для других сетевых протоколов.

Литература

1. RFC 9293 – Transmission Control Protocol (TCP). URL: https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc9293 (дата обращения: 4.10.2026).
2. Kurakin A., Goodfellow I.J., Bengio S. Adversarial examples in abs/1607.02533, the physical world. ArXiv, 2016. https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.02533.
3. Madry A., Makelov A., Schmidt L., Tsipras D., Vla du A. Towards Deep Learning Models Resistant to Adversarial Attacks. ArXiv, abs/1706.06083, 2017. https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.06083.
4. Intrusion Detection Evaluation Dataset (CICIDS2017). Available at: https://www.unb.ca/cic/datasets/ids-2017.html, accessed 4.10.2026.
5. Simonetto T., Dyrmishi S., Ghamizi S., Cordy M., & Traon Y. L. A Unified Framework for Adversarial Attack and Defense in Constrained Feature Space. Proceedings of the Thirty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence, {IJCAI-22}, 2022, pp. 1313-1319. DOI: 10.24963/ijcai.2022/183.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО НАБЛЮДАЕМОМУ ВЕКТОРУ СОСТОЯНИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ ГРУППЕ СИММЕТРИЙ

Е.В. Никульчев

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва

Рассматривается задача восстановления уравнений хаотической системы по наблюдаемому вектору состояния при известной группе симметрий. Показано, что этих двух входов достаточно для структурной идентификации даже для такой чувствительной системы, как система Рабиновича со скрытым аттрактором. Ограничение класса моделей $\mathbb{Z}_2$-эквивариантными полями делает задачу локально корректной в инвариантном струйном пространстве. Коэффициенты восстанавливаются с точностью 0.00–0.03%, старший показатель Ляпунова – с точностью 0.67%. Особенность системы используется как бинарный качественный критерий: идентифицированная модель при свободном интегрировании остаётся на скрытом хаотическом аттракторе.

Ключевые слова: система Рабиновича, скрытый аттрактор, инвариантное струйное пространство, структурная идентификация.

1. Введение

Идентификация нелинейных динамических систем по наблюдаемым данным – одна из центральных задач современной нелинейной динамики. Стандартные методы, такие как SINDy [1] и DMD, опираются на эмпирический выбор базисных функций и метод наименьших квадратов. В общей полиномиальной постановке задача восстановления уравнений по конечной траектории некорректна по Адамару: решение может не существовать, быть неединственным и неустойчивым к шуму. Регуляризация – разреживание, гребневая регрессия, пороговая обработка – ослабляет симптомы, но не устраняет некорректность. Для скрытых аттракторов задача усложняется принципиально: область параметров, в которой аттрактор существует, узка, и малая ошибка в коэффициентах разрушает его качественно, а не количественно.

В настоящей работе рассматривается постановка, в которой наблюдателю доступны два входа: вектор состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$ системы и группа симметрий G, относительно которой система инвариантна. Требуется восстановить уравнения системы по этим двум входам.

В качестве иллюстрации выбрана система Рабиновича [2]. Система Рабиновича рассматривается в хаотическом режиме, со скрытым аттрактором, где малая ошибка в коэффициентах качественно меняет динамику. Пусть дана векторная временная реализация $x(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [0, T]$, известно, что система инвариантна относительно дискретной группы $\mathbb{Z}_2$, действующей как $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$. Требуется восстановить уравнения системы по этим данным.

Классическая теория симметрий Софуса Ли для дифференциальных уравнений решает задачу: дано уравнение → найти его группу симметрий → использовать группу для понижения порядка или построения решений [3]. Настоящая работа решает обратную задачу: дана траектория (частное решение, конечное) и группа симметрий → восстановить уравнение. Особенности постановки: конечная выборка вместо точного уравнения; струйное пространство как носитель потока на данных (продолжение – носитель потока на данных, дающую эквивариантную структуру) [4]; задача становится условно корректной.

Основную роль в решении является использование струйного пространства. На фазовом пространстве M условие инвариантности $[L, F] = 0$ даёт одно алгебраическое ограничение на коэффициенты поля. На J^r то же условие даёт $r + 1$ ограничений, по одному на каждый порядок дифференцирования. Эти ограничения не независимы: они связаны продолжением потока,

и именно изоморфизм алгебр Ли $\mathrm{pr}^{(r)}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{(r)}$ обеспечивает согласованность. Таким образом, роль струйного пространства – сохранение симметрии при переходе к производным.

Заметим, что вложение Такенса обеспечивает лишь топологическую эквивалентность и, как показано в [5, 6] систематически разрушает действие группы симметрий.

Цель работы – восстановление системы дифференциальных уравнений системы Рабиновича в хаотическом режиме на основании конечного входного вектора состояний и знания симметрий.

2. Система Рабиновича и $\mathbb{Z}_2$-симметрия

Система Рабиновича [2, 7] с дискретной $\mathbb{Z}_2$-симметрией имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) - a\,y\,z, \\ \dot{y} = rx - y - x\,z, \\ \dot{z} = -bz + x\,y, \end{cases}$$

где $\sigma = -\mathrm{ar}$. При параметрах $\mathrm{r} = 100$, $\mathrm{a} = -0.009965$, $\mathrm{b} = 0.077454$ система демонстрирует скрытый хаотический аттрактор. Начальное условие $\mathrm{x}_0 = (10{,}0{,}0)$ не принадлежит малой окрестности неустойчивых равновесий. Симметрия $\mathbb{Z}_2$ действует как

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \mapsto (-\mathrm{x}, -\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Физически [2] описывает трёхволновые взаимодействия в плазме; $\mathbb{Z}_2$-симметрия – инвариантность при одновременной смене знака двух волновых амплитуд.

Аттрактор Рабиновича при выбранных параметрах является скрытым: его бассейн притяжения не пересекает малые окрестности неустойчивых равновесий [7]. Это имеет прямые последствия для идентификации. Для самовозбуждающегося аттрактора малая ошибка в коэффициентах обычно смещает траекторию вдоль того же аттрактора и даёт лишь количественное изменение спектра. Для скрытого аттрактора бассейн является нетривиальным подмножеством фазового пространства, а область параметров, где аттрактор существует, узка: малая ошибка в коэффициентах обычно переводит траекторию из того же начального условия на видимый аттрактор – устойчивый предельный цикл или устойчивое равновесие. Переход качественный, а не постепенный.

Система инвариантна относительно действия $\mathbb{Z}_2$: если $\mathrm{x}(\mathrm{t})$ – решение, то $\mathrm{g} \cdot \mathrm{x}(\mathrm{t})$ с $\mathrm{g} \in \mathbb{Z}_2$ – тоже решение. Это означает, что векторное поле F системы $\mathbb{Z}_2$-эквивариантно:

$$\mathrm{F}(\mathrm{g} \cdot \mathrm{x}) = \mathrm{g} \cdot \mathrm{F}(\mathrm{x}).$$

Это структурное свойство поля и есть то, что позволяет сделать задачу идентификации корректной.

Канонический базис и идентификация. Наблюдается вектор $\mathrm{x}(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{z}(\mathrm{t}))$ длины $\mathrm{N} = 2 \times 10^5$ с шагом $\Delta\mathrm{t} = 0.001$ на интервале $\mathrm{t} \in [0{,}200]$. Производные вычисляются центральными разностями:

$$\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{j}(\mathrm{t}_\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{x}_\mathrm{j}(\mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}) - \mathrm{x}_\mathrm{j}(\mathrm{t}_{\mathrm{i}-1})}{2\Delta\mathrm{t}}.$$

Согласно теореме об изоморфизме алгебр Ли [4], при переходе к струйному пространству полная группа $\mathbb{Z}_2$ сохраняется без потерь, поэтому канонический базис, построенный для фазовых переменных, переносится в струйные координаты без изменения структуры.

Для $\mathbb{Z}_2$-симметрии инфинитезимальный генератор отсутствует, поэтому канонический базис строится непосредственно из теории инвариантов. Полный набор $\mathbb{Z}_2$-эквивариантных мономов степени ≤ 3 содержит несколько элементов; после применения STLSQ с порогом $\tau = 0.001$ и условия равновесия $\mathrm{F}(0) = 0$ остаются ровно восемь канонических членов:

$$\Phi_{\mathrm{eq}}^{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{yz}\},$$

$$\Phi_{\mathrm{eq}}^{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{y}) = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{xz}\},$$

$$\Phi_{\mathrm{inv}}^{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{z}) = \{\mathrm{z}, \mathrm{xy}\}.$$

Остальные мономы полного набора обнуляются порогом. Это подтверждает, что канонический базис полон и минимален.

Коэффициенты оценивались методом STLSQ на полном эквивариантном наборе со стандартизацией. Результаты приведены в таблице 1.

Вид восстановленной траектории в координатах (x, y, z) по сравнению с эталонной показан на рис. 1.

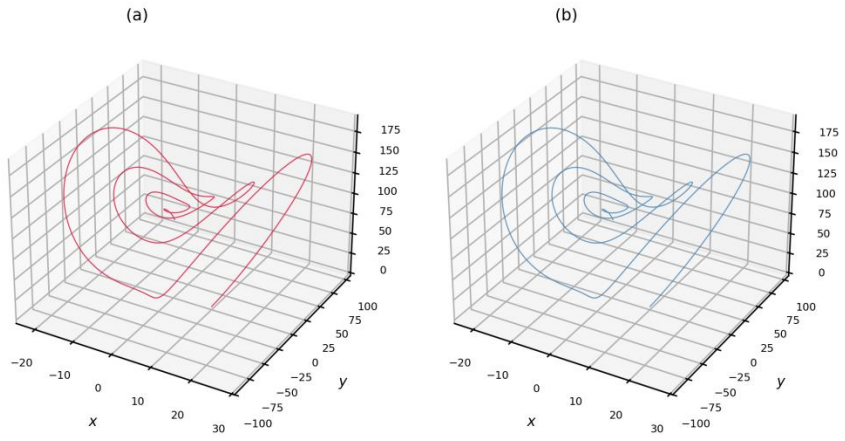


Рис. 1. Траектория системы: a) эталон; b) восстановленная

Таблица 1. Идентифицированные коэффициенты системы Рабиновича в каноническом $\mathbb{Z}_2$-базисе

Уравнение	**Член**	**Теория**	**Идентифицировано (ошибка)**
$\dot{x}$	x	-0.996500	-0.996484 (0.00%)
$\dot{x}$	y	$+0.996500$	$+0.996726$ (0.02%)
$\dot{x}$	yz	$+0.009965$	$+0.009962$ (0.03%)
$\dot{y}$	x	$+100.000$	$+99.992244$ (0.01%)
$\dot{y}$	y	-1.000	-0.999860 (0.01%)
$\dot{y}$	xz	-1.000	-0.999926 (0.01%)
$\dot{z}$	z	-0.077454	-0.077449 (0.01%)
$\dot{z}$	xy	$+1.000$	$+0.999933$ (0.01%)

Коэффициенты восстановлены с точностью 0.00–0.03%. MSE составляет 2.2×10^{-3} для $\dot{x}$, 4.2×10^{-5} для $\dot{y}$ и 2.2×10^{-1} для $\dot{z}$. Все остальные мономы полного $\mathbb{Z}_2$-эквивариантного набора степени ≤ 3 обнуляются порогом, что подтверждает полноту и минимальность канонического базиса.

Спектр Ляпунова восстановленной модели вычислялся методом Бенеттина (Benettin1980?): интегрирование RK4 для состояния и вариационного уравнения, QR-переортогонализация на каждом шаге, $\mathrm{T} = 800$ после переходного процесса $\mathrm{T} = 200$, шаг $\Delta\mathrm{t} = 0.002$.

Полученный спектр:

$$\lambda_1 = +0.361, \quad \lambda_2 = +0.0001, \quad \lambda_3 = -2.435.$$

Эталонные значения:

$$\lambda_1^{\mathrm{ref}} = +0.359, \quad \lambda_2^{\mathrm{ref}} = -0.0003, \quad \lambda_3^{\mathrm{ref}} = -2.433.$$

Отклонение λ_1 составляет 0.67%. Сумма показателей совпадает с теоретической дивергенцией $\mathrm{divF} = -\sigma - 1 - \mathrm{b} = -2.0740$ с точностью 1.6×10^{-4}.

В спектре присутствуют один положительный показатель, один показатель, неотличимый от нуля ($|\lambda_2| \leq 3 \times 10^{-4}$), и один отрицательный. Нулевой показатель соответствует направлению потока. Система хаотична, но не гиперхаотична. Для трёхмерного автономного потока гиперхаотичность невозможна: при $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{divF} < 0$ только один из двух ненулевых показателей может быть положительным.

Идентифицированная модель Рабиновича, коэффициенты которой восстановлены с точностью 0.00–0.03%, при свободном интегрировании из того же начального условия остаётся на скрытом хаотическом аттракторе, а не коллапсирует на видимый предельный цикл. На рис. 2 показано сравнение траектории восстановленной системы с эталонной, что иллюстрирует, что

восстановлена система с требуемыми хаотическими характеристиками, но в точности не повторяет исходную.

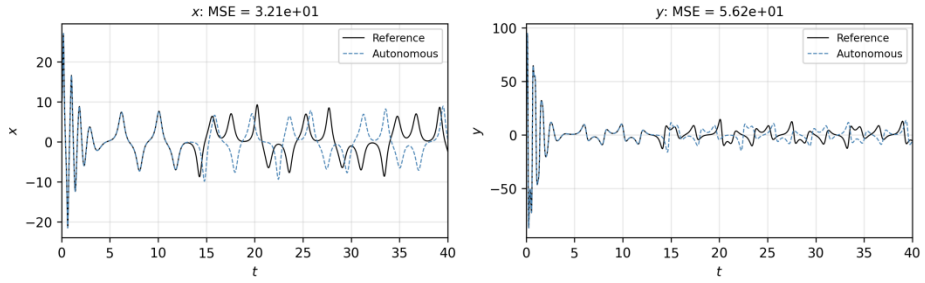


Рис. 2. Сравнение эталонной динамики с восстановленным решением

Для точного повторения исходной траектории, что можно применить метод постоянного возбуждения система. Для эксперимента по отслеживанию использовался дискретный переключающий сигнал $u_{switch}(t) = \pm A, \quad A = 1, \quad T = 25,$ вместе с пропорционально-дифференциальным регулятором

$$u_{PD}(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t), \quad K_p = 50, \quad K_d = 5.$$

При реализации MSE отслеживания составляет 4×10^{-4}–1.4×10^{-3}. Результаты сравнения динамики приведена на рис. 3. На рис. 4. приведены аттракторы системы: слева – эталонный и с управлением (неразличимы), справа – реконструированной системы.

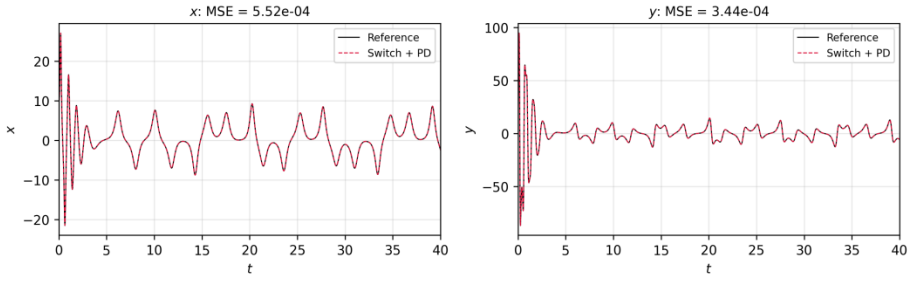


Рис. 3. Сравнение эталонной динамики с восстановленным решением с управлением

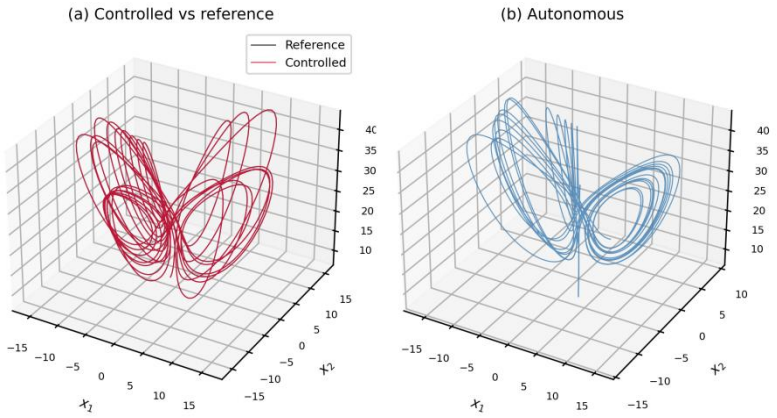


Рис. 4. Странные аттракторы системы:
a) эталонная и с управлением; b) восстановленная в автономном режиме

3. Заключение

Показано, что наблюдаемого вектора состояния и группы симметрий $\mathbb{Z}_2$ достаточно для структурной идентификации системы Рабиновича со скрытым аттрактором. Канонический $\mathbb{Z}_2$-базис в инвариантном струйном пространстве восстанавливает коэффициенты с точностью

0.00–0.03%, воспроизводит спектр Ляпунова с точностью λ_1 0.67% и обеспечивает MSE отслеживания 4×10^{-4}–1.4×10^{-3} при управлении «switch + PD».

Качественным результатом является бинарный тест на скрытом аттракторе. Поскольку аттрактор скрытый, малые ошибки коэффициентов обычно разрушают его и переводят траекторию на видимый предельный цикл; однако идентифицированная модель при свободном интегрировании из того же начального условия остаётся на скрытом хаотическом аттракторе. Это структурное свойство поля, которое нельзя подстроить изменением порога.

Литература

1. Brunton, S.L., Proctor, J.L., Kutz, J.N.,Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proc. Natl. Acad. Sci. USA 2016, 113 (15), 3932–3937.
2. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физических наук, 1978. Т. 125, вып. 1. С. 123–168.
3. Ovsiannikov, L.V.. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York. 1982
4. Nikulchev, E. Symmetry invariants of strange attractors from jet-space embeddings // Physics 2026. Vol. 8, № 3. P. 70.
5. King, G.P., Stewart, I.N. Phase space reconstruction for symmetric dynamical systems // Physica D. 1992. Vol. 58. P. 216–228.
6. Cross, D.J., Gilmore, R. Equivariant differential embeddings // J. Math. Phys. 2010. Vol. 51, P. 092706.
7. Kuznetsov, N.V., Leonov, G.A., Mokaev, T.N. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 92. P. 267–285.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕНОРМГРУППОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМАХ ДЛЯ БИНАРНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ С ДИСБАЛАНСОМ ПРИ НЕУВЕРЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ[1*]

Е.В. Никульчев[1], А.А. Червяков[2], Д.Ю. Ильин[1]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет, Москва,
[2]Казначейство России, Москва

Рассматривается задача бинарной классификации в крупномасштабных системах при сильном дисбалансе классов. Развивается ренормгрупповой подход, в котором устойчивость классификатора связывается со структурным свойством функции потерь – куполообразным взвешиванием объектов в области промежуточной уверенности. Приводится определение класса куполообразных весовых функций, примеры и теоретическая оценка устойчивости минимизатора риска. Экспериментальная проверка выполнена на данных о выпонении мероприятий и онтрольных точкек Национальных и федеральных проектов. Показано, что ренормгрупповая нейронная сеть с синусоидальным куполообразным взвешиванием обеспечивает полноту и устойчивость к дрейфу распределений между периодами

Ключевые слова: ренормгруппа, дисбаланс классов, прогнозирование рисков, крупномасштабные системы, синусоидальная кросс-энтропия.

1. Введение

Крупномасштабные системы [1] управления характеризуются наличием иерархии, многосвязностью, высокой размерностью и асимметричным распределением целевых событий. В рассматриваемой задаче прогнозирования рисков неисполнения мероприятий и контрольных точек (КТ) национальных и федеральных проектов просрочки составляют 2–5% от общего числа, а подавляющее большинство проектов выполняется штатно. Кроме того, просрочка возникает в проектах по совокупности разных причин. Алгоритмы машинного обучения, оптимизирующие общую точность, игнорируют редкий класс и демонстрируют неуверенность при различии параметров КТ, приводящих к опозданиям. Это недопустимо в государственном управлении.

Популярный в практике подход – сравнивать предсказанную вероятность с порогом и считать ошибку, что быстро приводит к вырождению: модель выучивает тривиальное правило «всегда в срок» и получает большой процент правильных ответов, не выявляя ни одной просрочки. Методы ресемплинга (SMOTE, андерсемплинг) работают на уровне данных, а не функции потерь, синтезируют артефакты в разреженном пространстве категориальных признаков и не решают проблему формы распределения. Focal Loss [2] повышает вес трудных объектов, но делает это несимметрично, создавая смещение между классами. Взвешивание классов сдвигает порог решения, но не меняет форму градиентного сигнала. Решение через преобразование логарифма отношения шансов по своей форме не даёт устойчивого инварианта [3]: при сжатии логита вероятности стягиваются к 0.5, при растяжении – уходят к 0 или 1.

Для преодоления указанных сложностей предлагается подход, основанный на идеях ренормгрупповых (РГ) преобразований, которые предполагают увеличение масштаба для анализа на разных уровнях, что представляется естественным для крупномасштабных систем. В сло-

[1*] Работа выполнена в рамках государственного задания на 2026 год, паспорт № 7572-26, по научно-методическому и ресурсному обеспечению системы образования на тему: «Научно-методическое обеспечение работ по анализу деятельности управления общественными финансами Российской Федерации с применением искусственного интеллекта».

жившейся традиции в математической физике различают два понятия РГ-преобразований: в смысле Вильсона [4] и в смысле Боголюбова–Ширкова [5].

Основная идея использования РГ-теорий – укрупнять взгляд на задачу, при этом несущественные детали (для выявления редких классов) оттесняются основными для классификации редких, но важных явлений, таких как прогноз просрочек сроков исполнения проектов. Для реализации масштабирования с сохранением специфики редкого класса используется многослойная нейросеть RGNet [6] с уменьшением размерности слоёв, предназначенная для сохранения инвариантными характеристик редкого класса. Архитектура сети основана на принципе масштабирования РГ-преобразований Вильсона, которые образуют полугруппу, так как не имеют обратного преобразования. Когда нейросеть обрабатывает данные, каждый следующий слой теряет информацию, которая включает шум и детали, не важные для задачи [7].

Для сохранения инвариантов применяются РГ-преобразования в смысле Боголюбова, отличающиеся от предыдущих тем, что образуют полноценную группу и могут быть обратимы. При этом инвариантными становятся граничные условия. РГ-группа представляет собой однопараметрическую группу Ли диффеоморфизмов, сохраняющую границы области.

Таким образом, в разработанном РГ-подходе различаются два типа укрупнения: сжатие признаков, которое реализуется архитектурой нейросети, усредняя мелкие детали и оставляя крупные структуры; сжатие шкалы вероятностей, которое выполняется функцией потерь с целью изменения формы распределения.

Цель работы – построить классификатор, устойчивый к дисбалансу и неуверенности модели за счёт инвариантной функции потерь и РГ-укрупнения для прогнозирования рисков неисполнения национальных и федеральных проектов.

2. Экспериментальные данные и инструменты

Использованы данные ГАС «Управление» о КТ национальных и федеральных проектов за 2022–2025 гг. [8]. Каждая запись содержит 18 признаков: проектная принадлежность, характеристики контроля, календарные атрибуты, ответственный исполнитель и структурные характеристики мероприятия. Экспериментальные данные: обучение модели 2022–2024 гг. (11 688 записей, 4.77% просрочек), тестовая выборка – 2025 г. (5 852 записи, 2.14%). Просрочку в днях обозначим через d, индикаторную функцию – через $\mathbb{I}(\cdot)$; тогда целевая переменная имеет вид $y = \mathbb{I}(d > 30)$.

Архитектура RGNet [6] содержит $L = 2$ РГ-блока размерностей $(100, 2)$ с активацией ReLU, пакетной нормализацией BN и Dropout 0.2 между слоями. После блоков выполняется мультимасштабная конкатенация; суммарную размерность после неё обозначим через D. Классификационная голова – слои $64 \to 32 \to 1$ с сигмоидой на выходе. Обучение – Adam с темпом 0.001, batch 128, early stopping (patience 10). Для снижения дисперсии обучается ансамбль из девяти сетей с усреднением вероятностей.

В качестве альтернативных решений использованы ансамбль с мягким голосованием (VotingClassifier) из библиотеки scikit-learn и вариант с предварительным ресемплингом обучающей выборки (андерсемплинг мажоритарного класса и последующим применением SMOTEN).

3. Разработка метода и моделей

Множество рассматриваемых объектов (контрольных точек) обозначим через X, а вектор признаков отдельной КТ – через x, так что $x \in X$. Каждой КТ отвечает истинная метка класса y: значение $y = 0$ соответствует исполнению в срок, значение $y = 1$ – значительной просрочке. Классификатор обозначим через f; он сопоставляет объекту x предсказанную вероятность $p = f(x)$ принадлежности к классу просрочки, поэтому $p \in [0,1]$. Случайную метку класса обозначим через Y, вероятность события – через P, а долю миноритарного класса (просрочек) – через $\pi_1 = P(Y = 1)$.

При сильном дисбалансе удобной характеристикой обученной модели служит уверенность в правильном классе $p_t = y\,p + (1-y)(1-p)$, принимающая значения на отрезке $[0,1]$. Стандартную бинарную кросс-энтропию обозначим через

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BCE}}(y,p) = -y\log p - (1-y)\log(1-p),$$

где log – натуральный логарифм; её свойства и место в статистическом обучении описаны в [9]. При доле $\pi_1 \ll 1$ распределение p_t имеет J-форму: правый пик при $p_t \approx 1$, малый левый пик при $p_t \approx 0$ и провал в окрестности $p_t \approx 0.5$. Именно в этот провал попадают объекты, по которым модель «сомневается», а стандартная кросс-энтропия их практически игнорирует [2].

В методе предлагается работать с формой функции веса. Весовую функцию обозначим через w; она ставит в соответствие каждому значению уверенности p_t положительное число $w(p_t)$. Класс всех куполообразных весовых функций обозначим через $\mathcal{W}$. Числовой параметр амплитуды веса обозначим через $A > 0$.

Функция w называется *куполообразной* ($w \in \mathcal{W}$), если: она симметрична относительно 0.5, то есть $w(1/2 + t) = w(1/2 - t)$ для любого t; непрерывно дифференцируема, её производная обращается в нуль только в точке $p_t = 1/2$, и $w(1/2) > w(p_t)$ при $p_t \neq 1/2$; наконец, её минимум равен единице и достигается на границах отрезка.

Симметрия устраняет систематическое смещение в сторону одного класса: если модель одинаково ошибается на объектах класса «в срок» и «просрочка», вес должен быть одинаковым. Максимум при $p_t = 1/2$ усиливает внимание модели именно к зоне, где она сомневается. Класс $\mathcal{W}$ непуст. Ему принадлежит, в частности, синусоидальное семейство

$$w_A(p_t) = 1 + A\sin(\pi p_t), \qquad A > 0,$$

и параболическое семейство $w_A(p_t) = 1 + A(1 - (2p_t - 1)^2)$. При $A \to 0$ синус вырождается в константу, и мы возвращаемся к стандартной кросс-энтропии [9]: это даёт плавный переход между подходами.

Синус выбран по следующим соображениям. Во-первых, J-форма (отражающая дисбаланс классов) распределения p_t естественно описывается тригонометрическими функциями – существует целое семейство Sine-G распределений [10, 11], хорошо подходящих для таких данных. Во-вторых, синус гладок, а гладкость важна для устойчивости градиентного обучения. В-третьих, у синуса один параметр – амплитуда A, что упрощает настройку. В-четвёртых, при $A \to 0$ получается стандартная кросс-энтропия как предельный случай.

Между обучающим и проверочным периодами данные меняются: проекты заканчиваются, появляются новые, меняются ответственные органы, сдвигаются плановые даты. Обычные модели в такой ситуации теряют качество [8]. Для РГ-подхода существенно, что функция веса построена так, что при малых изменениях данных она меняется слабо.

Формально РГ-преобразование в смысле Боголюбова–Ширкова определяется для рассматриваемой задачи следующим образом. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – РГ-преобразование, зависящее от параметра огрубления α. Совокупность таких преобразований образует однопараметрическую группу диффеоморфизмов Φ_α отрезка $[0,1]$, сохраняющую границы $\{0,1\}$ и неподвижную точку $1/2$ и коммутирующую с инволюцией ι, где $\iota(p_t) = 1 - p_t$ – отражение отрезка относительно его середины. Инфинитезимальный генератор группы Φ_α обозначим через ξ, а связанную с ним производную Ли – через $\mathcal{L}_\xi$.

Пусть класс моделей обозначен через $\mathcal{F}$, а функционал риска – через

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E}\big[\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}\big(Y, f(X)\big)\big],$$

где $\mathbb{E}$ – математическое ожидание, а $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ – ограниченная взвешенная потеря с параметром отсечения $\varepsilon_{\mathrm{cl}} \in (0,1/2)$.

Получена следующая оценка устойчивости классификатора для минимизатора риска f^*. Пусть $w \in \mathcal{W}$, класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно $\mathcal{R}_\alpha$, производная Ли потери вдоль генератора ξ ограничена константой C_ξ, а функционал риска удовлетворяет условию локальной устойчивости с модулем $\kappa > 0$. Тогда

$$\| f^* \circ \mathcal{R}_\alpha - f^* \| \leq \sqrt{2|\alpha| C_\xi / \kappa}.$$

Содержательно это означает: если данные отклонились на величину порядка α, предсказания отклонятся на величину порядка $\sqrt{\alpha}$. При малых дрейфах модель работоспособна, при больших деградирует плавно, а не обвально.

4. Результаты

Влияние синусоидального взвешивания на распределение уверенности модели p_t по классам показано на рис. 1. Весовая функция $w(p_t) = 1 + \sin(\pi p_t)$ достигает максимума при $p_t = 0.5$, поэтому наибольший вес в функции потерь получают объекты, для которых модель наименее уверена. Повышенный вклад неуверенных объектов стимулирует модель доводить пограничные решения до уверенных. Объекты мажоритарного класса сосредоточены вблизи $p_t \approx 1$, объекты миноритарного класса частично смещаются в область промежуточной уверенности. Синусоидальное взвешивание модулирует градиентный сигнал, не перестраивая итоговое распределение.

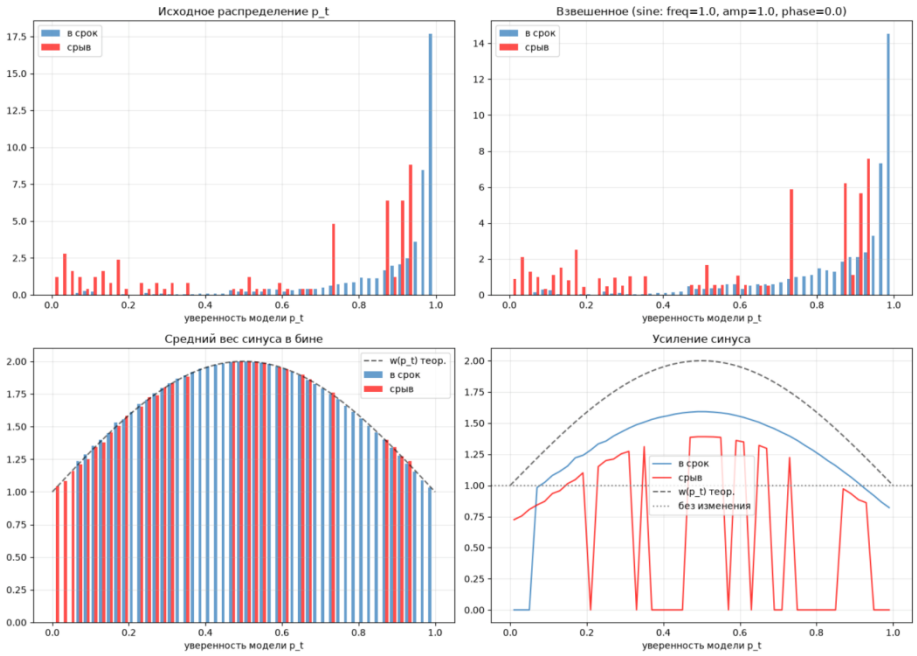


Рис. 1. Результаты RGNet: распределение уверенности p_t по классам

Сравнение методов дало следующие результаты. Для снижения влияния псевдослучайных чисел применялся ансамбль из 10 нейросетей RGNet с разными значениями Seed (начальное значение для генератора случайных чисел). Ансамбль RGNet обеспечил полноту 0.63 при точности 0.25 и F1-мере 0.36; ROC AUC составил 0.88, PR AUC – 0.33, что примерно в 15 раз превышает базовый уровень, равный доле положительного класса. Базовый Voting-классификатор при наибольшей доле правильных ответов (0.97) практически не выявлял просрочки: полнота 0.01, F1-мера 0.01. Вариант с ресемплингом занял промежуточное положение (полнота 0.39, F1-мера 0.28), но по всем операционно значимым метрикам уступил RGNet.

Результаты показывают различную устойчивость методов к смене проверочного периода. Для RGNet изменение F1-меры составило +0.05 (с 0.36 до 0.41), для Voting – +0.58 (с 0.01 до 0.59), для Voting с ресемплингом – +0.06 (с 0.28 до 0.34), что демонстрирует неприемлемость Voting для эксплуатации в условиях меняющихся распределений. Проведённые исследования чувствительности RGNet к изменению внутренних параметров и настроек показывают робастность и устойчивость модели.

5. Заключение

На основе применения ренормгрупповых преобразований в крупномасштабных системах разработаны метод и модели бинарной классификации с дисбалансом при неуверенности моделей машинного обучения. Введена и теоретически обоснована функция веса, усиливающая внимание к зоне неопределённости и не создающая смещения между классами; показано, что куполообразная функция удовлетворяет этим требованиям. Устойчивость к дрейфу обеспечи-

вается симметрией и гладкостью функции веса. Применение к задаче классификации на реальных данных показало, что метод устойчив к изменению распределения данных и не требует сложной настройки.

Литература

1. Wang H., Yan H., Rong C., Yuan Y., Jiang F., Han Z. et al. Multi-scale simulation of complex systems: a perspective of integrating knowledge and data // ACM Computing Surveys. 2024. Vol. 56, No. 12. P. 1–38.
2. Lin T.-Y., Goyal P., Girshick R., He K., Dollár P. Focal loss for dense object detection // IEEE TPAMI. 2020. Vol. 42, No. 2. P. 318–327.
3. Amari S., Nagaoka H. Methods of Information Geometry. Translations of Mathematical Monographs, vol. 191. Providence, RI: AMS, 2000.
4. Wilson K.G. The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem // Reviews of Modern Physics. 1975. Vol. 47, No. 4. P. 773–840.
5. Shirkov D.V. The Bogolyubov renormalization group // Russian Mathematical Surveys. 1994. Vol. 49, No. 5. P. 155–176.
6. Nikulchev E., Ilin D. Neural network implementation of the renormalization group for fault diagnosis with class imbalance // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2026. Vol. 17, No. 7. P. 42–49.
7. Iso S., Shiba S., Yokoo S. Scale-invariant feature extraction of neural network and renormalization group flow // Physical Review E. 2018. Vol. 97, No. 5. P. 053304.
8. Червяков А.А. Прогнозирование рисков неисполнения мероприятий национальных проектов // International Journal of Open Information Technologies. 2026. Т. 14, № 4. С. 91–99.
9. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning. New York: Springer, 2006.
10. Benchiha S., Sapkota L.P., Al Mutairi A. et al. A new sine family of generalized distributions: Statistical inference with applications // Mathematical and Computational Applications. 2023. Vol. 28, No. 4. P. 83.
11. Mulagala V., Nagarjuna V.B. Sine modified-kies generalized family of distributions: Properties and applications // Physica Scripta. 2025. Vol. 100, No. 8. P. 085009.

МОДЕЛЬ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАРШРУТНЫМИ МЕТРИКАМИ OSPF ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СЕТЕВОМ ТРАФИКЕ

К.В. Новиковский, А.П. Преображенский, Ю.А. Уланова

Воронежский институт высоких технологий

Аннотация при изменении внешней нагрузки маршрутная метрика OSPF рассчитывается по сглаженной загрузке канала. Скорость изменения метрики ограничена. Порог чувствительности, гистерезис и минимальный интервал между перестроениями отсекают кратковременные реакции. В вычислительном эксперименте сравнивались статический OSPF, непосредственное пороговое управление и разработанный метод. По 30 реализациям нестационарного трафика средняя задержка составила 9,17 мс, потери – 1,56 %. Число перестроений оказалось в 7,9 раза меньше, чем у порогового алгоритма.

Ключевые слова: OSPF, адаптивная маршрутизация, нестационарный трафик, маршрутная метрика, сетевой канал, устойчивость управления.

1. Введение

OSPF выбирает маршрут по сумме метрик каналов. Каждый маршрутизатор имеет одинаковое описание топологии области и самостоятельно строит дерево кратчайших путей [1]. При постоянных метриках протокол реагирует на отказ линии и изменение связности. Текущая загрузка на выбор пути не влияет. Канал с малой административной стоимостью остаётся предпочтительным даже при устойчивой перегрузке. Очереди, задержка и потери растут, хотя альтернативный маршрут свободен.

Расширения OSPF для Traffic Engineering передают сведения о пропускной способности и ограничениях каналов [2]. Более поздняя спецификация добавляет задержку, её вариацию, потери, остаточную и используемую полосу [3]. Данные поступают от счётчиков интерфейсов и средств активных измерений. Для двусторонних временных характеристик применяется TWAMP [4]. Правило преобразования этих измерений в маршрутную метрику при изменяющейся нагрузке остаётся не задано. Оно должно ограничивать частые перестроения.

В работах [5–8] выбор весов OSPF рассматривается как задача распределения потоков и снижения перегрузки. При стационарной матрице трафика получают близкие к оптимальным наборы метрик; расширенные схемы разделения потока повышают качество маршрутизации [9]. В реальной сети матрица трафика меняется. Пересчёт весов после каждого измерения создаёт встречное воздействие. После переноса потока прежний канал разгружается, его стоимость уменьшается, и маршрут может быстро вернуться. В модели внешний трафик нестационарен, управляемая величина – метрика канала. Искомый закон должен снизить перегрузку и ограничить число маршрутных перестроений.

2. Модель адаптивного изменения метрик

Сеть содержит множество маршрутизаторов V и множество каналов E. Состояние канала e в дискретный момент k задаётся вектором

$$x_e(k) = [u_e(k), d_e(k), I_e(k), b_e(k)]^T \quad (1)$$

Вектор содержит u_e – загрузку относительно пропускной способности; d_e – задержку; I_e – долю потерянных пакетов; b_e – доступную пропускную способность. Расширения OSPF TE могут передавать эти показатели. Интенсивности потоков задают внешний трафик; их изменения отражаются в компонентах $x_e(k)$. Измерения выполняются через равные интервалы. Одиночные выбросы не должны менять маршрут, поэтому загрузка сглаживается экспоненциально

$$\overline{u_e}(k) = \beta\overline{u_e}(k-1) + (1-\beta)u_e(k), 0 < \beta < 1 \quad (2)$$

Коэффициент β задаёт память фильтра. Чем больше β, тем медленнее реакция и слабее влияние случайных пиков. Для канала e целевая метрика имеет вид

$$\widehat{m_e}(k) = m_e^0 + \gamma[\widehat{u_e}(k) - u_0] \quad (3)$$

В формуле m_e^0 обозначает исходную метрику OSPF, u_e – допустимый уровень загрузки,γ – коэффициент усиления; $[z] + max(0, z)$. Если сглаженная загрузка не превышает u_0, добавка к метрике равна нулю и сохраняется штатная стоимость. Выше порога метрика изменяется пропорционально отклонению. В эксперименте управляющий сигнал зависел только от загрузки; так отдельно проверялось влияние стабилизирующих ограничений. Задержка и потери использовались как показатели качества. На следующем этапе они войдут в интегральную оценку состояния канала по формуле (1).

Условие $\mathrm{u_e}\,|\hat{\mathrm{m}}_\mathrm{e}(\mathrm{k}) - \mathrm{m_e}(\mathrm{k})| \geq \delta$ проверяется с интервалом T_m секунд. За одно обновление метрика изменяется не более чем на $\Delta\mathrm{m_{max}}$:

$$m_\mathrm{e}(k+1) = m_\mathrm{e}(k) + sign(\Delta_\mathrm{e}(k))\, min(|\Delta_\mathrm{e}(k)|, \Delta m_\mathrm{max}) \quad (4)$$

Величина $\Delta_\mathrm{e}(k)$ равна $\hat{m}_\mathrm{e}(k) - m_\mathrm{e}(k)$, а δ задаёт зону нечувствительности. Маршрут переключается, если его суммарная метрика ниже текущей не менее чем на h. Повторное решение запрещено в течение T_h секунд. Параметр h формирует гистерезис по величине, T_h – по времени. Критерий J включает среднюю задержку $\overline{D}$, среднюю долю потерь $\overline{L}$, максимальную загрузку U_max и число перестроений N^R

$$\mathrm{J} = \mathrm{a}\bar{\mathrm{D}} + \mathrm{b}\bar{\mathrm{L}} + \mathrm{cU_{max}} + \mathrm{rN^R} \rightarrow \min \quad (5)$$

Ограничения задают допустимый диапазон метрик, предельный шаг и минимальный интервал между сменами маршрута. Слагаемое rN^R учитывает число перестроений. При близких значениях $\overline{D}$, $\overline{D}$ и U_max решение с меньшим N^R даёт меньшее J.

3. Экспериментальная проверка модели

Расчётная сеть включала шесть маршрутизаторов. Источник и получатель соединялись двумя непересекающимися маршрутами P1 и P2; каждый маршрут состоял из трёх каналов пропускной способностью 100 Мбит/с. Суммарные начальные метрики равнялись 30 и 36; при таких значениях статический OSPF выбирал P1. Средняя интенсивность управляемого потока составляла 43 Мбит/с и изменялась по синусоидальному закону. Фоновая нагрузка включала два длительных всплеска на P1, один на P2 и коррелированный случайный процесс. Продолжительность одной реализации – 900 с.

Проверялись три режима. В первом метрики не менялись. Во втором последнее измерение раз в 5 с преобразовывалось по пороговому правилу. Параметры разработанного метода: β = 0,82, u_0 = 0,68, γ = 90, δ = 1,5, Δm_max = 1,5, h = 3 и T_h = 35 с. Задержка рассчитывалась по приближению одноканальной системы обслуживания для пакета 1500 байт; к результату добавлялась постоянная задержка распространения. При превышении пропускной способности потери равнялись доле трафика, не поместившейся в канал. Выполнено 30 реализаций с разными последовательностями фоновых колебаний.

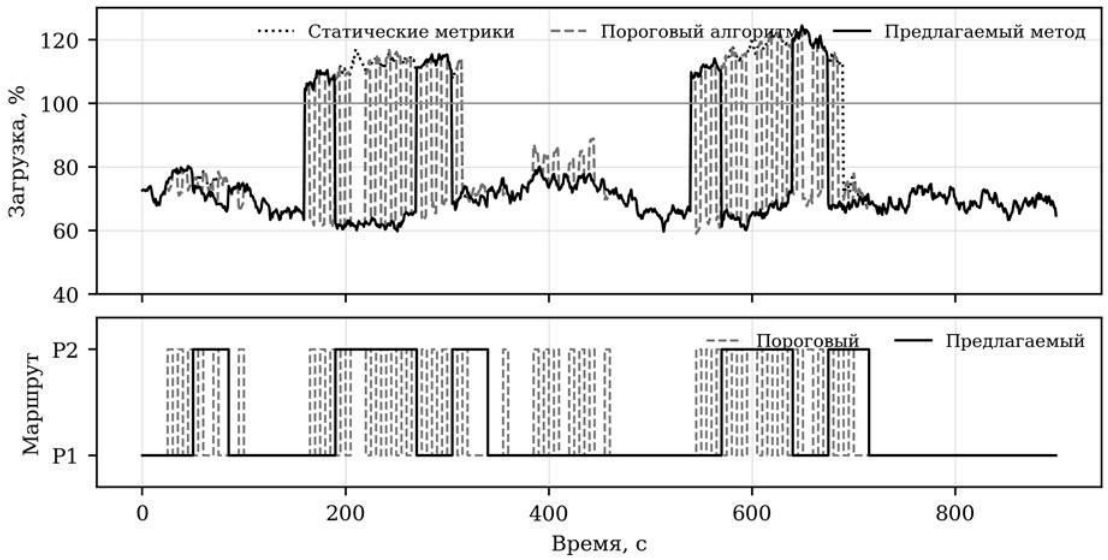


Рис. 1. Загрузка выбранного пути и последовательность маршрутных решений в одной реализации

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента, среднее ± стандартное отклонение

Метод	Задержка, мс	Потери, %	Перегрузка, % времени	Перестроения
Статические метрики	11,74 ± 0,01	4,07 ± 0,13	33,89 ± 0,00	0
Пороговый алгоритм	9,29 ± 0,13	1,79 ± 0,13	15,52 ± 0,82	83,6 ± 5,1
Предлагаемый метод	9,17 ± 0,19	1,56 ± 0,22	14,65 ± 1,39	10,6 ± 1,2

При статических метриках маршрут P1 сохранялся во время обоих всплесков. Перегрузка занимала 33,89 % времени; средняя доля потерь составила 4,07 %. Пороговый алгоритм снизил оба показателя, но после переноса потока сразу реагировал на разгрузку. За 900 с он выполнял в среднем 83,6 перестроения. На рис. 1 частым переключениям соответствует плотное чередование P1 и P2 в интервалах высокой нагрузки.

Относительно статического OSPF разработанный закон управления снизил среднюю задержку на 21,9 %, потери – на 61,7 %, время перегрузки – на 56,8 %. Относительно простого порогового алгоритма число перестроений уменьшилось на 87,3 % и составило 10,6 за реализацию. Задержка и потери при этом не ухудшились. Число перестроений нужно учитывать в целевой функции вместе с показателями качества маршрута. Одно пороговое условие снижает перегрузку, но не удерживает устойчивое маршрутное решение.

3.1. Чувствительность к минимальному интервалу

В этом опыте изменялся только параметр T_h; остальные настройки сохранялись. Проверялись значения 15, 35 и 60 с. Таблица 2 содержит средние результаты по тем же 30 реализациям.

Таблица 2. Результаты вычислительного эксперимента, среднее ± стандартное отклонение

T_h, с	Задержка, мс	Потери, %	Перегрузка, % времени	Перестроения
15	8,75	1,26	12,46	12,6
35	9,17	1,56	14,65	10,6
60	9,58	1,73	16,26	9,0

При T_{h} = 15 с алгоритм быстрее освобождал перегруженный путь, но выполнял 12,6 перестроения. При T_{h} = 60 с число перестроений снизилось до 9,0, а средняя задержка выросла до 9,58 мс. В основном эксперименте использовалось T_{h} = 35 с. Рост T_{h} уменьшает число повторных переключений, но замедляет перенос потока после устойчивого изменения внешней нагрузки.

Выводы

Маршрутная метрика OSPF рассчитывается по сглаженной загрузке канала. Зона нечувствительности δ отсекает малые отклонения, $\Delta m_{\max}$ ограничивает один шаг, а T_{h} запрещает раннее повторное переключение. В расчётном сценарии средняя задержка и потери были ниже, чем при статическом OSPF. По сравнению с непосредственным пороговым управлением повторные смены маршрута возникали реже.

Полученные значения относятся к схеме с двумя маршрутами и аналитической моделью очередей. В следующем эксперименте интегральная оценка канала будет учитывать задержку, потери и доступную полосу. Чувствительность к β, δ, h и T_{h} будет проверена отдельно. Затем алгоритм планируется испытать на стенде с реальной реализацией OSPF.

Литература

1. Moy J. OSPF Version 2. RFC 2328. IETF, 1998. DOI: 10.17487/RFC2328.
2. Katz D., Kompella K., Yeung D. Traffic Engineering Extensions to OSPF Version 2. RFC 3630. IETF, 2003. DOI: 10.17487/RFC3630.
3. Giacalone S., Ward D., Drake J., Atlas A., Previdi S. OSPF Traffic Engineering Metric Extensions. RFC 7471. IETF, 2015. DOI: 10.17487/RFC7471.
4. Hedayat K., Krzanowski R., Morton A., Yum K., Babiarz J. A Two-Way Active Measure-ment Protocol (TWAMP). RFC 5357. IETF, 2008. DOI: 10.17487/RFC5357.
5. Fortz B., Thorup M. Internet Traffic Engineering by Optimizing OSPF Weights // Proceed-ings IEEE INFOCOM 2000. 2000. Vol. 2. P. 519–528. DOI: 10.1109/INFCOM.2000.832225.
6. Fortz B., Thorup M. Optimizing OSPF/IS-IS Weights in a Changing World // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2002. Vol. 20, No. 4. P. 756–767. DOI: 10.1109/JSAC.2002.1003042.
7. Fortz B., Rexford J., Thorup M. Traffic Engineering with Traditional IP Routing Protocols // IEEE Communications Magazine. 2002. Vol. 40, No. 10. P. 118–124. DOI: 10.1109/MCOM.2002.1039866.
8. Rétvári G., Cinkler T. Practical OSPF Traffic Engineering // IEEE Communications Letters. 2004. Vol. 8, No. 11. P. 689–691. DOI: 10.1109/LCOMM.2004.837629.
9. Xu D., Chiang M., Rexford J. Link-State Routing with Hop-by-Hop Forwarding Can Achieve Optimal Traffic Engineering // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2011. Vol. 19, No. 6. P. 1717–1730. DOI: 10.1109/TNET.2011.2134866.

ОПТИМИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА ФОТОГРАФИИ НА ОСНОВАНИИ ГЕОКООРДИНАТ ИЗ МЕТАДАННЫХ В ФОРМАТЕ EXIF

Я.М. Перепелкин, С.А. Отческов, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача определения местоположения объекта на фотографии на основании геокоординат из метаданных в формате Exif. Выполняется подготовка баз локаций, включающих геокоординаты и названия городов. Разрабатывается библиотека функций на языке C++ для загрузки базы и поиска ближайшей локации к текущим геокоординатам, извлекаемым из метаданных фотографии в формате Exif. Выполняется анализ производительности приложения. Демонстрируется, что наибольшее время занимает загрузка базы локаций. Последовательная оптимизация работы с базой локаций позволяет ускорить этап загрузки данных и достигнуть временных показателей, сопоставимых с поиском. Последующее предварительное разбиение набора локаций на подмножества в зависимости от расположения позволяет дополнительно ускорить поиск. Итоговая версия приложения работает ~0.25 и 0.37 мс в зависимости от инфраструктуры на базе в ~48 000 городов, и ~0.77 и 1.46 мс на базе в ~147 000 записей. Исходный код реализации выложен в открытый доступ на GitHub.

Ключевые слова: Exif, оптимизация, FlatBuffers, геокоординаты городов.

1. Введение

Exchangeable Image File Format (Exif) [1, 2] – стандарт, который позволяет добавлять метаданные к цифровым изображениям и медиафайлам. Примерами таких метаданных являются модель и настройки камеры; дата и время съемки; геокоординаты (широта и долгота) местоположения, где сделан снимок, при условии активации GPS на устройстве; личные данные владельца камеры. Exif содержит полезную информацию, применяемую для организации цифровых баз фотографий и последующего редактирования снимков с помощью профессиональных программных инструментов, но наличие персональной информации об авторе представляет угрозу приватности, если фото выкладывается в сеть Интернет.

В работе рассматривается задача определения местоположения (локации) объекта на фотографии с использованием геокоординат, извлекаемых из метаданных в формате Exif. При этом под локацией понимается город, в котором сфотографирован объект. Данная задача предполагает наличие базы локаций, содержащей названия городов мира или конкретной страны с их геокоординатами. Алгоритмически задача сводится к чтению базы локаций и поиску ближайшей локации (поиск минимального расстояния). Основное требование к программному решению – это выполнение указанных операций в режиме реального времени, чтобы пользователь устройства не замечал время от момента съемки фотографии до получения названия города.

Цель настоящей работы – подготовить базы локаций, содержащие необходимую для решения задачи информацию, на основании открытых источников и разработать программную библиотеку на C++ для организации эффективной работы с этими базами. На этапе подготовки статьи авторам не удалось найти открытую универсальную библиотеку для решения данной задачи.

2. Постановка задачи поиска ближайшей локации

Задача поиска ближайшей локации предполагает минимизацию следующей функции:

$$\overline{x} = \underset{x \in D}{\operatorname{argmin}}\, \rho(x, y),$$

где $y = (y_{lat}, y_{lon})$ – геокоординаты (широта и долгота) локации объекта, показанного на входном изображении (в радианах), $x = (x_{lat}, x_{lon})$ – широта и долгота населенного пункта (в радианах) в базе локаций D, $\rho(x, y)$ – функция расстояния, $\overline{x} = (\overline{x}_{lat}, \overline{x}_{lon})$ – ближайшая локация.

Для вычисления расстояния $\rho(x, y)$ между двумя локациями на сфере используется формула гаверсинуса [3], которая может рассматриваться как аппроксимация расстояния между двумя точками на поверхности Земли.

$$\rho(x, y) = 2R * \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{x_{lat}-y_{lat}}{2}\right) + \cos(x_{lat})\cos(y_{lat})\sin^2\left(\frac{x_{lon}-y_{lon}}{2}\right)}{1-\left(\sin^2\left(\frac{x_{lat}-y_{lat}}{2}\right) + \cos(x_{lat})\cos(y_{lat})\sin^2\left(\frac{x_{lon}-y_{lon}}{2}\right)\right)}}\right).$$

3. Алгоритм определения локации на основании метаданных в Exif

Алгоритм определения локации объекта на фотографии на основании метаданных в Exif включает три этапа.

1. Извлечение метаданных из Exif входного изображения.
2. Загрузка базы локаций.
3. Поиск ближайшей локации.

Извлечение метаданных из Exif можно выполнить с использованием сторонних библиотек. Ниже (таблица 1) приведена сводная информация об имеющихся в открытом доступе библиотеках (ссылка для скачивания, язык программного интерфейса (API), лицензия). Можно видеть, что библиотека TinyExif является перспективным вариантом, поскольку проект открытый, и программная реализация разрабатывается на языке C++. Также следует отметить легковесность данной библиотеки. Она состоит из одного заголовочного файла и соответствующего файла исходного кода.

Таблица 1. Сводная информация об имеющихся в открытом доступе библиотеках, обеспечивающих извлечение метаданных из Exif фотографии

Библиотека	API	Лицензия
TinyEXIF [4]	C++	MIT
exif [5]	Python	MIT
exif-parser [6]	JavaScript	MIT
ExifReader [7]	JavaScript	MPL-2.0

Способ ***загрузки базы локаций*** зависит от формата ее хранения. В рамках проекта подготовлены три базы в формате csv на основании данных, выгруженных из открытых источников. Записи во всех базах включают следующие обязательные атрибуты: идентификатор записи, страна, город, широта и долгота, соответствующая этому городу. Первая база **БД-1** содержит города РФ и их геокоординаты, полученные в результате разбора веб-страницы [8]. **БД-1** имеет небольшие размеры и необходима для проверки корректности работы разрабатываемого приложения. Вторая база **БД-2** [9] включает известные города всего мира, ~48 000 локаций. Последняя база **БД-3** [10] – наиболее всеобъемлющая. Она содержит более 147 000 городов, численность населения которых не менее 1 000 человек. Отметим, что записи **БД-3** наряду с перечнем обязательных атрибутов включают список альтернативных названий городов. Причем количество альтернативных названий варьируется для разных локаций. Данная особенность влияет на скорость чтения данных. Далее в процессе анализа производительности используются **БД-2** и **БД-3**, поскольку время работы приложения на них выходит за рамки реального времени, то есть превышает допустимую задержку порядка одной миллисекунды, при которой обработка остается незаметной для пользователя.

Подготовленные базы хранятся в формате csv, поэтому загрузка любой из баз предполагает чтение текстового файла определенной структуры. В процессе оптимизации базы компилируются в формат библиотеки FlatBuffers [11], соответственно загрузка данных выполняется средствами FlatBuffers. При этом осуществляется их полное размещение в оперативной памяти, чтобы избежать дополнительных запросов на чтение при множественных операциях доступа к данным.

Выбор данной библиотеки обусловлен двумя факторами. Во-первых, подготовленные базы имеют строго регламентированную структуру, и в процессе их использования предполагается исключительно поиск записей. Отсутствует необходимость выполнять сложные запросы или операции вставки и удаления записей, реализация которых выглядит проще в реляционных СУБД (например, в SQLite). Во-вторых, библиотека FlatBuffers обеспечивает высокую скорость чтения данных без десериализации (прямой доступ к данным) [12]. В-третьих, при интеграции предполагается минимальная зависимость от внешних библиотек, и FlatBuffers имеет широко распространенную открытую лицензию Apache 2.0.

Поиск ближайшей локации в простейшем варианте реализуется как проход по городам базы и выбор локации, для которой достигается минимальное расстояние до текущего местоположения объекта. Сложность наивного поиска пропорциональна числу записей в просматриваемой базе локаций. В процессе оптимизации данный этап ускоряется за счет предварительного разбиения множества локаций на подмножества (далее сегменты) с использованием равномерной сетки. Шаг сетки подбирается адаптивно на основе пространственного распределения данных для баланса между максимальным числом локаций внутри сегмента и размерностью формируемой сетки. На этапе поиска образуется базовая область, включающая целевой и смежные сегменты, с возможностью итеративного расширения при отсутствии записей. Внутри сегментов выполняется линейный или бинарный поиск по широте. Сегментированный подход значительно снижает сложность поиска в среднем и лучшем случаях за счет сужения зоны перебора, при этом применение бинарного поиска делает вычислительные затраты пропорциональными логарифму числа записей в области поиска.

4. Программная реализация

Программное решение состоит из приложения и библиотеки классов, структур и функций (рис. 1). Библиотека состоит из четырех модулей:

1. ***Структуры данных.*** Модуль содержит внутренние структуры и классы для представления геокоординат, метаданных, извлекаемых из Exif, и информации о локации.

2. ***Модуль чтения данных.*** Включает интерфейс для загрузки и доступа к данным базы локаций. Предусматриваются реализации данного интерфейса для чтения данных из формата csv и FlatBuffers во внутренние структуры данных, а также реализация, обеспечивающая чтение из формата FlatBuffers и последующую работу со структурами данных этой библиотеки без необходимости десериализации.

3. ***Модуль поиска.*** Содержит реализацию алгоритмов поиска ближайшей локации по отношению к заданной. Предусматриваются реализации для внутренних структур данных и структур FlatBuffers.

4. ***Модуль вычисления расстояния.*** Включает реализацию функции вычисления расстояния гаверсинуса и его аппроксимации.

Рис. 1. Структура программного решения

Приложение работает следующим образом. Оно получает на вход изображение и базу локаций. Выполняет последовательное чтение данных с использованием ***Модуля чтения данных***

и извлечение метаданных из Exif с помощью ***Библиотеки TinyExif***. Для локации, полученной из Exif изображения, осуществляет поиск ближайшей локации из выбранной базы средствами функций ***Модуля поиска***.

Исходные коды программной реализации выложены в открытый доступ на GitHub [13].

5. Вычислительные эксперименты

5.1. Описание эксперимента

При однократном запуске приложения вычислительная сложность решения задачи не зависит от конкретного местоположения сцены, показанной на изображении. Поэтому в процессе анализа производительности входное изображение фиксируется, и приложение запускается многократно (100 итераций). Для каждого запуска приложения собираются времена выполнения каждого отдельного этапа: чтение Exif, загрузка базы локаций, поиск ближайшей локации в базе. В результате формируется три набора по 100 времен. Для каждого набора из 100 времен выбирается минимальное значение. Эксперимент выполняется для каждой из трех описанных выше баз локаций.

5.2. Тестовая инфраструктура

Ниже (таблицы 2 и 3) приведены параметры двух тестовых инфраструктур, которые используются при проведении экспериментов.

Таблица 2. Тестовая инфраструктура 1

CPU	12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12500 (6 cores, 12 threads, max 4.6 GHz)
RAM	16 ГБ
ОС	Ubuntu 22.10 (64-bit) (Linux 6.11.0-29-generic)
SSD	Biwintech SSD NX500 512GB (M.2 PCI-E Gen3 x4)

Таблица 3. Тестовая инфраструктура 2

CPU	Intel(R) Core(TM) i7-6850K CPU (6 cores, 12 threads, 3.6 GHz)
RAM	64 ГБ
ОС	Ubuntu 24.04.2 LTS (64-bit) (Linux 6.8.0-83-generic)
SSD	INTEL SSDSC2BW240H6 (SATA 3.0)

5.3. Результаты экспериментов

Базовая версия (v1.0). Начальная версия разрабатываемой библиотеки предполагает, что базы локаций хранятся в формате csv. Соответственно выполняется чтение текстового файла в массив внутренних структур. Поиск реализуется как линейный проход по полученному массиву. Анализ времени работы каждого этапа приложения для данной версии (рис. 2) показывает, что более 88% от суммарного времени выполнения трех этапов алгоритма тратится на загрузку базы локаций во внутренние структуры. В абсолютных значениях время загрузки БД-2 составляет ~17.20 мс и ~28.75 мс для первой и второй инфраструктур соответственно. Для БД-3 этот показатель многократно возрастает, достигая ~101.65 мс и ~154.71 мс. При этом время самого поиска варьируется от ~2.15 до ~3.25 мс для БД-2, и от ~5.85 до ~10.32 мс для БД-3. Подобные затраты времени на чтение данных являются неприемлемыми с точки зрения конечного пользователя. Поэтому далее оптимизируется этот этап.

Версия v2.0. Оптимизация предполагает переход к высокопроизводительной библиотеке доступа к данным. Как отмечалось ранее, в проекте выбрана библиотека FlatBuffers. Первый шаг – компиляция баз локаций в формат FlatBuffers. При этом требуется выполнение десериализации данных во внутренние структуры данных проекта. Результаты экспериментов показывают, что время чтения данных для **БД-2** составляет более 61% от суммарного времени работы для обеих тестовых инфраструктур, для **БД-3** – более 80%. Результат очевидно зависит от размера базы. Если для **БД-2** абсолютное время загрузки данных измеряется единицами миллисе-

кунд (~3.80 мс и ~6.63 мс для инфраструктуры 1 и 2 соответственно), то для **БД-3** – составляет ~29.47 мс и ~43.99 мс, что по-прежнему недопустимо для приложения, которое должно работать в режиме реального времени.

Версия v2.1. Второй шаг оптимизации – это полный переход в разрабатываемой библиотеке на использование структур данных FlatBuffers. Такой переход позволяет избежать десериализации и предварительного копирования в память, что потенциально должно ускорить доступ к данным при чтении. В модифицированной версии время чтения для **БД-2** сократилось до ~0.12 мс и ~0.22 мс в зависимости от инфраструктуры, что составляет ~4.76% и 5.43% от суммарного времени. Для **БД-3** соответствующие времена уменьшились до ~0.68 мс и ~1.15 мс, что меньше времени поиска на один порядок.

Версия v3.0. Внедрение сегментированного алгоритма (описан в разд. 3) позволило уменьшить время поиска до десятых долей миллисекунды с учетом времени загрузки предварительно подготовленной базы сегментов: ~0.04 и ~0.07 мс для базы **БД-2**, 0.10 и 0.17 мс для **БД-3** в зависимости от инфраструктуры.

Выводы. Рассмотрим производительность итоговой версии, содержащей все перечисленные выше оптимизации. Из полученных результатов (рис. 2) можно видеть, что для **БД-2**, содержащей ~48 000 городов, удалось достичь ускорения в ~77.6 и ~86.7 раз по сравнению с исходной реализацией в зависимости от инфраструктуры. Для **БД-3** из ~147 000 записей соответствующие значения ускорения составляют ~139.7 и ~113.1 раза. Таким образом, итоговая версия приложения на базе **БД-2** работает ~0.25 и 0.37 мс на имеющихся тестовых узлах, и ~0.77 и 1.46 мс на базе **БД-3**. В целом полученные на **БД-2** абсолютные значения времен приемлемы для практического применения. Если обратиться к результатам на **БД-3**, то они близки к показателям, ожидаемым от работы приложения в реальном времени. Здесь следует отметить, что набор городов **БД-3** избыточен для решения многих прикладных задач, поэтому на этапе внедрения она может быть отфильтрована в соответствии с требованиями конкретной постановки задачи. Также записи этой базы содержат альтернативные названия городов, перечень которых может быть сокращен, либо атрибут может быть полностью исключен из базы согласно постановке конкретной задачи. Как следствие, суммарное время определения текущей локации может быть существенно уменьшено.

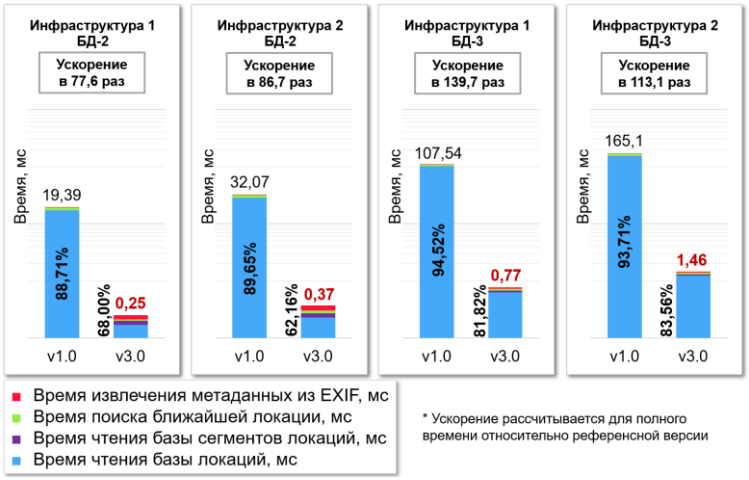


Рис. 2. Полное время работы базовой и итоговой версии, итоговое ускорение. Гистограммы приведены в логарифмической шкале

6. Заключение

В процессе исследования решена задача определения локации объекта на основании метаданных фотографии в формате Exif, содержащих широту и долготу места, где сделан снимок. Подготовлены три базы локаций, включающие геокоординаты и названия городов. Первая база содержит ~340 городов РФ, вторая – ~48 000 крупных городов всего мира, третья – ~147 000 городов с численностью населения более 1 000 человек. Разработана библиотека функций на языке C++ для загрузки базы и поиска ближайшей локации к текущим

геокоординатам, извлекаемым из метаданных фотографии, которые хранятся в формате Exif. Выполнен анализ производительности и оптимизация приложения поиска на двух базах наибольшего размера, поскольку исходное приложение с этими базами работает существенное время. После применения последовательности оптимизаций удается достичь времени работы в ~0.25 и 0.37 мс на второй базе на имеющихся тестовых узлах, и ~0.77 и 1.46 мс на третьей базе. Таким образом, уже на второй базе с размерами, близкими к 50 000 локаций, приложение работает в режиме реального времени. Последняя база городов включает максимальное количество локаций, для которых указаны перечни альтернативных названия, и приложение работает за приемлемое время.

Тьюториалы с описанием загрузки «сырых» данных, скрипты для их обработки, а также исходные коды библиотеки и приложения поиска ближайшей локации выложены в открытый доступ в репозиторий на GitHub [13]. Наряду с этим, текущая версия библиотеки позволяет решать задачи определения территориально-административной единицы для текущей локации и уточнения расположения локации внутри города при наличии данных о внутреннем устройстве соответствующего городского округа.

Литература

1. Camera & Imaging Products Association (CIPA). Exchangeable image file format for digital still cameras: Exif Version 3.0.CIPA DC-008-2023, May 2023.
2. Japan Electronics and Information Technology Industries Association (JEITA) & Camera & Imaging Products Association (CIPA). Exchangeable image file format for digital still camer-as: Exif Version 2.3. JEITA CP-3451C / CIPA DC-008-2012, December 2012.
3. Sinnott R.W. Virtues of the Haversine // Sky and Telescope. 1984. 68 (2). P. 159.
4. TinyEXIF: Tiny ISO-compliant C++ EXIF and XMP parsing library for JPEG. URL: github.com/cdcseacave/TinyEXIF (дата обращения: 26.03.2026).
5. exif. Read and modify image EXIF metadata using Python. URL: gitlab.com/TNThieding/exif (дата обращения: 26.03.2026).
6. exif-parser. A javascript library to extract EXIF metadata from JPEG images, in node and in the browser. URL: github.com/bwindels/exif-parser (дата обращения: 26.03.2026).
7. ExifReader. A JavaScript Exif info parser. URL: github.com/mattiasw/ExifReader (дата обращения: 26.03.2026).
8. Города РФ. URL: https://time-in.ru/coordinates/russia (дата обращения: 26.03.2026).
9. Города мира. URL: https://simplemaps.com/data/world-cities (дата обращения: 26.03.2026).
10. Города с численностью населения не менее 1000. URL: https://public.opendatasoft.com/explore/dataset/geonames-all-cities-with-a-population-1000/export/?disjunctive.cou_name_en&sort=name (дата обращения: 26.03.2026).
11. FlatBuffers: Memory Efficient Serialization Library. URL: https://github.com/google/flatbuffers (дата обращения: 26.03.2026).
12. Proos D.P., Carlsson N. Performance Comparison of Messaging Protocols and Serialization Formats for Digital Twins in IoV // 2020 IFIP Networking Conference (Networking), Paris, France, 2020. P. 10–18.
13. Исходный код разработанной библиотеки и примеры использования. URL: https://github.com/itlab-vision/geotags-public (дата обращения: 26.03.2026).
14. Myint A. Z., Tun K. M. M. Grid-Based Spatial Index Method for Location-Based Nearest Neighbour Search // International Journal of Future Computer and Communication. 2020. 9(2). P. 40-45. URL: https://www.ijfcc.org/vol9/563-F1037.pdf (дата обращения: 26.03.2026).
15. Ooi B. C. Indexing in Spatial Databases // National University of Singapore, 2005. URL: https://www.comp.nus.edu.sg/~ooibc/spatialsurvey.pdf (дата обращения: 26.03.2026).

СРАВНЕНИЕ ПОТОКОВОЙ И БУФЕРИЗИРУЮЩЕЙ АРХИТЕКТУР УСКОРИТЕЛЯ СВЕРТОЧНОГО СЛОЯ НА ПЛИС

О.А. Петров, Ю.А. Родимков

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Развитие технологий искусственного интеллекта привело к внедрению моделей глубокого обучения в повседневную деятельность и производственные процессы. Это предъявляет новые требования к скорости вычислений, а также к энергетической и аппаратной эффективности. В связи с этим представляет интерес разработка специализированных ускорителей, позволяющих эффективно выполнять вычисления моделей глубокого обучения и не содержащих избыточных для них блоков. В данной работе представлено сравнение производительности и энергоэффективности потокового и буферизирующего ускорителей сверточного слоя нейронной сети. Результаты показали, что по сравнению с однопоточной CPU реализацией в библиотеке Darknet инференс VGG-подобной сети ускорился в 2,34 и 2,75 раза соответственно, а энергопотребление на один вывод сети сократилось в 2,3 раза.

Ключевые слова: ПЛИС, аппаратный ускоритель, систолический массив, инференс нейронных сетей, сверточные нейронные сети.

1. Введение

В настоящее время сверточные нейронные сети широко применяются в задачах распознавания образов и анализа данных, и все чаще их внедряют во встраиваемые и мобильные системы. Такие устройства обладают ограниченными вычислительными ресурсами, а также существенными ограничениями на энергопотребление. Поэтому актуальной становится задача эффективной реализации вывода нейронных сетей на устройствах с ограниченными ресурсами, где помимо времени вычислений важно и энергопотребление [1, 2].

Программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) позволяют задать вычислительную архитектуру под конкретную операцию и организовать параллельную обработку несколькими вычислительными ядрами [3]. Специализированная архитектура в том числе исключает избыточную логику, снижая при этом энергопотребление системы на один запуск модели. При этом возможность использования нескольких вычислительных ядер позволяет ускорить вывод нейронной сети за счет параллельной обработки данных. Цель работы состоит в сравнении производительности и энергоэффективности потокового и буферизирующего ускорителей для вычисления сверточного слоя нейронной сети на одной аппаратной платформе.

2. Архитектура ускорителей

В данной работе вычисление сверточного слоя нейронной сети сводится к матричному умножению входной карты признаков на ядро свертки. Для этого входная карта признаков преобразуется в матрицу с помощью алгоритма im2col. Каждая строка этой матрицы описывает одно положение ядра свертки относительно карты признаков и состоит из векторов, число которых равно числу элементов окна свертки. Каждый вектор содержит значения всех каналов входной карты признаков в одной точке этого окна. Аналогичным образом ядро свертки разворачивается в столбцы матрицы весов.

Для выполнения матричного умножения на ПЛИС используется систолический массив 8×8 вычислительных элементов. Каждый элемент перемножает 8-битные операнды и накапливает частичную сумму. Данные и веса поступают в массив блоками, поэтому размер обрабатываемого слоя не ограничен размером самого массива. Систолическая организация обеспечивает локальную передачу операндов между соседними элементами [4]. Разбиение операций сверточной сети на блоки также используется в работах по проектированию ускорителей на ПЛИС

[5]. Было реализовано два аппаратных ускорителя, которые отличаются местом выполнения преобразования входных данных в матричный вид и способом работы с памятью.

В потоковой реализации трансформация входной карты признаков и ядра свертки выполняется на процессоре. Предполагается, что входные карты признаков расположены в памяти в формате NHWC, где N – число примеров, H, W – высота и ширина карты признаков, C – число каналов. Схема применима к слоям разного размера, с различным числом каналов. Однако соседние окна частично содержат пиксели, которые уже участвовали в других окнах. В развернутой матрице они повторяются, существенно увеличивая объем передаваемых данных. Тем самым производительность ускорителя упирается в пропускную способность шины памяти.

В реализации буферизирующего ускорителя входные карты признаков не трансформируются на центральном процессоре, а поступают в выделенные буферы внутри ПЛИС построчно. В данном случае предполагается, что данные хранятся в формате NCHW8, то есть каналы карт признаков изначально сгруппированы в блоки по 8. Такое преобразование достаточно выполнить один раз предварительно, и тогда трансформация данных после каждого слоя не требуется. Преобразовывать нужно только входное изображение, подаваемое в нейронную сеть, а также, при необходимости, результат работы сети. В строчный буфер, расположенный во встроенной памяти ПЛИС, загружается число строк входной карты признаков, равное высоте ядра свертки. Каждая строка буфера содержит лишь группу из 8 каналов соответствующей строки входной карты признаков. Далее аппаратный модуль по мере вычислений формирует окна аналогично алгоритму im2col. В систолическом массиве выполняется накопление частичных сумм по блокам каналов, результаты которого сохраняются в выходной буфер. Выходной буфер накапливает частичные суммы по мере последовательной обработки каждой группы каналов исходной карты признаков. После обработки очередной группы каналов в буфер загружаются те же строки со следующей группой из 8 каналов. Когда обработаны все группы, загружается следующий набор строк входной карты признаков. Это сокращает повторные обращения к внешней памяти по сравнению с потоковой реализацией. Переиспользование данных требует внутренней блочной памяти и ограничивает пространственные размеры карты признаков и параметры ядра. ПЛИС не переконфигурировалась под каждый эксперимент отдельно. Размер строчного буфера был равен 7×224, а выходного – 224. Во время выполнения доступ ограничивался программно.

3. Методология эксперимента

Вычислительные эксперименты проводились на системе с ПЛИС XC7Z010 и двухъядерным процессором ARM Cortex-A9. Частота ускорителей была зафиксирована на уровне 100 МГц, процессора 667 МГц. Корректность вычислений проверялась на заданных вручную и случайных 8-битных матрицах, автоматическим сопоставлением результатов с результатами вычислений в NumPy 1.13.3 через выполнение матричного умножения.

В ходе экспериментов было измерено время вывода отдельных сверточных слоев и вывода модели VGG-подобной архитектуры [6]. За основу взята классическая модель VGG16, где последние сверточные слои, содержащие 512 каналов, были заменены на аналогичные с 256 каналами. Для оценки производительности модели выполнялся один предварительный запуск, который не входил в итоговые замеры, после чего производились три запуска, среди которых выбирался лучший.

Производительность ускорителей сравнивалась с реализациями из фреймворка Darknet [7, 8], который был собран с помощью компилятора GCC версии 7.3.0 из исходного кода. Инструменты поддерживают векторизацию вычислений с применением аппаратных векторных инструкций ARM Neon, вычисления выполнялись в 32-битном формате с плавающей запятой на одном ядре. Ограничение одним ядром было установлено для более честного сравнения производительности, поскольку однопоточное исполнение служит базовым уровнем последовательных вычислений и исключает влияние накладных расходов на многопоточность.

Программируемая часть ПЛИС содержит 80 вычислительных блоков DSP, имеется блочная память BRAM общим объемом 2,1 Мбит (60 блоков размером по 36 Кбит каждый), а также 17600 таблиц поиска (LUT). Для высокоскоростного обмена данными между логикой и процессорной системой предусмотрено 4 высокопроизводительных порта HP, максимальная ширина

шины данных каждого из которых составляет 64 бита. Входные данные и веса передавались на ПЛИС и обрабатывались в 8-битном целочисленном формате. Частичные суммы в аккумуляторах систолического массива и выходном буфере накапливались в 32-битном целочисленном формате.

4. Результаты

Из таблицы 1 видно, что в случае слоя с картой 112×112, 64 входными и 64 выходными каналами локальное хранение карт признаков сократило время с 1443,21 до 853,51 мс. В то же время вывод слоя на CPU занял 6208,66 мс. Объем повторно используемых данных здесь достаточен, чтобы компенсировать расходы на адресацию и обслуживание буфера. Для входного слоя с тремя каналами и разрешением 224×224 потоковая схема оказалась быстрее: 125,69 против 140,18 мс. Разница в производительности ускорителей по сравнению с CPU в данном случае оказалась не столь существенной. Реализация Darknet осуществляла инференс за 334,36 мс. Малое число входных каналов затрудняло полную загрузку массива, а дополнительные операции с буфером уже не приводили к суммарному ускорению.

Таблица 1. Параметры сверточных слоев, участвующих в замере производительности

Ширина карты признаков	Входные каналы	Выходные каналы	Размер ядра	Шаг окна	Поток., мс	Буф., мс	Darknet, мс
56	64	64	3	1	361,62	246,72	1410,57
112	64	64	3	1	1443,21	853,51	6208,66
14	32	32	5	1	21,99	9,62	30,51
28	64	64	5	1	215	118,72	744,85
224	3	64	3	2	125,69	140,18	334,36
224	3	64	7	2	403,64	486,32	1685,05
7	16	16	1	1	6,99	0,78	0,14
7	32	32	1	1	13,55	2,77	0,46
28	64	64	1	1	36,37	47,15	36,28
56	64	64	1	1	70,97	108,61	160,34

Для небольших слоев 1×1 объем вычислений мал. Например, при размере карты 7×7 и 16 входных и выходных каналах время составило 0,14 мс для Darknet, 0,78 мс для варианта с буферизацией входных карт признаков и 6,99 мс для потоковой реализации. В этом режиме заметную долю времени занимали накладные расходы на инициализацию ускорителя и передачу данных.

На VGG-подобной модели потоковый ускоритель сократил время вывода относительно Darknet примерно в 2,34 раза, а вариант буферизирующего ускорителя – в 2,75 раза. Преимущество второго варианта согласуется с тем, что значительная часть вычислений модели приходится на слои с большим числом каналов. Далее было измерено общее энергопотребление системы с ускорителями в пересчете на затраченную электроэнергию на единичный вывод VGG-подобной модели. Система с буферизирующей версией ускорителя затратила 2,78 Дж, с потоковой – 2,79 Дж. В свою очередь, система без ускорителей, где вычисления проводились исключительно ресурсами CPU, затратила на вывод 6,35 Дж. Энергозатраты в каждом случае вычислялись как потребляемая мощность системы, умноженная на усредненное время единичного вывода нейронной сети. Так, потребляемая мощность системы с потоковым ускорителем составляла 1,71 Вт, а с буферизирующим – 2 Вт. В обоих случаях 1,54 Вт приходилось на процессорную подсистему, на статическое энергопотребление всего чипа – 0,12 Вт от общего энергопотребления. На саму аппаратную реализацию ускорителей приходилась лишь малая часть общего энергопотребления. В текущей конфигурации обе реализации ускорителей выступали в

роли сопроцессоров, поэтому для них потребляемая мощность рассчитывалась как сумма мощностей процессорной части и аппаратной конфигурации ускорителя в ПЛИС.

5. Заключение

Результаты показывают зависимость выбора аппаратной схемы от параметров слоя. Буферизация полезна там, где множество окон повторно использует входные пиксели. С другой стороны, потоковая передача лучше подходит отдельным слоям с малым числом входных каналов. Для операций с малым количеством вычислений, например, для сверточного слоя с размером ядра 1×1 и размером входных данных 7×7, целесообразнее использовать процессор. Вычислительный эксперимент с VGG-подобной моделью показал общий прирост производительности более чем в 2 раза при общем снижении энергозатрат на разовый инференс модели примерно в 2,3 раза.

Следует отметить, что сравнение проводилось при разной точности вычислений. Darknet выполняет инференс в 32-битном формате с плавающей запятой, а на ПЛИС используется 8-битный целочисленный формат. При переходе к пониженной точности время обработки на процессоре может значительно сократиться при условии поддержки таких вычислений фреймворком и аппаратной платформой. Дальнейшая работа будет посвящена сравнению при одинаковой точности, а также анализу отдельных этапов вычисления слоев на ПЛИС.

Литература

1. Alzubaidi L. et al. Review of deep learning: concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions // Journal of Big Data. 2021. Vol. 8, no. 1. Art. 53.
2. Rashid N., Demirel B. U., Al Faruque M. A. AHAR: Adaptive CNN for energy-efficient human activity recognition in low-power edge devices // IEEE Internet of Things Journal. 2022. Vol. 9, no. 15. P. 13041–13051.
3. Abdelouahab K. et al. Accelerating CNN inference on FPGAs: A survey // arXiv preprint arXiv:1806.01683. 2018.
4. Kung H. T. et al. Systolic arrays (for VLSI) // Sparse Matrix Proceedings 1978. Philadelphia: SIAM, 1979. Vol. 1. P. 256–282.
5. Zhang C. et al. Optimizing FPGA-based accelerator design for deep convolutional neural networks // Proceedings of the 2015 ACM/SIGDA International Symposium on Field-Programmable Gate Arrays. 2015. P. 161–170.
6. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition // arXiv preprint arXiv:1409.1556. 2014.
7. Bochkovskiy A., Wang C. Y., Liao H. Y. M. Yolov4: Optimal speed and accuracy of object detection //arXiv preprint arXiv:2004.10934. – 2020.
8. Darknet. URL: https://github.com/AlexeyAB/darknet (дата обращения: 03.10.2026).

ИТЕРАЦИОННЫЙ ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Привалов Л.Ю.

Уфимский университет науки и техники

Предлагается метод моделирования пониженного порядка для задач, в которых одну и ту же постановку требуется решить многократно при разных значениях параметров. Расчётная область разбивается спектральной кластеризацией на связные зоны, течение рассчитывается исходным конечно-объёмным решателем на укрупнённой сетке из зон, а поля восстанавливаются на исходной сетке проекцией, сохраняющей зональные средние. Для естественной конвекции в микропробирке при малой вариации параметров постановки число неизвестных сокращается почти в 850 раз, расчёт ускоряется примерно в 30 раз, средняя температура воспроизводится с отклонением не более 10%. На примере режима со столкновением потоков показано, где метод не способен разрешить течение.

Ключевые слова: модели пониженного порядка, спектральная кластеризация, зональное агрегирование, естественная конвекция, параметрическое исследование, конвективная полимеразная цепная реакция.

1. Введение

Многие прикладные задачи математического моделирования сводятся к серии расчётов, где одна и та же постановка решается десятки раз при разных значениях управляющих параметров, таких как геометрии, граничных условий, ориентации области. Каждый вариант трёхмерной термогидродинамической задачи стоит часы машинного времени, и прямой перебор вариантов оказывается неприемлемо дорогим.

Показательный пример – конвективная полимеразная цепная реакция (ПЦР) в стандартной микропробирке [1]. При поддержании температуры на определённых границах области, возникающая естественная циркуляция сама переносит реакционную смесь между температурными стадиями реакции, заменяя искусственный цикл нагрева и охлаждения. Выбор рабочей конфигурации пробирки требует сопоставления десятков расчётных постановок.

Методы понижения порядка являются инструментом сведения задачи расчёта к значительно менее трудоёмкой [2], но эмпирический базис, на который проецируется задача, строится по заранее рассчитанным опорным решениям, то есть те самые дорогие расчёты всё равно нужны. Актуальны методы, которые сохраняют исходную конечно-объёмную постановку и не требуют знания решения заранее.

В работе предлагается такой метод моделирования: расчётная область делится на крупные связные зоны, и исходный конечно-объёмный решатель рассчитывает течение на укрупнённой сетке из зон, после чего поля восстанавливаются на исходной сетке. Ниже излагаются постановка вычислительного эксперимента, устройство метода, результаты и границы его применимости, включая пример режима, в котором метод работает хуже.

2. Постановка задачи

Расчётная область – нижняя часть стандартной полипропиленовой микропробирки номинальным объёмом 0,2 мл: усечённый конус высотой L = 7 мм с верхним радиусом R = 2 мм, плавно сопряжённый со сферическим дном радиуса r = 1 мм (рис. 1); объём области около 50 мкл. Пробирка заполнена водой. На стенке выделены два малых участка: горячий на сферическом дне ($T_H = 100\,°C$) и холодный на наклонной стенке верхней части ($T_C = 50\,°C$); остальные стенки теплоизолированы, на всех стенках задано условие прилипания. Вода у дна нагре-

вается и поднимается, у холодного участка остывает и опускается. В объёме устанавливается устойчивая конвективная циркуляция, которая и переносит смесь между температурными стадиями. Расчёты ведутся в приближении Буссинеска при числе Прандтля $Pr = 2{,}4$; область дискретизирована на 307 328 конечных объёмов.

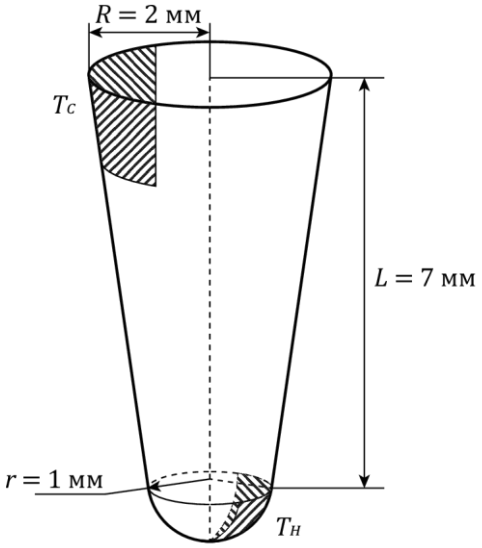


Рис. 1. Расчётная область – нижняя часть микропробирки 0,2 мл (усечённый конус со сферическим дном). Штриховкой показаны горячий (T_H, у дна) и холодный (T_C, на наклонной стенке) участки стенки; остальные стенки теплоизолированы

Единственным варьируемым параметром является угол наклона α оси пробирки к вертикали. Вектор силы тяжести поворачивается на угол α в плоскости, проходящей через центры горячего и холодного участков. Рассмотрены 19 значений от −90° до +90° с шагом 10°; для каждого угла выполнен полномасштабный расчёт t = 60 с (установившийся режим), который играет роль эталона. Подробный анализ режимов течения в такой постановке приведён в [3].

Стоит сразу оговорить одну особенность, которая понадобится далее. При малых наклонах холодный участок оказывается почти над горячим (при $\alpha \approx 14°$), и детальное течение там перестраивается: меняется направление вихря, а в диапазоне углов 0-20° картина течения запутанная и плохо устойчивая.

3. Метод моделирования

Ошибку грубой (редуцированной) модели, скажем, в диффузионном члене обычно оценивают произведением дефекта грубого оператора на грубое поле. Оператор диффузии – это лапласиан, а его энергия на разбиении области – сумма квадратов скачков поля через границы зон. Поэтому разумно требовать, чтобы скачки температуры между соседними зонами были малы, а минимизацией именно таких скачков (нормированный разрез, NCut) занимается спектральная кластеризация графа [4]. Граф смежности ячеек делится на $K = 60$ связных зон, причём веса рёбер учитывают близость температур соседних ячеек и пространственные координаты.

Зона (называемый здесь единичный кластер спектральной кластеризации, чтобы не путать с другими видами разбиений) – очень крупная единица, и кусочно-постоянным по 60 зонам полем не представить даже пристеночный градиент. Поэтому каждая зона дополнительно делится на 6 дополнительных объёмов обычным методом k-средних по координатам центров ячеек. Получается укрупнённая сетка из 360 объёмов вместо 307 328, почти в 850 раз меньше неизвестных.

На укрупнённой сетке течение рассчитывается тем же конечно-объёмным решателем (OpenFOAM [5]), при этом уравнения не модифицируются, меняется только сетка, а граничные условия переносятся на зоны. Возврат поля на исходную сетку формулируется как задача условной минимизации

$$\min_x \frac{1}{2} x^T A x, \qquad \text{при условии } Rx = z,$$

то есть ищется максимально гладкое поле x с заданными зональными средними z (A – графовый лапласиан сетки с регуляризацией, R – оператор объёмно-взвешенного осреднения по зонам); граничные условия выполняются точно. Далее по восстановленному полю строится новое разбиение (данный этап называется перекластеризацией), на нём выполняется новый грубый расчёт и так далее; эмпирически установлено, что трёх итераций достаточно.

Повторное разбиение по собственному решению в известной литературе не производится, а стандартные изложения спектральной кластеризации прямо предостерегают от излишнего доверия к стадии k-средних, на которую приходится отнесение ячеек к зонам [4]. Тем не менее в наших расчётах цикл расчёта действительно обладает адаптивностью, и делает это быстро и почти монотонно. Слабое место действительно в дискретности стадии k-средних, потому как малому изменению поля может отвечать заметно отличающееся разбиение, поэтому разбиение от итерации к итерации продолжает изменяться, а результат слегка зависит от того, на какой итерации остановиться.

4. Результаты

В среднем по 19 углам расчёт с дополнительным разбиением зон воспроизводит среднюю температуру с отклонением 0,96 К, а корреляции температурного и скоростного полей с эталоном равны 0,948 и 0,890. Здесь и далее корреляция – объёмно-взвешенная по ячейкам корреляция Пирсона в сравнении с эталонным полем. Один зональный расчёт занимает около 3 минут против примерно 90 минут полномасштабного. Рис. 2 демонстрирует сравнение по всем углам: вверху – корреляции температуры и скорости, слева внизу – модуль отклонения средней температуры, справа внизу – рост корреляций по трём итерациям цикла.

Дополнительное разбиение приводит к заметно лучшему результату по всем кривым. Без него средние корреляции падают до 0,871 и 0,743. Это ожидаемо: 60 кусочно-постоянных зон не могут представить пристеночные градиенты и резкие перепады, а 360 объёмов справляются с этой задачей лучше.

На всех кривых видна особая точка – угол $\alpha = 20°$, где согласие с эталоном резко ухудшается (корреляция температуры падает до 0,4-0,5). Это как раз тот диапазон малых наклонов, где перестраивается само детальное течение. При $\alpha = 20°$ эталонное решение представляет собой столкновение холодного потока, спускающегося от верхнего участка стенки, с горячим потоком от дна. Грубая же модель устойчиво сходится к более простому одновихревому режиму. Базового разрешения в 60 зон здесь недостаточно, однако и простое удвоение числа зон (до 120) положения не меняет: разбиение, построенное по полю прежнего режима, не может представить новый. Как выходить на такие режимы автоматически, пока неясно, и этот вопрос оставлен открытым; для настоящей работы точка $\alpha = 20°$ ценна как честный пример, где метод плохо справляется. При этом соседний сложный режим $\alpha = 30°$, тоже содержащий встречные потоки, перекластеризация разрешает куда лучше, так что граница применимости проходит не по сложности течения как таковой, а по смене его режимного состояния.

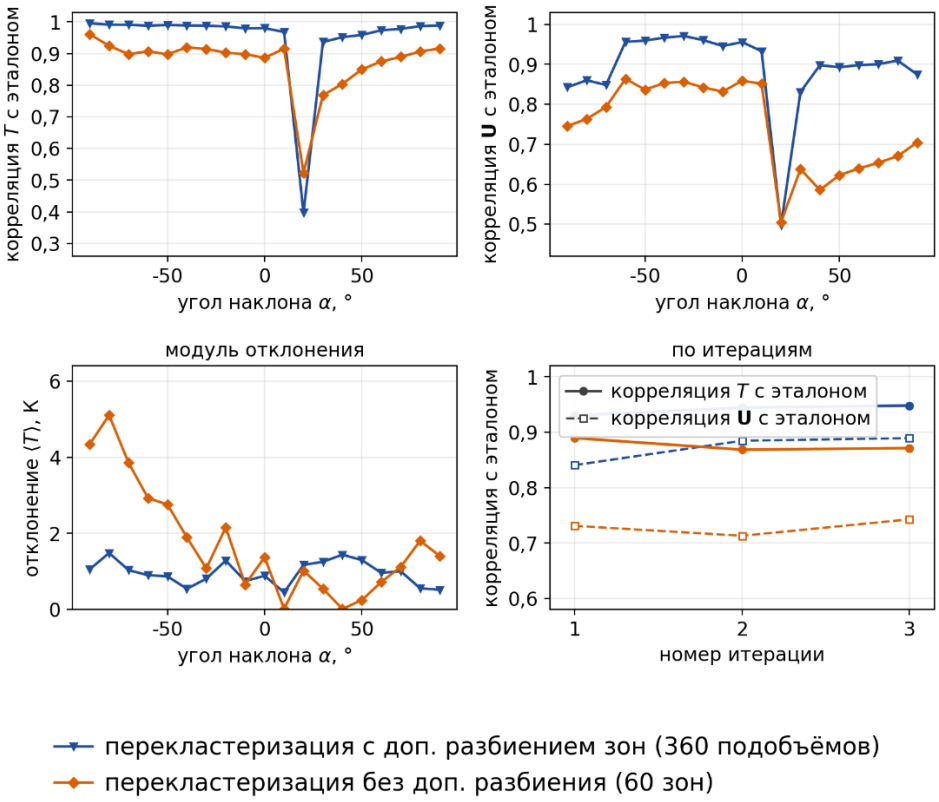


Рис. 2. Сравнение зональных расчётов с эталонными по 19 углам наклона: корреляция температурного поля с эталоном (слева вверху), корреляция поля скорости (справа вверху), модуль отклонения средней температуры (слева внизу) и рост корреляций по итерациям цикла (справа внизу). Синяя линия (с треугольными метками) – расчёт с дополнительным разбиением зон (360 объёмов), оранжевая (с ромбическими метками) – без него (60 зон)

5. Выводы

Предложен итерационный зональный метод моделирования пониженного порядка, при котором область разбивается спектральной кластеризацией на связные зоны, и течение рассчитывается исходным конечно-объёмным решателем на укрупнённой сетке, а поля восстанавливаются проекцией с сохранением зональных средних. Метод не требует опорных решений и не модифицирует уравнения задачи. В исследовании конвекции в микропробирке при 19 углах наклона число неизвестных сокращено почти в 850 раз при ускорении примерно в 30 раз; средняя температура воспроизводится с отклонением около 1 К, форма полей – с корреляциями 0,9-0,95. Итогом является технология моделирования, позволяющая решать задачи параметрического скрининга установившихся термоконвективных режимов – в случаях, когда требуются интегральные характеристики и качественная форма полей и когда структура течения внутри семейства параметров не меняет режимного состояния.

Литература

1. Krishnan M., Ugaz V.M., Burns M.A. PCR in a Rayleigh–Benard convection cell // Science. 2002. Vol. 298. N. 5594. P. 793.
2. Benner P., Gugercin S., Willcox K. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems // SIAM Review. 2015. Vol. 57. N. 4. P. 483–531.
3. Привалов Л.Ю. Зональная марковская модель конвективного переноса в задаче ПЦР в микропробирке // Вычислительные методы и программирование. 2026. Т. 27. № 2. С. 261–273. doi: 10.26089/NumMet.v27r217.

4. Von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering // Statistics and Computing. 2007. Vol. 17. N. 4. P. 395–416.
5. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // Computers in Physics. 1998. Vol. 12. N. 6. P. 620–631.

МЕТОДОЛОГИЯ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛАТФОРМЫ HADOOP

П.А. Рузанов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается один из подходов к обработке больших данных с использованием парадигмы MapReduce на платформе Hadoop. Отмечается, что использование подобной парадигмы позволить распределить вычислительную нагрузку по нескольким узлам и сократить время обработки данных.

Ключевые слова: большие данные, MapReduce, Hadoop.

В настоящее время все большее количество организаций сталкиваются с необходимостью обработки слабоструктурированных данных большого объёма. Подобные данные общепринято называть большими данными. Однозначного определения этого термина не существует, однако большинство экспертов трактует понятие «большие данные» как набор данных, которые невозможно обработать, используя традиционные информационные технологии (такие как классические реляционные системы управления баз данных [1] или табличный процессор Microsoft Excel) и в рамках одной вычислительной системы. К большим данным можно отнести, например, сведения о транзакциях клиентов в финансовом секторе, сообщения пользователей в социальных сетях, сигналы с датчиков ядерного реактора, оцифрованная литература.

В связи с этим возникла необходимость в разработке принципиально иных технологий, ориентированных на работу именно с большими данными. Некоторые примеры подобных подходов можно найти в работах [2,3]. При этом следует учесть следующие особенности[1], характерные именно для больших данных (так называемое правило «3V»):

- Volume – объём данных действительно большой, конкретные цифры могут разниться, однако большинство исследователей ориентируются на границы от 100 Гбайт до нескольких терабайт;
- Variety – разнообразные, слабо структурированные и разнородные (в отличие от тех данных, которые обрабатываются традиционными реляционными СУБД) данные, имеющие различные внутренние форматы;
- Velocity – скорость поступления данных больше, чем скорость их обработки, следовательно, их анализ требует работы в режиме реального времени.

При обработке больших данных в настоящее время преимущественно используется концепция горизонтального масштабирования. Под этим термином принято понимать разбиение объёмов данных на более мелкие структурные компоненты и разнесение их по отдельным физическим машинам- узлам или нодам (или их группам), или увеличение количества серверов, параллельно выполняющих одну и ту же задачу анализа данных. При этом система нодов, объединённых в кластер, должна быть сравнительно легко расширяемой.

Следует отметить, что технологии и инструменты, основанные на этой концепции, постоянно совершенствуются. В настоящей работе проводится анализ достаточно широко распространенной парадигмы, носящей название MapReduce. Эта парадигма представляет собой одну из моделей распределенных вычислений в кластерах, которая разработана компанией Google. В рамках этой модели данные могут обрабатываться параллельно, при этом задачи распределяются между множеством узлов по определенному достаточно адаптивному алгоритму, невидимому для прикладного программиста.

В общем случае внутри этой парадигмы принято выделить 2 фазы.

Первая фаза (Map) заключается в первичной обработке данных, при этом компьютер, называемый главным узлом (так называемый «master node»), получает от приложения или другого источника, например, от тензодатчиков, входные данные, разделяет их на части вида «ключ-

[1] В настоящее время эти особенности дополняются до уровня «5V»

значение» и передает другим рабочим станциям (рабочим узлам – «worker node») для предварительной обработки.

Вторая фаза (Reduce) заключается в агрегировании обработанных данных, которое состоит в следующем: главный узел получает ответы рабочих узлов и формирует результат. Схематично этот процесс можно представить следующим образом:

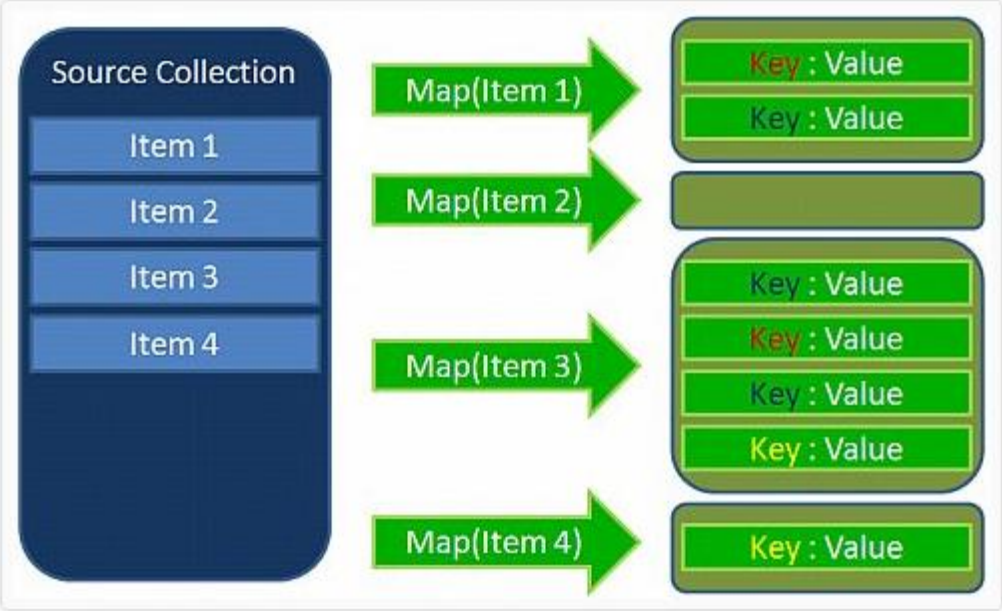


Рис.1. Применение Map-функции к каждому элементу исходного набора данных

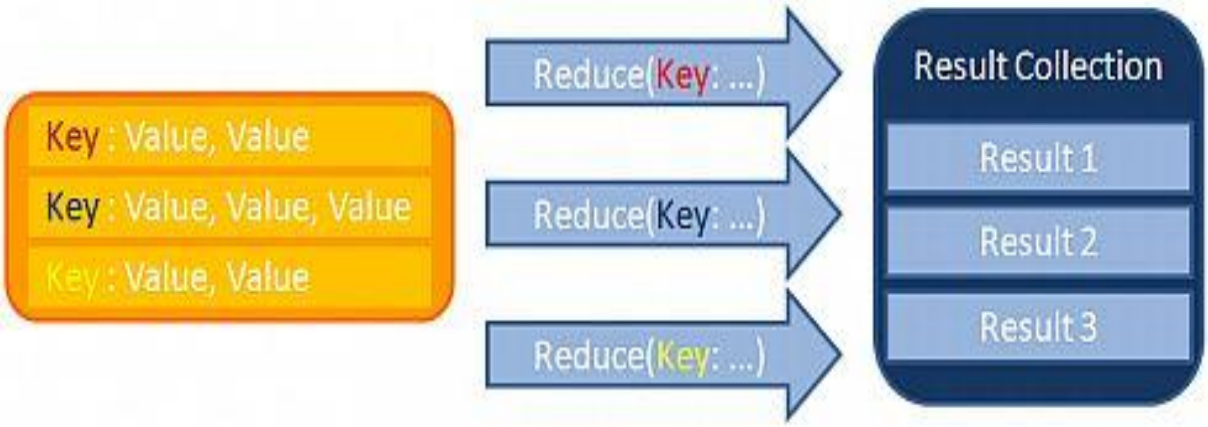


Рис.2. Реализация функции Reduce, возвращающей новый экземпляр объекта

В качестве конкретной парадигмы горизонтального масштабирования, использующей MapReduce, рассмотрим технологию шардинга. В общем случае под шардингом понимается разделение большого объёма данных на несколько диапазонов по некоторому ключу (каждый такой диапазон называется чанком) и размещение для дальнейшей обработки чанков по нескольким серверам, называемых шардами. Для каждого чанка на шарде определяется некоторый ключ шардинга. Как правило, в качестве ключа используется уникальный идентификатор или хэш.

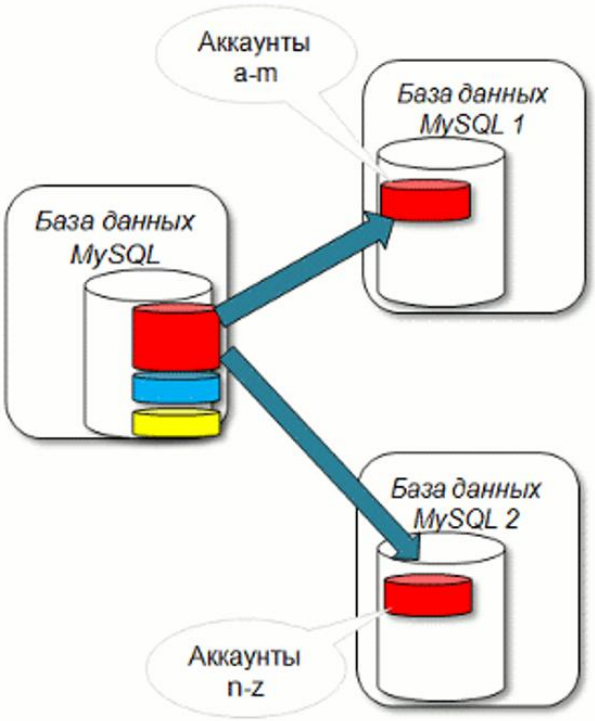


Рис.3. Концепция горизонтального шардинга

Основной целью использования шардинга является балансировка нагрузки при выполнении базовых операций[1] с данными между шардами, входящими в кластер, а также повышение отказоустойчивости всей информационной системы за счет дополнительной репликации.

В настоящее время для обработки неструктурированных данных большого объёма в основном применяются NoSQL- системы управления базами данных, которые отходят от классической реляционной теории Э.Ф.Кодда, но взамен этого предлагают эффективные инструменты именно распределенной обработки данных, такие как репликация и шардирование. Одной из таких СУБД является MongoDB- документо-ориентированная СУБД с открытым кодом, написанным на языке JavaScript. Клиентское приложение использует MongoDB в основном как хранилище данных.

Рассмотрим подробнее, как реализуется шардирование внутри MongoDB. Все общение между шардами, входящими в кластер, и клиентским приложением осуществляется с помощью роутера или сервера маршрутизации. В качестве роутера используется shell- процесс mongos.exe. Сервер маршрутизации хранит сведения о размещении документов в тех или иных шардах. Кроме того, в состав кластера должен входить сервер конфигурации, обслуживающий шарды. В качестве такого сервера используется процесс mongod.exe. При этом каждый шард может обслуживаться несколькими mongod- процессами. Объединение нескольких запущенных mongod- процессов обычно называется репликой, которые хранят копии одного и того же набора чанков. Избыточная на первый взгляд репликация повышает надежность системы в целом, хотя и требует дополнительных затрат.

Механизм шардирования представлен ниже в виде функции run_js, реализованной внутри контейнера, созданного с использованием docker.

```
run_js() {
  local service="$1"
  local js="$2"
  local port
  case "$service" in
    configsvr) port=27019 ;;
```

[1] В основном, это операции чтения-записи

```
    shard1|shard2) port=27018 ;;
    mongos) port=27017 ;;
    *) echo "Unknown service: $service" >&2; exit 1 ;;
  esac
  docker compose exec -T "$service" mongosh --quiet --port "$port" --eval
"$js"
}
```

Рис.4.Листинг скрипта шардирования

В рамках этой функции каждый шард прослушивается по нескольким портам. Традиционным для процессов MongoDB служит порт с адресом 27017.

Создание функций, выполняющие указанные выше Map и Reduce- операции, а также их запуск на шардах, реализовано в приведенном ниже фрагменте кода:

```
var map = function() { emit(this.brand, {count: 1}); };
var reduce = function(key, values) {
  var total = 0;
  values.forEach(function(v) { total += v.count; });
  return {count: total};
};
var inlineRes = db.phones.mapReduce(map, reduce, {out: {inline: 1}});
print("Inline MapReduce results:");
print("brand       | count");
print("------------+------");
inlineRes.results
  .sort(function(a,b){ return a._id.localeCompare(b._id); })
  .forEach(function(r){
    var brand = (r._id + "            ").slice(0, 11);
    var cnt = String(r.value.count);
    print(brand + " | " + cnt);
  });
```

Рис.5.Листинг скрипта реализации Map-Reduce операций

В настоящее время существует множество программных реализаций парадигмы MapReduce. Одним из наиболее широко используемых проектных решений является платформа Hadoop MapReduce, представляющая собой программный продукт с открытым кодом на языке высокого уровня Java. Эта платформа, обращение к которой происходит из клиентского приложения, является некоторой программной моделью (так называемый фреймворк) выполнения распределенных вычислений с большими объемами данных в рамках парадигмы MapReduce. Конструктивно модель реализована в виде набора Java-классов и исполняемых утилит для создания и обработки заданий на параллельную обработку.

Базовые преимущества платформы Hadoop MapReduce состоят в следующем:

- обработка/вычисление больших объемов данных;
- горизонтальная масштабируемость;
- автоматическое распределение задач по рабочим узлам;
- устойчивая работа, которая характеризуется тем, что при выходе из строя одного из рабочих нодов его задания автоматически перераспределяются на остальные узлы;
- автоматическая обработка отказов выполнения заданий.

Если говорить об использовании платформы Hadoop в рамках клиентских приложений, то следует отметить следующие особенности. Разработчику приложения, использующего модель Hadoop MapReduce, необходимо реализовать базовый обработчик[1], который на каждом вычислительном узле кластера обеспечит преобразование исходных данных в промежуточный набор пар вида «ключ/значение» (класс, реализующий интерфейс Mapper), и обработчик, преобразу-

[1] Например, в виде функции или метода

ющий промежуточный набор пар в окончательный, агрегированный набор (класс, реализующий интерфейс Reducer). Все остальные фазы выполняются программной моделью MapReduce без дополнительного участия со стороны разработчика.

Рассмотрим более подробно архитектуру платформы Hadoop. Она предназначена для построения распределенных приложений для параллельной обработки данных в рамках вычислительной парадигмы MapReduce. Hadoop считается одним из основополагающих решений в области «больших данных» (big data), вокруг нее выстраиваются многие проекты и парадигмы, иногда ее называют экосистемой в том смысле, что она служит своего рода «комфортной средой» для разработки технологичных информационных систем обработки больших данных.

Конструктивно платформа состоит из четырёх базовых модулей:

- Hadoop Common- модуль, включающий в себя утилиты и библиотеки, представляющие собой интерфейсы для интеграции с другими модулями;
- внутренняя файловая система HDFS;
- YARN- модуль, который непосредственно управляет кластером, отслеживает состояние нодов кластера и по сути, управляет механизмом параллельной обработки данных;
- платформа MapReduce, которая непосредственно реализует механизм выполнения распределённых вычислений.

Модуль Hadoop Common состоит в основном из библиотек управления файловыми системами и сценариев управления распределённой обработкой.

Реализация версии HDFS предполагает создание так называемого центрального узла имён (NameNode), хранящего собственно данные, характеризующие файловую систему, и информацию о распределении блоков, и серии узлов данных (DataNode), непосредственно хранящих блоки файлов. Узел имён отвечает за открытие и закрытие файлов, манипуляции с каталогами, а узлы данных реализуют Read/Write- операции. Узлы данных обрабатывают все запросы, которые идут от узла имён.

HDFS может использоваться не только для запуска MapReduce-заданий, но и как распределённая файловая система общего назначения.

Модуль YARN (Yet Another Resource Negotiator) появился в версии 2.0 Hadoop, он отвечает за управление ресурсами кластеров и планирование заданий. Конструктивно модуль представляет собой набор системных программ и является интерфейсом между приложениями и аппаратной частью кластера. Основой модуля YARN служит менеджер ресурсов (ResourceManager), который активизирует планировщик ресурсов и менеджер приложений. Под управлением YARN могут работать любые распределённые приложения, поддерживающие соответствующие программные интерфейсы. Каждое приложение начинает свою работу в YARN в виде отдельного задания (job).

Разработчику распределённого приложения необходимо реализовать специальный класс управления приложением (ApplicationMaster). Это своего рода временный процесс, который координирует весь цикл работы одного процесса и реализуется в виде JAR-файла. Тогда планировщик ресурсов отвечает за создание экземпляров класса управления приложением и взаимодействие с ним через соответствующий сетевой протокол.

Классическим примером использования парадигмы MapReduce с использованием движка Hadoop может служить задача подсчёта количества вхождений каждого слова в достаточно большом объёме документов. При этом в MapReduce каждый документ будет отдельной единицей для задачи. Следует учесть, что можно использовать только пользовательские функции. Класс Mapper разделяет каждую строку документа на отдельные лексемы (слова) со значением 1. Затем эти пары «ключ-значение» сортируются в алфавитном порядке. Класс Reducer осуществляет группировку всех ключей, а значения для одинаковых ключей суммируются. Таким образом, происходит агрегирование ключей, сгенерированных на этапе Mapper. Весь алгоритм решения этой задачи реализован внутри платформы Hadoop в виде jar-файла WordCount.jar. Отметим, что Jar-файл (Java Archive) представляет собой архивный файл, который содержит в себе код, написанный на языке Java, библиотеки и системные ресурсы, которые необходимы для того, чтобы приложение могло выполняться на любой платформе, поддерживающей Java.

Для работы с платформой Hadoop необходимо установить любую реализацию платформы, поддерживающую разработку приложений на Java, например, OpenJDK 8 версии.

Литература

1. Рузанов П.А. Методология разработки клиентских приложений, использующих технологии баз данных. - Актуальные проблемы социально-экономической статистики и цифровизации экономических расчетов. Сборник научных статей III Всероссийской научно-практической конференции. Нижний Новгород, 2024. С. 90-96.
2. Андреас Вайгенд BIG DATA. Вся технология в одной книге: Эксмо, 2018 г.
3. Ын А., Су К. Теоретический минимум по Big Data. Всё что нужно знать о больших данных. Издательство: Питер, 2019 г.
4. Макшанов А.В., Журавлев А.Е., Тындыкарь Л.Н. Большие данные. Big Data. Издательство: Лань, 2021 г.
5. Радченко И.А., Николаев И.Н. Технологии и инфраструктура BIG DATA. СПб.- Университет ИТМО, 2018. – 52 с.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

П.А. Рузанов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматриваются подходы к решению задач комбинаторной оптимизации и основные алгоритмы их решения. На примере классической задачи о рюкзаке на языке программирования высокого уровня C# были реализованы алгоритмы ее решения, которые относятся к двум различным классам. В качестве точного метода был реализован метод полного перебора, как пример эвристического алгоритма рассмотрен один из вариантов жадного алгоритма. Проведен анализ результатов, полученных при решении тестовой задачи.

Ключевые слова: задача о рюкзаке, метод полного перебора, жадный алгоритм.

К задачам комбинаторной оптимизации принято относить такие проблемы поиска оптимального решения, в которых множество допустимых решений имеет дискретный характер, то есть управляющие переменные представляют собой, например, булевский или целочисленный вектор. Цель задач, относящихся к этому классу, такая же, как и для большинства задач математической оптимизации- максимизировать или минимизировать значение некоторого целевого критерия при заданных ограничениях, при этом как правило, и целевая функция, и ограничения являются линейными. В зависимости от формулировки можно выделить наиболее характерные для этого класса задачи. К их числу относятся широко известные задача о коммивояжере (поиск наиболее короткого по протяженности маршрута, проходящего через заданные населённые пункты только один раз с последующим возвратом в начальный пункт), различного рода задачи о назначениях, составления планов и расписаний, а также задача о рюкзаке. Алгоритмы решения именно этой задачи и рассматриваются в работе.

Следует отметить, что задаче о рюкзаке (Knapsack Problem) можно дать множество экономических интерпретаций. Приведем некоторые из них.

1. Проблема распределения бюджетных средств. Задача о рюкзаке может интерпретироваться как распределение ограниченных бюджетных средств между различными проектами или направлениями. В качестве ресурса может выступать доступный бюджет, а каждый проект требует определённого количества бюджетных средств. Тогда задача состоит в том, чтобы выбрать проекты так, чтобы суммарные затраты на их реализацию не превышали лимит, а общая эффективность (мерой эффективности может служить прибыль или чистая приведённая стоимость) была максимальной.

2. Формирование портфеля инвестиций. Математическая модель задачи о рюкзаке может служить основой для оптимизации инвестиционного портфеля предприятия. В этом случае целевым критерием может быть максимальная величина чистой приведённой стоимости всех проектов, добавленных в портфель. Ограничения состоят в том, что сумма выделенных на инвестирование средств не должна превышать заранее установленный бюджет (лимит капитальных вложений).

3. Оптимизация загрузки ресурсов. Задача рассматривается как аппарат для решения задач оптимальной загрузки различных транспортных средств. Тогда в математической модели можно оперировать переменными, которые соответствуют весу, объёму и другим характеристикам ресурсов.

Приведем формулировку задачи о рюкзаке в классической постановке. Пусть имеется набор предметов, каждый из которых характеризуется двумя признаками- массой и ценностью (например, в денежном эквиваленте). Также есть рюкзак с ограниченной грузоподъемностью. Тогда задача формулируется следующим образом: необходимо собрать рюкзак, максимизировав суммарную ценность предметов, находящихся в нем, и при этом суммарная масса всех предметов, вошедших в рюкзак, не должна превышать его грузоподъёмности.

Математическая формулировка задачи. Пусть имеется n грузов, для каждого груза с номером i заданы его масса m_i и ценность c_i, i=1, 2,…n. Известна максимальная грузоподъёмность рюкзака V.

Введем для каждого предмета некоторую характеристику (она и будет служить управляемым параметром): x_i=0, если предмет с номером i не входит в рюкзак, 1, если предмет с номером i входит в рюкзак.

Тогда математическая модель задачи о рюкзаке выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max$$

При заданном ограничении по грузоподъёмности:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \leq V$$

Таким образом, решение задачи является по природе своей дискретным. Это обуславливает некоторую особенность алгоритмов, применяемых для решения задачи о рюкзаке. Следует отметить, что методы решения задач комбинаторной оптимизации разделяются на два класса:

Точные алгоритмы – применяются, когда важно найти точное значение целевого критерия. К ним можно отнести следующие методы:

Метод ветвей и границ. Он заключается в полном систематическом переборе подмножеств решений (решением будет булевский вектор, состоящий из нулей и единиц) с отсечением тех векторов, которые заведомо не могут содержать лучшего результата.

Аппарат динамического программирования. При этом происходит разбиение задачи большей размерности на более мелкие перекрывающиеся подзадачи с сохранением промежуточных результатов для последующего использования.

Линейное целочисленное программирование. В этом случае математическая модель задачи описывается системой линейных неравенств, где переменные должны быть целыми числами.

Приближённые методы (эвристические), они применяются в том случае, когда размерность задачи относительно велика (в данном случае под размерностью понимается значение n), а требуется лишь приближенное решение задачи вместо точного.

На практике известны несколько десятков базовых эвристических методов, применяемых для решения задач дискретной комбинаторной оптимизации, которые обладают рядом особенностей и на практике приводят к получению решений различного качества с различными затратами вычислительного времени

Кроме этого для решения комбинаторных задач, и в частности, задачи о рюкзаке, можно использовать аппарат искусственного интеллекта (см.[6] и имеющиеся там ссылки).

В работе [1] отмечается что задача о рюкзаке относится к классу так называемых NP- полных задач. Задача относится к классу NP, если ее решение, полученное некоторым алгоритмом, может быть проверено с полиномиальной временной сложностью. Иными словами, для решения задачи о рюкзаке не существует какого-либо алгоритма сложности по времени уровня O(nk), который бы решал ее за приемлемое время, где n- размерность задачи. Исследователи полагают, что NP - полные задачи трудноразрешимы, однако если хотя бы для одной из них удастся найти полиномиальный алгоритм, то такой алгоритм будет существовать для любой задачи из этого класса.

В настоящей работе будут рассмотрены два алгоритма решения задачи о рюкзаке и их программная реализация на языке программирования высокого уровня C#. Для класса точных алгоритмов будет рассмотрен метод полного перебора, а для класса эвристических алгоритмов-так называемый жадный алгоритм.

Смысл метода полного перебора отчасти ясен из его названия. Поскольку управляемыми параметрами будут бинарные векторы, состоящие из нулей и единиц, то необходимо перебрать все возможные комбинации этих векторов, для каждой комбинации вычислить значения целевого критерия и из всех значений выбрать максимальное. Вектор, соответствующий этому значению, и будет оптимальным решением задачи.

Оценим трудоёмкость метода полного перебора. Пусть имеется n предметов, и каждый из этих предметов можно либо положить в рюкзак, либо нет. Таким образом, каждый бинарный

вектор имеет размерность n, и каждый i-й компонент вектора может принять 2 значения- 0 или 1. Таким образом, всего необходимо перебрать 2^n бинарных векторов, то есть временная сложность алгоритма составит $O(2^n)$, что является достаточно большой величиной. Следовательно, метод полного перебора приемлем для решения только задач малой размерности.

Еще одной проблемой является автоматическая генерация полного множества бинарных векторов. Следует отметить, что каждый вариант бинарного вектора представляет собой преобразованную в массив строковую запись двоичного числа в диапазоне от 0 до 2n-1 (при необходимости к строке, представляющей собой двоичную запись числа, слева добавляется нужное количество нулей, так, чтобы длина строки стала равной n.

```
static byte[] binmas(int n, int v)
{
  string s = "";
  byte[] m = new byte[v];
  while (n > 0)
  {
      s = (n % 2).ToString() + s;
      n /= 2;
  }
  while (s.Length < v) s = "0" + s;
  for (int i = 0; i < s.Length; i++)
    if (s[i].Equals('0')) m[i] = 0;
    else m[i] = 1;
  return m;
}
```

Рис.1.Листинг процедуры формирования бинарного вектора

Параметрами метода binmas будут целое число k, которое нужно преобразовать в двоичную форму, и размерность пространства решений v. Выходным параметром будет бинарный вектор m.

Решение задачи о рюкзаке методом полного перебора было протестировано на следующем примере. Было выбрано n=5 предметов. Веса и ценности предметов приведены в таблице. При этом максимальная вместимость рюкзака была принята равной 100 кг.

Таблица 1. Характеристики предметов

Номер предмета	Вес предмета, кг	Ценность предмета,у.е.
1	59	60
2	22	6
3	56	88
4	15	6
5	34	29

Теперь рассмотрим один из эвристических алгоритмов решения задачи о рюкзаке под названием жадный алгоритм. В целом этот класс алгоритмов можно охарактеризовать следующим образом. Жадные алгоритмы – это подход к решению задач оптимизации, делается оптимальный (с точки зрения некоторого выбранного критерия) выбор на каждом шаге, полагая, что это приведёт к оптимальному решению в конце всех итераций. Следует отметить, что в общем случае жадный алгоритм не всегда приводит к оптимальному решению, однако имеет меньшую сложность по времени. В противном случае был бы реализован полиномиальный алгоритм для NP-сложной задачи. В работе [3] утверждается, что большинство жадных алгоритмов имеют сложность по времени *O(n log n).*

Для задачи о рюкзаке существуют несколько подходов к реализации жадных алгоритмов. Один из них состоит в выборе предметов в убывающем порядке по их весам; однако может возникнуть ситуация, при которой более тяжелые предметы могут не быть наиболее ценными в

множестве. Другая стратегия состоит в выборе предметов в порядке уменьшения их стоимости, однако он не гарантирует эффективное использование емкости рюкзака. В связи с этим необходимо реализовать такую стратегию жадного алгоритма, которая бы принимала во внимание и вес, и стоимость предметов. Для этого вычисляются удельные стоимости каждого предмета как отношение его стоимости к весу и предметы сортируются в порядке убывания их удельных стоимостей. Затем просматривается отсортированный список до тех пор, пока в нем не останется ни одного элемента, и если текущий предмет помещается (с точки зрения грузоподъёмности) в рюкзак, то помещаем его туда, иначе переходим к следующему элементу.

```
int n = 5;
//Массив весов
int[] a = { 59, 22, 56, 15, 34 };
//Массив стоимостей
int[] c = { 60, 6, 88, 6, 29 };
byte[] mas = new byte[n];
byte[] opt = new byte[n];
int maxplace = 100;
int max = 0;
//Перебор комбинаций
for (int i = 0; i < Math.Pow(2, n); i++)
{
  mas = binmas(i, n);
  int ves = 0;
  for (int j = 0; j < n; j++) ves += a[j] * mas[j];
    if (ves <= maxplace)
    {
      int pol = 0;
      for (int j = 0; j < n; j++) pol += c[j] * mas[j];
      if (pol > max) { max = pol; opt = mas; }
    }
}
for (int i = 0; i < opt.Length; i++)
  if (opt[i] != 0)
    Console.WriteLine(
      "Нужно взять вещь с номером " + (i + 1));
    Console.WriteLine(
      "Максимальная ценность взятых вещей составит " + max);
```

Рис.2.Листинг процедуры реализации метода полного перебора

В приведенном программном коде для реализации сортировки по убыванию удельных стоимостей использовался метод сортировки «пузырьком». Для удобства реализации жадного алгоритма была создана структура place с двумя полями weight и cost.

При сравнении полученных результатов с решением, полученным методом полного перебора (которое является оптимальным) было отмечено, что жадный алгоритм для конкретного набора тестовых данных не дает оптимального решения. Действительно, максимально возможная в условиях рассматриваемой задачи суммарная ценность рюкзака составляет 148 единиц, в то время как жадный алгоритм предлагает такой план загрузки предметов, при котором максимальная ценность всех предметов, положенных в рюкзак, составит лишь 122 единицы. Это можно объяснить тем, что алгоритм реализует «сиюминутную» стратегию, согласно которой выбираются предметы с высокими удельными стоимостями, но не оценивается, как этот выбор повлияет на возможность поместить более ценные предметы в будущем.

```
List<place> p = new List<place>();
p.Add(new place() { weight = 59, cost = 60 });
p.Add(new place() { weight = 22, cost = 6 });
p.Add(new place() { weight = 56, cost = 88 });
p.Add(new place() { weight = 15, cost = 6 });
p.Add(new place() { weight = 34, cost = 29 });
bool flag;int k = 1;
do
{
  flag = false;
  for (int i = p.Count - 1; i >= k; i--)
  {
    if (p[i].cost / (double)p[i].weight >
        p[i - 1].cost / (double)p[i - 1].weight)
    {
      place buf = p[i]; p[i] = p[i - 1]; p[i - 1] = buf;
      flag = true;
    }
  }
  k++;
} while (flag == true);
//Закладываем вещи в рюкзак по эффективной стоимости 1 кг веса
int costs = 0;//стоимость вещей в рюкзаке
for (int i=0;i<p.Count;i++)
{
  if (p[i].weight<maxplace)
  {
    costs += p[i].cost;
    maxplace -= p[i].weight;
    Console.WriteLine("Предмет весом " + p[i].weight
      + " и стоимостью " + p[i].cost + " добавлен");
  }
}
Console.WriteLine(
  "Максимальная ценность всех взятых вещей составит " + costs);
```

Рис.3.Листинг процедуры реализации жадного алгоритма

Литература

1. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных. – М.Мир, 1989. – 360 с.
2. Визгунов Н.П. Динамическое программирование в экономических задачах с применени-ем системы MATLAB. – Н.Новгород, ННГУ, 2006. – 48 с.
3. Кузюрин Н.Н. Сложность комбинаторных алгоритмов. Курс лекций. 2015. – 79 с.
4. Гери М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1992 – 416 с.
5. Окулов С.М - Программирование в алгоритмах. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 341 с.
6. Трифонов Ю.В., Шестерикова Н.В., Рузанов П.А. Развитие интеллектуальных инфор-мационно-коммуникационных технологий в экономических и управленческих систе-мах // Экономика и предпринимательство. 2022. № 1. С. 1401-1404.

ОПТИМИЗИРОВАННЫЕ СПЛАЙН-ПРОЦЕДУРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

С.В. Русаков, И.И. Хейфец

Пермский государственный национальный исследовательский университет

В работе предложен подход, позволяющий существенно уменьшить погрешность численного дифференцирования экспериментальных данных. В качестве математического аппарата используются параболические сплайны приближающие в среднем и сплайны с дополнительными узлами. На основе решения экстремальных задач получены алгоритмы построения сглаживающих сплайнов. Для нахождения весовых коэффициентов сглаживания поставленная оптимизационная задача нелинейного программирования. Приводятся результаты тестовых расчётов, демонстрирующие работоспособность предлагаемой методики.

Ключевые слова: численное дифференцирование, сглаживание, экстремальные свойства сплайнов, параболические сплайны, нелинейное программирование.

Введение

Обработка экспериментальных данных в виде функциональной зависимости одна из самых распространенных задач в самых различных приложениях. При этом не всегда удается выявить регрессионную зависимость, а интерполяция не подходит в силу наличия погрешности. Ситуация особенно усложняется, если требуется выполнять процедуру численного дифференцирования, которая в данном случае является вычислительно неустойчивой. Когда в данных нет явных выбросов и заранее известна погрешность измерений подобные задачи решаются с использованием различных процедур предварительного сглаживания.

Одним из универсальных и часто используемых аппаратом сглаживания являются сплайны. В этом случае используются их экстремальные свойства, для которых получены фундаментальные результаты в виде теорем.

Пусть на сетке $\Omega_N(x;a,b)=\{x_i\}_{i=0,\dots N}=\{a=x_0<x_1<\dots<x_N=b\}$ значения некоторой функции *z(x)* заданы с погрешность: $z_i^0=z(x_i)+\Delta_i,\quad i=0,\dots,N.$ В монографии [1] вводится пространство функций $W_2[a,b]$, и приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Среди всех функций $f(x)\in W_2[a,b]$ минимум функционалу

$$G_2(f)=\lambda\int_a^b|f''(x)|^2dx+\sum_{i=0}^N\rho_i^{-1}\left(f(x_i)-z_i^0\right)^2 \tag{0.1}$$

для заданного набора весовых коэффициентов $\rho_i>0,\ i=0,\dots,N$ и $\lambda>0$, обеспечивает *кубический сплайн дефекта 1*: $S_{3,1}(x;f)$. Во всех случаях функция дающая минимум единственна. По сути, в этом случае метод наименьших квадратов дополняется регуляризатором в виде интеграла от квадрата модуля второй производной. В свою очередь, для сплайнов первого порядка справедлива аналогичная теорема.

Теорема 2. Среди всех функций $f(x)\in W_1[a,b]$ минимум функционалу

$$G_1(f)=\lambda\int_a^b|f'(x)|^2dx+\sum_{i=0}^N\rho_i^{-1}\left(f(x_i)-z_i^0\right)^2 \tag{0.2}$$

для заданного набора весовых коэффициентов $\rho_i>0,\ i=0,\dots,N$ и $\lambda>0$, обеспечивает *сплайн первого порядка дефекта 1:* $S_{1,1}(x;f)$. Во всех случаях функция дающая минимум единственна.

На практике существенной проблемой, влияющей на результат сглаживания, является выбор коэффициентов сглаживания ρ_i. В работе авторов [2] предложен подход, позволяющий формализовать и оптимизировать эту процедуру для сплайна первого порядка. В настоящей работе рассматривается вариант реализации этого подхода для сплайнов второго порядка.

1. Интерполяционные параболические сплайны

Рассмотрим два вида интерполяционных параболических сплайнов: сплайн приближающий в среднем и сплайн с дополнительными узлами. Пусть на сетке $\Omega_N(x;a,b]$ заданы значения интегральных средних функции *z(x)* и её значения на концах отрезка:

$$\tilde{z}_{i+1/1} = \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} z(x)dx, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad z_0 = z(x_0),\ z_N = z(x_N). \tag{1.1}$$

Сплайном *второго порядка дефекта 1 приближающим в среднем* назовем кусочно-полиномиальную функцию, являющуюся первой производной от кубического сплайна дефекта 1, построенного для первообразной от *z(x):*

$$\tilde{S}_{2,1}(z;x) = S'_{3,1}(Z;x), \quad z(x) = \int Z(x)dx. \tag{1.2}$$

В этом случае можно воспользоваться полученными ранее результатами Введя обозначения $z_i = \tilde{S}_{2,1}(z;x_i-0) = \tilde{S}_{2,1}(z;x_i+0), \quad i = 1,\ldots,N-1,$ можно записать сплайн в виде

$$\tilde{S}_{2,1}(z;x) = \varphi_0(\tau)z_i + \varphi_1(\tau)z_{i+1} + \varphi_2(\tau)\tilde{z}_{i+1/2}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \tau = \frac{x-x_i}{h_i}, \quad i = 0,\ldots,N-1, \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\tau) = (1-\tau)(1-3\tau), \quad \varphi_1(\tau) = \tau(-2+3\tau), \quad \varphi_2(\tau) = 6\tau(1-\tau), \\ &\varphi'_0(\tau) = -4+6\tau, \qquad \varphi'_1(\tau) = -2+6\tau, \qquad \varphi'_2(\tau) = 6-12\tau, \\ &\varphi''_0(\tau) = 6, \qquad \varphi''_1(\tau) = 6, \qquad \varphi''_2(\tau) = -12. \end{aligned} \tag{1.4}$$

С учетом вида функциональных коэффициентов (1.4), получаем соотношения:

$$\begin{aligned} &\tilde{S}'_{2,1}(z;x_i+0) = \frac{1}{h_i}(-4z_i - 2z_{i+1} + 6\tilde{z}_{i+1/2}), \quad \tilde{S}'_{2,1}(z;x_i-0) = \frac{1}{h_{i-1}}(2z_{i-1} + 4z_i - 6\tilde{z}_{i-1/2}), \\ &\tilde{S}''_{2,1}(z;x_i+0) = \frac{6}{h_i^2}(z_i + z_{i+1} - 2\tilde{z}_{i+1/2}), \quad i = 1,\ldots,N-1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для получения аппроксимационных оценок сплайна $\tilde{S}_{2,1}(z;x)$ можно воспользоваться его связью с кубическим сплайном дефекта 1 (1.2), откуда [1]: $z_i = z(x_i) + O(h^3)$, где $h = \max_i(h_i)$, а на равномерной сетке $z_i = z(x_i) + O(h^4)$.

Так же рассмотрим параболический сплайн с дополнительными узлами. Пусть помимо основной сетки $\Omega_N(x;a,b]$ задана дополнительная к ней $\left\{x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right\} i = 0,\ldots,N-1$, при этом значения исходной функции заданы в полуцелых узлах и на концах отрезка:

$$z_{i+1/2} = z(x_{i+1/2}), \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \quad z_0 = z(x_0),\ f_N = z(x_N). \tag{1.6}$$

Сплайном второго порядка с дополнительными узлами дефекта 1 назовём кусочно-полиномиальную функцию $S_{2,1}(z;x) \in C^1[a,b]$ удовлетворяющую условиям: $S_{2,1}(f;x)$ - полином второго порядка при $x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,\ldots,N-1;$ с условиями интерполяции $S_{2,1}(z;x_{i+1/2}) = z_{i+1/2}, i = 0,\ldots,N-1, \quad S_{2,1}(f;x_0) = f_0, \quad S_{2,1}(f;x_N) = f_N$ и гладкого сопряжения

$$S_{2,1}(z;x_i-0) = S_{2,1}(z;x_i+0), \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{1.7}$$

$$S'_{2,1}(z;x_i-0) = S'_{2,1}(z;x_i+0), \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{1.8}$$

Условия гладкого сопряжения (1.7) позволяют ввести обозначение $z_i = S_{2,1}(z;x_i-0) = S_{2,1}(z;x_i+0), \quad i = 1,\ldots,N-1,$ и записать сплайн в виде:

$$S_{2,1}(z;x)=\psi_0(\tau)z_i+\psi_1(\tau)z_{i+1}+\psi_2(\tau)z_{i+1/2},\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$$
$$\tau=\frac{x-x_i}{h_i},\quad h_i=x_{i+1}-x_i,\quad i=0,\ldots,N-1, \tag{1.9}$$

где

$$\psi_0(\tau)=(1-\tau)(1-2\tau),\quad \psi_1(\tau)=\tau(2\tau-1),\quad \psi_2(\tau)=4\tau(1-\tau),$$
$$\psi_0'(\tau)=-3+4\tau,\qquad \psi_1'(\tau)=-1+4\tau,\qquad \psi_2'(\tau)=4(1-2\tau), \tag{1.10}$$
$$\psi_0''(\tau)=4,\qquad \psi_1''(\tau)=4,\qquad \psi_2''(\tau)=-8.$$

Тогда получаем соотношения аналогичные (1.5):

$$S_{2,1}'(z;x_i+0)=\frac{1}{h_i}(-3z_i-z_{i+1}+4z_{i+1/2}),\quad S_{2,1}'(z;x_i-0)=\frac{1}{h_{i-1}}(z_{i-1}+3z_i-4z_{i-1/2}),$$
$$S_{2,1}''(z;x_i+0)=\frac{4}{h_i^2}(z_i+z_{i+1}-2z_{i+1/2}),\quad i=1,\ldots,N-1. \tag{1.11}$$

Можно отметить, что $z_{i+1/2}=\widetilde{z}_{i+1/2}+\mathrm{O}(h^2)$. Учитывая структурную и алгоритмическую близость рассматриваемых параболических сплайнов, все дальнейшие выкладки будем записывать унифицировано, используя обозначения

$$S^{(0)}(x)=\widetilde{S}_{2,1}(z;x),\ S^{(1)}(x)=S_{2,1}(z;x),\quad z_{i+1/2}^{(0)}=\widetilde{z}_{i+1/2},\ z_{i+1/2}^{(1)}=z_{i+1/2}.$$

Тогда, обозначив $S_i^{(a)}=S^{(a)}(x_i),\ a=0,1$, соотношения (1.5) и (1.11) можно переписать в виде:

$$S'^{(a}(x_i+0)=\frac{1}{h_i}(-(4-a)z_i-(2-a)_{i+1}+(6-2a)z_{i+1/2}^{(a)}),$$
$$S'^{(a)}(x_i-0)=\frac{1}{h_{i-1}}((2-a)z_{i-1}+(4-a)z_i-(6-2a)z_{i-1/2}^{(a)}), \tag{1.12}$$
$$S''^{(a)}(x_i+0)=\frac{6-2a}{h_i^2}(z_i+z_{i+1}-2z_{i+1/2}^{(a)}),\quad i=1,\ldots,N-1,\quad a=0,1.$$

После чего, воспользовавшись условиями гладкого сопряжения по первой производной во внутренних узлах сетки, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $S_i^{(a)}$:

$$\lambda_i S_{i-1}^{(a)}+(2+a)S_i^{(a)}+\mu_i S_{i+1}^{(a)}=(3+a)(\lambda_i z_{i-1/2}^{(a)}+\mu_i z_{i+1/2}^{(a)}),$$
$$\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\quad \mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\quad i=1,\ldots,N-1,\quad a=0,1. \tag{1.13}$$

Дополнив эти уравнения условиями $S_0^{(a)}=z_0$ и $S_N^{(a)}=z_N$, получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей имеющей диагональное преобладание, откуда и следует разрешимость поставленной задачи, а значит и существования соответствующих параболических сплайнов.

2. Сглаживающие параболические сплайны

При построении сглаживающего параболического сплайна, приближающего в среднем, будем использовать задачу об экстремальных свойствах функционала (0.2), который в этом случае рассматривается в виде:

$$G_1(f)=\lambda\int_a^b|f'(x)|^2dx+\sum_{i=0}^{N-1}\rho_{i+1./2}^{-1}(\widetilde{f}_{i+1/2}-\widetilde{z}_{i+1/2}^0)^2+\rho_0^{-1}(f(x_0)-z_0^0)^2+\rho_N^{-1}(f(x_N)-z_N^0)^2. \tag{2.1}$$

Связь параболического сплайна, приближающего в среднем, с кубическим сплайном вида (1.2) обеспечивает ему экстремальное свойство минимизации функционала (2.1), в котором, не нарушая общности, будем полагать λ=1.

Рассмотрим подробнее процедуру вычисления интеграла, входящего в функционал (2.1). Воспользовавшись интегрированием по частям и формулами (1.12), получаем

$$\int_a^b \left(S'^{(a)}(x)\right)^2 dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(S'^{(a)}(x)\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(S^{(a)}(x_{i+1}-0)S'^{(a)}(x_{i+1}-0) - S^{(a)}(x_i+0)S'^{(a)}(x_i+0) - S''^{(a)}(x_i+0)\int_{x_i}^{x_{i+1}} S^{(a)}(x)dx \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\begin{array}{l} \frac{S_{i+1}^{(a)}}{h_i}\left(\left(2-a\right)S_i^{(a)} + (4-a)S_{i+1}^{(a)}\right) - (6-2a)S_{i+1/2}^{(a)}\Big) - \\ -\frac{S_i^{(a)}}{h_i}\left(-\left(4-a\right)S_i^{(a)} - (2-a)S_{i+1}^{(a)}\right) + (6-2a)S_{i+1/2}^{(a)}\Big) - \\ -\frac{(6-2a)}{h_i^2}\left(S_i^{(a)} + S_{i+1}^{(a)} - 2S_{i+1/2}^{(a)}\right)h_i S_{i+1/2}^{(a)} \end{array} \right). \qquad (2.2)$$

При этом $\int_{x_i}^{x_{i+1}} S^{(a)}(x)dx = h_i S_{i+1/2}^{(0)} \approx h_i S_{i+1/2}^{(1)}$, то есть в случае сплайна с дополнительными узлами для интегрирование используется квадратурная формула средних прямоугольников. Отметим, что входные данные для параболического сплайна с дополнительными узлами являются частным случаем данных для сплайна первого порядка, поэтому экстремальные свойства для функционала (0.2) выполняются приближенно именно в силу того, что интеграл в этом случае аппроксимируется квадратурной формулой.

Для вычисления величин $S_i^{(a)}, i=0,\ldots,N$ и $S_{i+1/2}^{(a)}, i=0,\ldots,N-1$ воспользуемся необходимым условием экстремума. Так из уравнений $\frac{\partial G_1\left(S^{(a)}\right)}{\partial S_{i+1/2}^{(a)}} = 0, i=0,\ldots,N-1$ получаем

$$S_{i+1/2}^{(a)} = z_{i+1/2}^{(a)} + \rho_{i+1/2} D_i\left(S^{(a)}\right), \quad D_i\left(S^{(a)}\right) = \frac{6-2a}{h_i}\left(S_i^{(a)} + S_{i+1}^{(a)} - 2S_{i+1/2}^{(a)}\right), \quad i=0,\ldots,N-1. \qquad (2.3)$$

Откуда выразим

$$S_{i+1/2}^{(a)} = d_{i+1/2} z_{i+1/2}^{(a)} + \gamma_{i+1/2} d_{i+1/2}\left(S_i^{(a)} + S_{i+1}^{(a)}\right),$$
$$\gamma_{i+1/2} = (6-2a)\frac{\rho_i}{h_i}, \quad d_{i+1/2} = \frac{1}{1+2\gamma_{i+1/2}}, \quad i=0,\ldots,N-1. \qquad (2.4)$$

В то же время условия $\frac{\partial G_1\left(S^{(a)}\right)}{\partial S_i^{(a)}} = 0, i=1,\ldots,N-1$ дают систему уравнений вида (1.13):

$$\lambda_i S_{i-1}^{(a)} + (2+a)S_i^{(a)} + \mu_i S_{i+1}^{(a)} = (3+a)\left(\lambda_i S_{i-1/2}^{(a)} + \mu_i S_{i+1/2}^{(a)}\right), \quad i=1,\ldots,N-1, \quad a=0,1. \qquad (2.5)$$

Аналогично, из соотношений $\frac{\partial G_1\left(S^{(a)}\right)}{\partial S_0^{(a)}} = 0$ и $\frac{\partial G_1\left(S^{(a)}\right)}{\partial S_N^{(a)}} = 0$ имеем:

$$S_0^{(a)} + \gamma_0\left((2+a)S_0^{(a)} + S_1^{(a)} - (3+a)S_{1/2}^{(a)}\right) = z_0,$$
$$S_N^{(a)} + \gamma_N\left((2+a)S_N^{(a)} + S_{N-1}^{(a)} - (3+a)S_{N-1/2}^{(a)}\right) = z_N, \qquad (2.6)$$

где

$$\gamma_0 = (2-a)\frac{\rho_0}{h_0}, \quad \gamma_{N-1} = (2-a)\frac{\rho_N}{h_{N-1}}, \quad a=0,1.$$

Далее, подставив соотношения (2.4) в уравнения (2.5)-(2.6) окончательно получим систему линейных уравнения для определения неизвестных величин $S_i^{(a)}$, $i = 0,...,N$, $a = 0,1$:

$$\begin{aligned} & C_0 S_0^{(a)} - B_0 S_1^{(a)} = F_0, \\ & -A_i S_{i-1}^{(a)} + C_i S_i^{(a)} - B_i S_{i+1}^{(a)} = F_i, \quad i = 1,...,N-1, \\ & -A_N S_{N-1}^{(a)} + C_N S_N^{(a)} = F_{N,} \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} & B_0 = -\gamma_0\left(1-(3+a)d_{1/2}\gamma_{1/2}\right), \quad C_0 = 1+(1+a)\gamma_0 - B_0, \quad F_0 = z_0 + (3+a)\gamma_0 d_{1/2}\gamma_{1/2}, \\ & A_i = -\lambda_i\left(1-(3+a)d_{i-1/2}\gamma_{i-1/2}\right), \quad B_i = -\mu_i\left(1-(3+a)d_{i+1/2}\gamma_{i+1/2}\right), \quad C_i = (1+a) - A_i - B_i, \\ & F_i = (3+a)\left(\lambda_i d_{i-1/2} z_{i-1/2}^{(a)} + \mu_i d_{i+1/2} z_{i+1/2}^{(a)}\right), \quad i = 0,...,N-1, \\ & A_N = -\gamma_N\left(1-(3+a)d_{N-1/2}\gamma_{N-1/2}\right), \quad C_N = 1+(1+a)\gamma_N - A_N, \\ & F_N = z_N + (3+a)\gamma_N d_{N-1/2}\gamma_{N-1/2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нетрудно доказать, что трехдиагональная матрица система уравнений (2.7) имеет диагональное преобладание, откуда следует её разрешимость. Получив в качестве решения значения $S_i^{(a)}$ $(i = 0,...,N)$, далее из соотношений (2.4) можно найти величины $S_{i+1.2}^{(a)}$ $(i = 0,...,N-1)$. Отметим, что для построения сглаживающих кубических сплайнов требуется решать систему линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей, в общем случае не имеющей диагонального преобладания.

3. Задача нахождения оптимальных значений параметров сглаживания

Важнейшей часть всех рассмотренных сглаживающих процедур является значение коэффициентов сглаживания. Воспользуемся подходом, предложенным в работе [2]. Обозначим $\vec{\rho} = \left(\rho_0, \rho_{1/2}, \rho_{3/2}, ..., \rho_{N-1/2}, \rho_N\right)^T$ - вектор значений коэффициентов сглаживания. Очевидно, значения определяющие параболические сплайны $S_i^{(a)}, S_{i+1/2}^{(a)}$ являются функциями от этого вектора. В этом случае регуляризирующая часть функционала (0.1) может быть записана как

$$J_2\left(S^{(a)}\right) = \int_{x_0}^{x_N}\left(S''^{(a)}(x)\right)^2 dx = (6-2a)^2 \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{h_i^2}\left(S_i^{(a)} + S_{i+1}^{(a)} - 2S_{i+1/2}^{(a)}\right)\right)^2 = J_2(\vec{\rho}). \tag{3.1}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: найти

$$\begin{aligned} & \min_{\vec{\rho}} J_2(\vec{\rho}), \\ & \rho_0 \ge 0,\ \rho_N \ge 0,\ \rho_{i+1/2} \ge 0,\ i = 0,...,N-1, \quad \left|S_{i+1/2}^{(a)} - z_{i+1/2}^{(a)}\right| \le \Delta_{i+1/2}, \quad i = 0,...,N-1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

являющуюся задачей нелинейного (выпуклого) программирования. Причём здесь нас интересует не само значение минимума функционала, а тот набор элементов вектора $\vec{\rho}$, который его обеспечивает.

В качестве тестовой задачи рассматривалась следующая:

$$z(x) = \exp(x), \quad x \in [0.1, 1.1], \quad x_i = x_0 + ih,\ i = 0,...,N,\ h = 1/N,\ N = 10. \tag{3.3}$$

Возмущение в исходные данные вносилось путем округления тестовой функции до одного знака после запятой, в этом случае предельная абсолютная погрешность не превышает *0.05*. Решение задачи оптимизации (3.2) производилось с помощью градиентного метода внутренних точек [3].

В качестве основной характеристики результатов использовалась максимальная относительная погрешность численной производной, а полученные величины сглаживающих коэффициентов представляются их средним и максимальным значениями:

$$\delta_{\max} = \max_i \left| \left(z'\left(x_{i+1/2}\right)\right)^{-1} \left(\frac{S\left(x_{i+1}\right) - S\left(x_i\right)}{h_i} - \frac{z\left(x_{i+1}\right) - z\left(x_i\right)}{h_i} \right) \right| \times 100\% \tag{3.4}$$

$$\overline{\rho} = \frac{1}{N+2}\left(\rho_0 + \rho_N + \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{i+1/2} \right), \quad \rho_{\max} = \max\left(\rho_0; \rho_N; \rho_{i+1/2}, i = 0,\ldots,N-1\right). \tag{3.5}$$

Результаты расчетов в виде величин (3.4)-(3.5) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчётов

Сплайн	0	1		2.1			2.2			2.3		
	$\delta_{\max}$	$\overline{\rho}$	$\delta_{\max}$	$\overline{\rho}$	ρ_{max}	$\delta_{\max}$	$\overline{\rho}$	ρ_{max}	$\delta_{\max}$	$\overline{\rho}$	ρ_{max}	$\delta_{\max}$
$S_{1,1}(x)$	40.9	0.019	24.8	0.073	0.154	20.5	-	-	-	-	-	-
$\tilde{S}_{2,1}(x)$	49.1	0.018	21.7	0.090	0.177	8.33	0.026	0.064	12.3	0.084	0.187	7.11
$S_{2,1}(x)$	38.0	0.016	20.6	0.086	0.172	8.32	0.019	0.054	12.4	0.068	0.117	7.20

Вариант 0. В этом случае коэффициенты сглаживания брались равным 0, то есть строились интерполяционные сплайны. Полученные результаты по относительной ошибке численной производной (40-50%) вполне согласуются с оценками теории погрешности.

Вариант 1. Коэффициенты сглаживания полагались постоянными во всех узлах сетки и варьировались с шагом 0.001. Результаты с наименьшей погрешностью, которую удается снизить примерно в 2 раза, приведены в таблице 1. В этом наблюдается небольшое преимущество параболических сплайнов (на 3-4%) по сравнению со сплайном первого порядка.

В серии вариантов 2 использовалась для нахождения значений коэффициентов сглаживания оптимизированная процедура (3.2).

Вариант 2.1 (эталонный). В качестве исходных данных для параболических сплайнов брались «возмущённые» значения интегральных средних и функции в полуцелых узлах соответственно. Из таблицы 1 видно, что в этом случае псоле сглаживания параболическими сплайнами погрешность становится не более 8.3%.

Поскольку на практике исходные данные чаще всего встречаются в виде значений в узлах основной сетки, были проведены расчёты, позволяющие их приближённо свести к рассматриваемым параболическим сплайнам. При этом для варианта 2.2 соответствующие значения в узлах полуцелой сетки пересчитывались по формуле трапеций, а в варианте 2.3 – по формуле Симпсона:

$$z^{(a)}_{i+1/2} = \left(f^0\left(x_i\right) + f^0\left(x_{i+1}\right)\right)/2, \quad z^{(a)}_{i+1/2} = \left(f^0\left(x_i\right) + 4f^0\left(x_{i+1/2}\right) + f^0\left(x_{i+1}\right)\right)/6$$

Поскольку, численное интегрирование само по себе является стабилизирующей процедурой, вариант 2.3 дает результаты даже немного лучше, чем эталонный вариант 2.1.

Таким образом, предлагаемый в работе аппарат сглаживающих параболических сплайнов, являющийся алгоритмически более простым по сравнению с кубическими, дает возможность существенно снизить погрешность численного дифференцирования «возмущённых» данных.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1980, 352 с д-во ЮУрГУ, 2009. 200 с.
2. Русаков С.В., Хейфец И.И. Задача оптимизации для процедуры сглаживания экспериментальных данных сплайнами // Математические методы в технологии и технике. 2026. № 5, с. 1–5.
3. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программировании. Новосибирск: Наука. 1980, 144 с.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛОЙ ТЯГИ

В.П. Савельев, Н.И. Сутягина

Нижегородский государственный инженерно-экономический университет

В работе введено новое понятие области управляемости в начало координат транспортного средства с ограниченной силой тяги, которое учитывает возможные начальные состояния транспортного средства. На простых примерах изучается строение границы такой области управляемости и приводится сравнение с областью управляемости в общепринятом смысле.

Ключевые слова: область управляемости, допустимая траектория, состояние равновесия, сепаратриса седла.

Работа посвящена изучению множества управляемости в начало координат транспортного средства с ограниченной силой тяги. Уравнение движения вдоль дорожного полотна такого средства с единичной массой описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u(t) - f(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где функция $f(x,y)$ обозначает воздействие внешних сил (сила сопротивления движению, скатывающая сила), а $u(t) \in [q;p]$ – управляющее воздействие. При движении в положительную сторону ($y > 0$), когда траектория системы (1) расположена в верхней полуплоскости G^+, величина $p > 0$ означает максимальную силу тяги, а величина $q < 0$ означает максимальную силу торможения. При движении в отрицательную сторону ($y < 0$), когда траектория системы (1) расположена в нижней полуплоскости G^-, величина $q < 0$ означает максимальную силу тяги, а $p > 0$ означает максимальную силу торможения. Систему (1) при $u(t) \equiv p$, будем называть p-системой, а при $u(t) \equiv q$, будем называть q-системой.

Определение 1. Под множеством управляемости U в начало координат понимается совокупность таких точек $M(x,y)$, для которых существуют допустимые траектории системы (1), начинающаяся в точке M, а заканчивающаяся в начале координат.

Будем предполагать, что в начале координат выполняются условия

$$\begin{cases} p - f(0,0) > 0, \\ q - f(0,0) < 0, \end{cases}$$

при которых система (1) будет локально управляема [1], а множество управляемости U, в соответствии с определением 1, будет открытой областью. Известно [1], что граница Γ области управляемости U состоит лишь из траекторий (или дуг траекторий) p –системы и q –системы.

Пример 1. Предположим, что p –система имеет лишь одно состояние равновесия S типа седло, а q –система не имеет состояний равновесия. Тогда область управляемости U будет расположена справа от ω- сепаратрис седла S (см. рис. 1). И здесь возникает вопрос относительно понятия области управляемости U. Получается, что из точки A, расположенной слева от седла S, даже достаточно удаленной от начала координат, можно достичь начала координат, НО для этого надо иметь большую начальную скорость! А откуда она возьмется? Кто ее сообщит транспортному средству? Транспортное средство, как правило, начинает свое движение с нулевой начальной скоростью! В связи с этим обстоятельством, предлагается уточнить определение области управляемости следующим образом.

Определение 2. Точка M фазового пространства принадлежит множеству управляемости V в начало координат, если существует допустимая траектория $\gamma(M)$ системы (1), проходящая через эту точку, удовлетворяющая двум условиям:

1) положительная полутраектория $\gamma^+(M)$ содержит точку $O(0,0)$,

2) отрицательная полутраектория $\gamma^-(M)$ содержит точку вида $A(a,0)$, не являющуюся состоянием равновесия (включая случай $M = A(a,0)$).

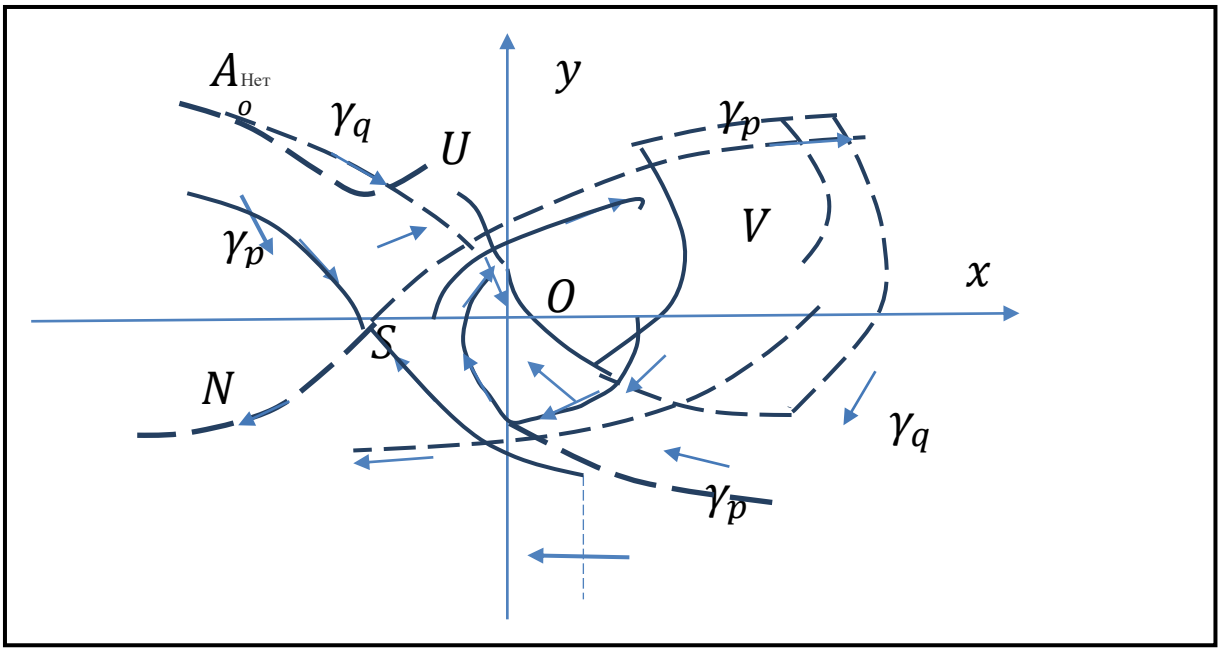


Рис. 1. Области управляемости U и V в примере 1

В примере 1 множество управляемости V, в соответствии с определением 2, является область, ограниченная в верхней полуплоскости α-сепаратрисой седла S, а в нижней полуплоскости ω-сепаратрисой седла S.

Пример 2. Предположим, что p-система и q-система имеют лишь по одному состоянию равновесия типа седло S_1 и S_2 соответственно. Тогда область управляемости U будет расположена между ω-сепаратрис этих седел (см. рис. 2).

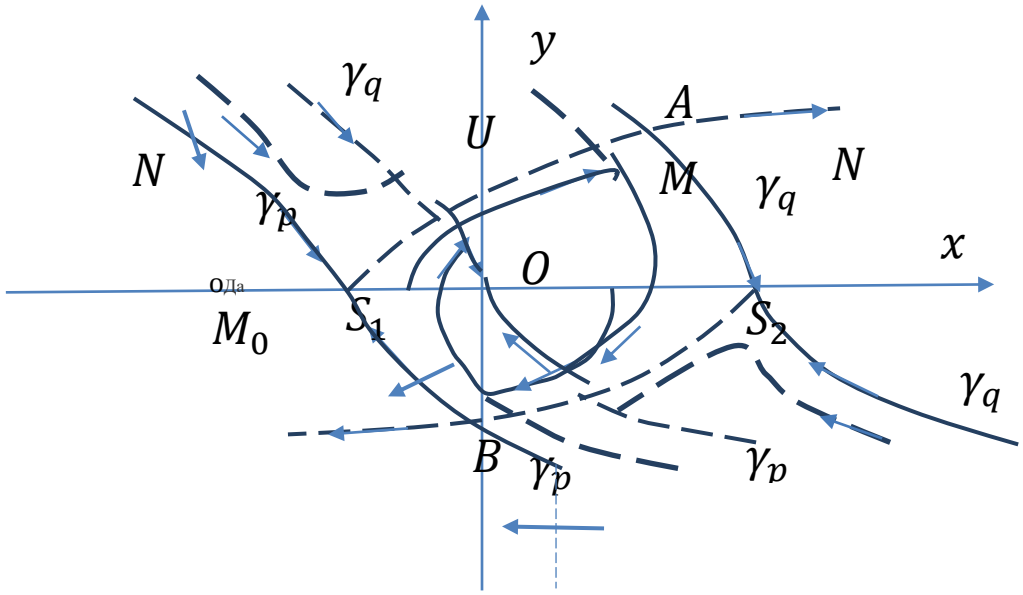


Рис. 2. Области управляемости U и V в примере 2

Областью управляемости V, в соответствии с определением 2, является множество, ограниченное в верхней полуплоскости дугой S_1A α-сепаратрисы седла S_1 и дугой AS_2 ω-сепаратрисы седла S_2, а в нижней полуплоскости дугой BS_1 ω-сепаратрисы седла S_1 и дугой S_2B α-сепаратрисы седла S_2,

Пример 3. Предположим, что q-система и p-система имеют по одному состоянию равновесия типа центр (или устойчивый фокус), соответственно, точка O_1 и точка O_2 (см. рис. 3).

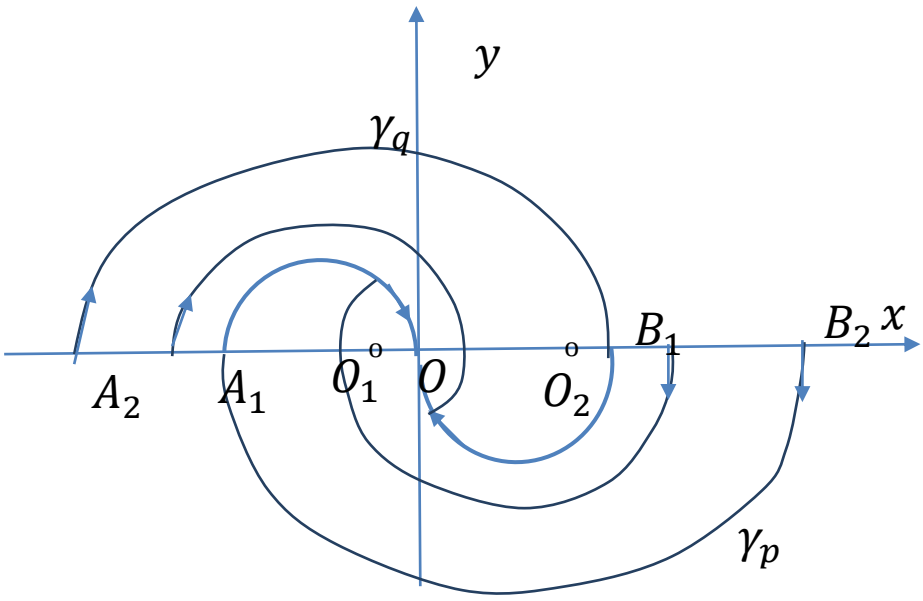


Рис. 3. Построение области управляемости V в примере 3

На первом этапе построения области управляемости V мы получим часть ее часть, ограниченную отрезками A_2A_1 и B_1B_2 оси Ox и дугами A_2B_1 и B_2A_1 соответственно траектории γ_q и траектории γ_p. Нетрудно видеть, что в результате поэтапного расширения областью управляемости V окажется вся фазовая плоскость. В этом случае области управляемости V и U совпадают.

Замечание. В случае, когда q-система и p-система имеют по одному состоянию равновесия типа неустойчивый фокус, последовательности точек A_i и $B_i, i = 1,2, \ldots$ имеют пределы, соответственно, A и B. В этом случае множество управляемости V (и множество управляемости U) будет ограничено в верхней плоскости дугой AB траектории γ_q, а в нижней плоскости дугой BA траектории γ_p.

Пример 4. Предположим, что q-система и p-система имеют по одному состоянию равновесия типа устойчивый узел, соответственно, точка $O_1(a,0)$ и точка $O_2(b,0)$ (см. рис. 4). В этом случае область N_1, ограниченная отрицательной полутраекторией $\gamma_q^-(O_2)$ и полуинтервалом $[b,+\infty)$ оси Ox, а также область N_2, ограниченная отрицательной полутраекторией $\gamma_p^-(O_1)$ и полуинтервалом $(-\infty,a]$ оси Ox, не входят в область управляемости V. Область управляемости U совпадает со всей фазовой плоскостью.

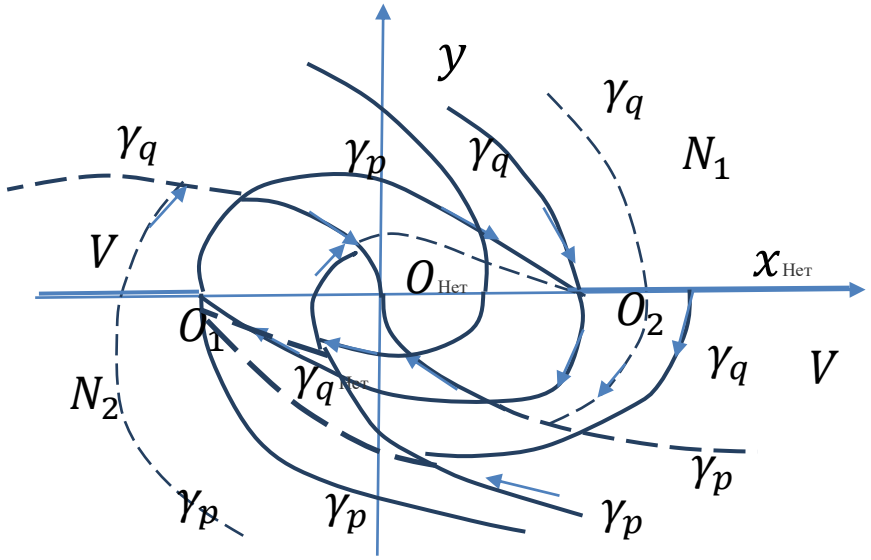


Рис. 4. Построение области управляемости V в примере 4

Пример 5. Предположим, что q −система и p −система имеют по одному состоянию равновесия типа неустойчивый узел, соответственно, точка O_1 и точка O_2 (см. рис. 5).

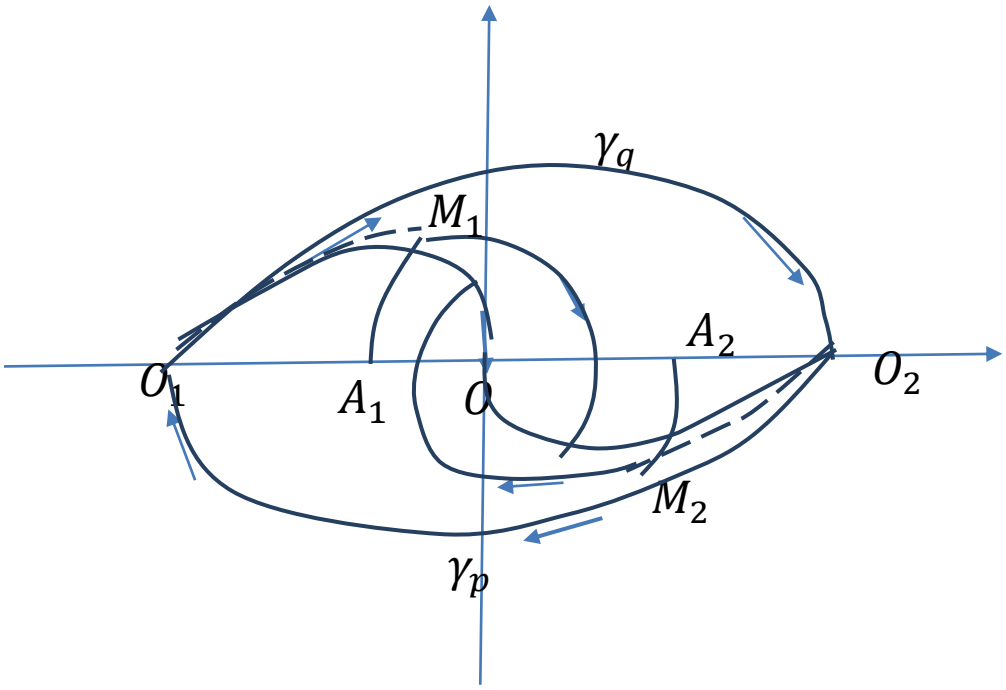


Рис. 5. Построение области управляемости V в примере 5

В этом случае область управляемости U ограничена траекториями γ_q и γ_p, выходящими соответственно из узлов O_1 и O_2 и входящими соответственно в узлы O_2 и O_1. Траекториями γ_q и γ_p, выходящими из узлов O_1 и O_2 и входящими в начало координат она поделена на две части. Верхняя часть заполнена траекториями q-системы, при этом для точки M_1 траектории q-системы, расположенной в верхней полуплоскости, существует дуга A_1M_1 полутраектории $\gamma_p^-(M_1)$, содержащая точку $A_1(a_1, 0)$. Нижняя часть заполнена траекториями p-системы, при этом для точки M_2 траектории p-системы, расположенной в нижней полуплоскости, существует дуга A_2M_2 полутраектории $\gamma_q^-(M_2)$, содержащая точку $A_2(a_2, 0)$. Таким образом, множество управляемости V совпадает с множеством управляемости U.

Литература

1. Савельев, В.П., Классификация связных компонент множества неуправляемости одномерного движения/ В.П. Савельев // Межвузовский сборник «Динамика систем», – 1975. – Вып.5. – С.118-144.
2. Савельев В.П., О классификации связных компонент множества неуправляемости нелинейного осциллятора/ В.П. Савельев // Вестник ННГУ. – 2012. – №3, часть 1. – С.155-162.

ОЦЕНКА ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ РАБОТ МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАСПИСАНИЙ НА МНОГОЯДЕРНОМ ПРОЦЕССОРЕ[1*]

М.Ю. Сахно, С.А. Романов, Ю.В. Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал

В работе рассматривается задача планирования выполнения работ на многоядерном процессоре с учётом их взаимного влияния. При совместном выполнении работы конкурируют за общий ресурс – шину данных – и замедляют друг друга. Для оценки взаимных замедлений предлагается использовать модель машинного обучения, обученную на статистике совместного выполнения работ на реальном сервере. Предложен жадный алгоритм, в котором эта модель применяется для расчёта времени выполнения построенного расписания. Проведён вычислительный эксперимент, в котором в качестве работ выступают процедуры библиотеки oneMKL. Время выполнения расписаний, рассчитанное жадным алгоритмом с помощью модели, сравнивается с фактическим временем их выполнения на сервере.

Ключевые слова: построение расписаний, многоядерный процессор, взаимное влияние работ, машинное обучение, жадный алгоритм

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача составления расписания выполнения множества работ $J = \{1, \ldots, n\}$ на m ядрах процессора. Каждая работа выполняется на одном ядре без прерываний. Для каждой работы j известны её длительность $\tilde{p}_j$ при выполнении в изоляции (когда на остальных ядрах не выполняется никаких работ) и процент потребления шины данных $\tilde{b}_j$. При одновременном выполнении на разных ядрах работы конкурируют за ресурсы процессора, прежде всего за шину данных, и поэтому могут замедлять друг друга [1, 2, 3]. Требуется минимизировать общее время завершения всех работ C_{max}. Задача NP-трудна [1].

При разработке алгоритмов для решения этой задачи важно уметь учитывать взаимные замедления работ при совместном выполнении и оценивать скорости выполнения и длительности работ, что позволяет определять качество построенных расписаний [1, 4]. В [1] предложена аналитическая формула расчета замедлений. Однако она не учитывает особенности разных архитектур процессоров, и для каждого нового процессора её приходится выводить заново. В настоящей работе предлагается другой подход: собрать на реальном сервере статистику совместного выполнения работ и их взаимных замедлений, обучить на этих данных модель машинного обучения (ML-модель) и использовать её в алгоритмах для оценки замедлений.

2. Построение модели машинного обучения

Будем называть *конфигурацией* набор работ, выполняемых одновременно на разных ядрах. Для сбора обучающих данных из имеющихся работ составляются конфигурации, и каждая из них запускается на сервере. Все работы конфигурации стартуют одновременно. Завершившиеся работы перезапускаются до окончания самой длинной, поэтому каждая работа всё время выполняется с одним и тем же набором соседей. Замедление работы определяется как отношение её длительности в конфигурации к длительности в изоляции. Скорость работы в конфигурации – величина, обратная замедлению.

ML-модель обучается на парах «конфигурация – замедление работы». Каждой работе конфигурации соответствует одна обучающая строка. Входные признаки описывают саму работу

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015-П, https://rscf.ru/project/22-71-10015-П/.

(тип, размер входных данных, потребление шины, длительность в изоляции) и её соседей (их количество, суммарное и по типам потребление шины). Целевая переменная – замедление работы. При применении на вход модели подаётся произвольная конфигурация, а на выходе получается предсказанное замедление каждой входящей в неё работы.

3. Жадный алгоритм

Рассматривается жадный алгоритм *GR*. Сначала он упорядочивает работы по убыванию длительности $\tilde{p}_j$. Затем «тяжёлые» по шине работы ($\tilde{b}_j > 25\%$) равномерно чередуются в этой последовательности с «лёгкими» по схеме алгоритма Брезенхэма [5]. В результате тяжёлые работы распределяются по всему горизонту планирования и не скапливаются в одном интервале.

Целевая функция для построенной последовательности вычисляется моделированием её выполнения. Первые m работ последовательности назначаются на ядра, ML-модель предсказывает их замедления, и алгоритм определяет работу, которая завершится первой. Освободившееся ядро занимает следующая работа последовательности. Замедления заново предсказываются для новой конфигурации, и процесс повторяется до завершения всех работ.

4. Вычислительный эксперимент

Эксперименты проводились на сервере с двумя процессорами Intel Xeon E5420. У каждого процессора 4 ядра и своя шина FSB 1333 МГц. Все замеры, как и выполнение построенных расписаний, проводились на 4 ядрах одного процессора. В качестве работ взяты 8 процедур из библиотеки oneMKL с разными размерами входных данных, всего 20 работ. Для обучения модели измерена 1381 конфигурация, что дало 3458 обучающих строк.

В качестве модели использовался градиентный бустинг на решающих деревьях. Модель предсказывает логарифм замедления. В таблице 1 показано, как менялась ошибка модели на контрольной выборке при последовательном усложнении подхода: от гистограммного градиентного бустинга [6] с исходным набором признаков до реализации CatBoost [7] с подобранными гиперпараметрами. Наибольший вклад в точность дали переход к CatBoost и добавление признаков, описывающих потребление шины соседями.

Таблица 1. Пошаговое улучшение модели (средняя относительная и абсолютная ошибки)

Шаг	Ошибка, %	MAE
Градиентный бустинг на исходных данных	2.57	0.048
+ логарифм замедления	2.22	0.044
+ CatBoost	1.95	0.038
+ признаки по шине	1.44	0.028
+ подбор гиперпараметров	1.37	0.027

Чтобы оценить, насколько точно ML-модель предсказывает реальное выполнение расписаний при использовании в жадном алгоритме, сгенерированы серии по 30 примеров со 100 работами. Работы разделены на три группы по нагрузке на шину: compute ($\tilde{b}_j \le 15\%$), промежуточные ($15\% < \tilde{b}_j \le 25\%$) и memory ($\tilde{b}_j > 25\%$). Серии compute-heavy, balanced и memory-heavy различаются долями этих групп. Дополнительно рассмотрена серия memory50-cpu50, в которой первые 50 работ относятся к группе memory, а остальные к группе compute. В таблице 2 приведено относительное отклонение фактического времени выполнения расписания на сервере от значения целевой функции, рассчитанного алгоритмом.

Таблица 2. Минимальное, среднее и максимальное относительное отклонение фактического времени выполнения расписания от рассчитанного жадным алгоритмом *GR*

	min	**avg**	**max**
compute-heavy	-0.88%	0.25%	1.28%
balanced	-0.28%	0.43%	1.19%
memory-heavy	-0.4%	0.45%	1.02%
memory50-cpu50	-0.5%	0.36%	0.96%

Среднее отклонение расчётной оценки от фактического времени не превышает 0.5% на всех сериях, а максимальное – 1.3%. Таким образом, модель, обученная на статистике сравнительно небольшого числа конфигураций, позволяет с хорошей точностью предсказывать фактическое время выполнения расписания на реальном оборудовании. Кроме того, расписания жадного алгоритма статистически значимо превосходят по времени выполнения расписания онлайн-планировщика oneTBB, широко используемого в современном программном обеспечении.

Литература

1. Eremeev A.V., Malakhov A.A., Sakhno M.A., Sosnovskaya M.Y. Multi-core Processor Scheduling with Respect to Data Bus Bandwidth // Proceedings of International Conference Optimization and Applications, OPTIMA 2020. CCIS. 2020. Vol. 1340. Springer, Cham. P. 55-69. DOI: 10.1007/978-3-030-65739-0_5.
2. Merkel A., Stoess J., Bellosa F. Resource-Conscious Scheduling for Energy Efficiency on Multicore Processors // Proc. 5th European Conference on Computer Systems, EuroSys'10. 2010. P. 153–166. DOI: 10.1145/1755913.1755930.
3. Zhuravlev S., Blagodurov S., Fedorova A. Addressing Shared Resource Contention in Multicore Processors via Scheduling // Proc. 15th International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems, ASPLOS'10. 2010. P. 129–142. DOI: 10.1145/1735970.1736036.
4. Zakharova Y.V., Sakhno M.Y. Evolutionary algorithm with optimized operators for multi-processor scheduling with resources // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2025. 22 (2). P. 85-103. https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.C07
5. Bresenham J. E.Algorithm for computer control of a digital plotter // Seminal graphics: pioneering efforts that shaped the field. 1998. Vol. 1. P. 1–6. DOI: 10.1145/280811.280913
6. Friedman J. H. Greedy function approximation: A gradient boosting machine // The Annals of Statistics. 2011. Vol. 29, no. 5. P. 1189-1232.
7. Prokhorenkova L., Gusev G., Vorobev A., Dorogush A.V., Gulin A. CatBoost: unbiased boosting with categorical features // Advances in neural information processing systems. 2018. Vol. 31. P. 6639–6649.

СВОЙСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $AX = XB$

С.В.Сидоров, В.Н.Сучков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В настоящей работе исследуется модуль целочисленных решений матричного уравнения $\boldsymbol{AX = XB}$ для целочисленных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, имеющих одну и ту же жорданову форму $\boldsymbol{J}$ над $\mathbb{Q}$. Доказано, что для произвольной матрицы $\boldsymbol{X}$ из этого модуля $\boldsymbol{det(X)}$ является произведением однородных многочленов, структура которых зависит от жордановой формы $\boldsymbol{J}$ матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Данный результат позволяет свести вопрос о подобии матриц над кольцом целых чисел к решению системы диофантовых уравнений.

Ключевые слова: подобие матриц, кольцо целых чисел, жорданова форма, матричные уравнения

1. Введение

Для матриц $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ множество

$$\Lambda_{AB} = \{Y \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid AY = YB\}$$

целочисленных решений уравнения $AY = YB$ является подмодулем в $\mathbb{Z}^{n\times n}$. Пусть $G_1, \dots G_p$ – базис Λ_{AB}, тогда произвольная матрица $Y \in \Lambda_{AB}$ может быть представлена в виде $Y = \sum_{i=1}^{p} y_i G_i$, где $y_i \in \mathbb{Z}$, а её определитель $\det(Y) = f(y_1, \dots, y_p)$ есть функция от координат y_i. В работе доказано, что в случае, когда матрицы A и B имеют одну и ту же жорданову форму J над $\mathbb{Q}$, то $\det(Y)$ является произведением однородных многочленов, степень которых равна числу жордановых клеток, имеющих один и тот же порядок.

2. Полученные результаты

Работа состоит из двух частей:

1) исследование структуры множества
$$M_{JJ} = \{X \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid JX = XJ\}$$
и вычисление $\det(X)$ для произвольной $X \in M_{JJ}$, где J – произвольная жорданова матрица для единственного собственного числа
2) доказательство разложимости $\det(Y)$ для произвольной матрицы из $Y \in \Lambda_{AB}$.

2.1. Свойства множества M_{JJ}

Определение. Матрицу T размера $m \times n$ будем называть обобщенной верхней треугольной, если она имеет один из следующих видов:

1. Если $m = n$, то T – квадратная верхняя треугольная матрица ($t_{ij} = 0$ при $i > j$).
2. Если $m < n$, то $T = (0 \;\; T')$, где T' – квадратная верхняя треугольная матрица порядка m.
3. Если $m > n$, то $T = \begin{pmatrix} T' \\ 0 \end{pmatrix}$, где T' – квадратная верхняя треугольная матрица порядка n.

Если в каждом из трех случаев у верхней треугольной матрицы любая наддиагональ состоит из одинаковых элементов, то такую обобщенную верхнюю треугольную матрицу назовем **правильной верхней треугольной**.

Блочную матрицу, блоки которой представляют из себя обобщенные верхние треугольные (правильные верхние треугольные) матрицы, будем называть **блочной обобщенной верхней треугольной (блочной правильной верхней треугольной)**.

Лемма 1 ([2], с. 199). Пусть $J = \mathrm{diag}(J_{t_1}, \dots, J_{t_m})$ – целочисленная жорданова матрица для единственного собственного числа, состоящая из m жордановых клеток порядков $t_1 \geq \cdots \geq t_m$. Тогда всякая матрица $X \in M_{JJ}$ является блочной правильной верхней треугольной с блоками X_{ij} размера $t_i \times t_j$ $(i, j = 1, \dots, m)$.

Элемент, заполняющий главную диагональ блока X_{ij}, обозначим как x_{ij}^*.

Теорема 1. Пусть $J = \mathrm{diag}(\underbrace{J_{s_1}, \dots, J_{s_1}}_{m_1}, \dots, \underbrace{J_{s_\beta}, \dots, J_{s_\beta}}_{m_\beta})$ – целочисленная жорданова матрица для единственного собственного числа, состоящая из $m = m_1 + \cdots + m_\beta$ жордановых клеток, среди которых m_j клеток имеют порядок s_j $(j = 1, \dots, \beta)$, причём $s_1 > s_2 > \cdots > s_\beta$. Тогда

1) всякая матрица $X \in M_{JJ}$ является блочной правильной верхней треугольной с блоками X_{ij} размера $t_i \times t_j$ $(i, j = 1, \dots, m)$, причем

$$s_1 = t_1 = \cdots = t_{m_1} > s_2 = t_{m_1+1} = \cdots = t_{m_1+m_2} > \cdots > s_\beta = t_{m_1+\cdots+m_{\beta-1}} = \cdots = t_m;$$

2) $\det(X) = D_1^{s_1} \cdot D_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot D_\beta^{s_\beta}$, где D_j – главный минор матрицы X порядка m_j, составленный из элементов x_{ij}^*, взятых из всех блоков порядка s_j матрицы X.

Следствие ([1]). Если порядки всех блоков целочисленной жордановой матрицы J различны, тогда для $X \in M_{JJ}$ имеем $\det(X) = (x_{11}^*)^{s_1} \cdot (x_{22}^*)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x_{mm}^*)^{s_m}$, где m – число жордановых клеток, x_{ii}^* – элементы, заполняющие главные диагонали диагональных блоков матрицы X, s_i – порядки диагональных блоков матрицы X.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера жорданову форму для одного собственно числа вида $J = diag(J_3, J_2, J_2, J_2, J_1, J_1)$. Здесь $\mathrm{s}_1 = t_1 = 3,\ \mathrm{m}_1 = 1,\ \mathrm{s}_2 = t_2 = t_3 = t_4 = 2,\ \mathrm{m}_2 = 3,\ \mathrm{s}_3 = t_5 = t_6 = 1,\ \mathrm{m}_3 = 2,\ \beta = 3$

Тогда, по лемме 1, произвольная матрица $X \in M_{JJ}$ будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix}
x_{11}^* & x_{11}' & x_{11}'' & x_{12}' & x_{12}'' & x_{13}' & x_{13}'' & x_{14}' & x_{14}'' & x_{15}' & x_{16}' \\
0 & x_{11}^* & x_{11}' & 0 & x_{12}' & 0 & x_{13}' & 0 & x_{14}' & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{11}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{21}' & x_{21}'' & x_{22}^* & x_{22}' & x_{23}^* & x_{23}' & x_{24}^* & x_{24}' & x_{25}' & x_{26}' \\
0 & 0 & x_{21}' & 0 & x_{22}^* & 0 & x_{23}^* & 0 & x_{24}^* & 0 & 0 \\
0 & x_{31}' & x_{31}'' & x_{32}^* & x_{32}' & x_{33}^* & x_{33}' & x_{34}^* & x_{34}' & x_{35}' & x_{36}' \\
0 & 0 & x_{31}' & 0 & x_{32}^* & 0 & x_{33}^* & 0 & x_{34}^* & 0 & 0 \\
0 & x_{41}' & x_{41}'' & x_{42}^* & x_{42}' & x_{43}^* & x_{43}' & x_{44}^* & x_{44}' & x_{45}' & x_{46}' \\
0 & 0 & x_{41}' & 0 & x_{42}^* & 0 & x_{43}^* & 0 & x_{44}^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{51}' & 0 & x_{52}' & 0 & x_{53}' & 0 & x_{54}' & x_{55}^* & x_{56}^* \\
0 & 0 & x_{61}' & 0 & x_{62}' & 0 & x_{63}' & 0 & x_{64}' & x_{65}^* & x_{66}^*
\end{pmatrix}$$

По Теореме 1 получаем

$$\det X = (x_{11}^*)^3 \begin{vmatrix} x_{22}^* & x_{23}^* & x_{24}^* \\ x_{32}^* & x_{33}^* & x_{34}^* \\ x_{42}^* & x_{43}^* & x_{44}^* \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} x_{55}^* & x_{56}^* \\ x_{65}^* & x_{66}^* \end{vmatrix}$$

2.2. Разложение определителя матриц из Λ_{AB}

Теорема 2. Пусть $J = \mathrm{diag}(\underbrace{J_{s_1}, \dots, J_{s_1}}_{m_1}, \dots, \underbrace{J_{s_\beta}, \dots, J_{s_\beta}}_{m_\beta})$ – жорданова форма матриц A и B, а характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^n, \quad \lambda_0 \in \mathbb{Z}$. Тогда $\det(Y)$ для любой матрицы $Y \in \Lambda_{AB}$ можно представить в виде

$$\det(Y) = f(y_1, \dots, y_p) = a \cdot f_1(y_1, \dots, y_p)^{s_1} \cdot \ldots \cdot f_\beta(y_1, \dots, y_p)^{s_\beta},$$

где $p = \dim \Lambda_{AB}$, $a \in \mathbb{Z}$,

$$f_j(y_1,\dots,y_p)=\sum_{i_1,\dots,i_{m_j}=1}^{p} b^j_{i_1,\dots,i_{m_j}} y_{i_1}\dots y_{i_{m_j}}\in\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_p],$$

$\deg f_j(y_1,\dots,y_p)=m_j$ – число жордановых клеток порядка s_j.

Пример 2. Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-15&-7&28&-7\\4&-1&8&-2\\-4&2&-7&2\\8&-4&16&-3\end{pmatrix}$$

с жордановой формой

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Для данной жордановой формы $s_1=2,\ m_1=1,\ s_2=1,\ m_2=2$. Определитель произвольной матрицы $Y\in\Lambda_{AB}$ представим в виде

$$\det(Y)=\mathrm{f}(y_1,\dots,y_{10})=(y_6-2y_8+4y_{10})^2(y_1y_8+4y_1y_{10}-y_2y_5-4y_2y_9+y_5y_{10}-y_8y_9)$$

Теорема 2 позволяет свести задачу о распознавании подобия целочисленных матриц A и B к решению системы диофантовых уравнений. Напомним, что матрицы A и B называются подобными над $\mathbb{Z}$, если существует унимодулярная матрица $Y\in GL(n,\mathbb{Z})$ такая, что $Y^{-1}AY=B$. Следовательно, задача распознавания подобия матриц A и B состоит в том, чтобы выяснить, существует ли в модуле Λ_{AB} матрица Y с $\det(Y)=\pm1$. Это приводит к системе диофантовых уравнений

$$f_j(y_1,\dots,y_p)=\sum_{i_1,\dots,i_{m_j}=1}^{p} b^j_{i_1,\dots,i_{m_j}} y_{i_1}\dots y_{i_{m_j}}=\pm1,\qquad j=1,\dots,\beta.$$

В случае $m_1=\dots=m_\beta=1$ все уравнения линейные, поэтому получаем полиномиальный алгоритм распознавания подобия.

Литература

1. Сидоров С.В. «О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел», Изв. вузов. Матем., 2011, № 3, 86–94; Russian Math. (Iz. VUZ), 55:3 (2011), 77–84. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030091.
2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Наука, М., 1967.
3. Newman M. Integral Matrices, Academic Press, 1972.
4. Laffey, Thomas J. «Lectures on Integer Matrices» (2002).
5. Graham A. «Kronecker Products and Matrix Calculus With Applications.» Ellis Horwood Limited, Chichester, 1981.

ЧАСТИЧНОЕ ОПИСАНИЕ КЛАССОВ ПОДОБИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ 4-ГО ПОРЯДКА[1*]

С.В. Сидоров, Г.В. Уткин

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе приведена частичная классификация целочисленных нильпотентных матриц 4-го порядка с минимальным многочленом степени 4 относительно подобия над кольцом целых чисел и описаны канонические представители классов подобия.

Ключевые слова: подобие матриц над кольцом, целочисленная матрица, нильпотентная матрица, кольцо целых чисел.

1. Введение

Известно, что над полем $\mathbb{Q}$ любая целочисленная матрица, все собственные числа которой целые, подобна жордановой форме. Однако подобие над кольцом $\mathbb{Z}$ существенно отличается от подобия над полем $\mathbb{Q}$. В частности, классы подобия над $\mathbb{Z}$ не ограничиваются лишь классами матриц, подобных жордановым формам. Другими словами, класс матриц, подобных над $\mathbb{Q}$, распадается на классы подобия над $\mathbb{Z}$. Имеющиеся инварианты, достаточные для классификации подобия матриц над полем $\mathbb{Q}$, не позволяют описать классы подобия над кольцом целых чисел.

Определение. Матрица $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над кольцом $\mathbb{Z}$ (обозначение $A \sim B$), если существует такая матрица $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрицу X называют трансформирующей.

В работах [1] и [2] были описаны классы подобия нильпотентных 4×4 матриц с минимальными многочленами λ^2 и λ^3 соответственно. В настоящей работе рассматривается семейство нильпотентных 4×4 матриц с минимальным многочленом λ^4. Известно, что всякая такая матрица подобна над кольцом $\mathbb{Z}$ верхней треугольной матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \geq 1.$$

Над полем $\mathbb{Q}$ они подобны одной и той же жордановой клетке J_4. Над кольцом $\mathbb{Z}$, напротив, элементы выше диагонали могут существенно влиять на класс подобия. Для случая $\mathrm{НОД}(a_1, a_3) = 1$ мы даём полное описание канонических матриц.

2. Описание канонических матриц

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}, \qquad (1)$$

где $\mathrm{НОД}(a_1, a_3) = 1,\ a_1, a_2, a_3 \geq 1$. Тогда A подобна над $\mathbb{Z}$ единственной матрице вида

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

$$R_A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & vk & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & uk \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, где

- если $a_1 \geq 2$ или $a_3 \geq 2$, то $a_1 u + a_3 v = 1, |u| < a_3, |v| < a_1, k = (a_1 b_2 + a_3 b_1) \bmod a_2$;
- если $a_1 = a_3 = 1$, то $u = 1, v = 0$ и $k = (b_1 + b_2) \bmod a_2$.

Следствие 1. Пусть $A, B \in \mathbb{Z}^{4\times4}$ – матрицы вида (1). Тогда $A \sim B \Leftrightarrow R_A = R_B$.

Следствие 2. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{4\times4}$ – матрица вида (1). Тогда $A \sim J_4 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Литература

1. Сидоров С.В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №5. С. 763–770.
2. Сидоров С.В., Уткин Г.В. Классы подобия целочисленных нильпотентных матриц 4-го порядка с минимальным многочленом степени не выше 3 // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXV Международной конференции (Н. Новгород, 17–19 ноября 2025 г.) – Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2025. – 221 с. 2025. С. 141–142.

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ И ГЛУБОКИХ МЕТОДОВ СОПОСТАВЛЕНИЯ ПРИЗНАКОВЫХ ОПИСАНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ПРОЦЕССОРАХ RISC-V

Д.М. Симонов, Т.С. Зиновьев, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача сопоставления признаковых описаний изображений, которая на практике возникает в процессе склеивания последовательности перекрывающихся фотографий в единую панораму. Выбираются классические и нейросетевые методы решения задачи, демонстрирующие лучшее качество на открытом наборе данных HPatches. Выполняется анализ качества при переходе от процессоров на базе архитектуры x86-64 к RISC-V, что подтверждает корректность их работы. Проводятся эксперименты для анализа производительности методов на RISC-V. Исследуются возможные пути развития моделей и методов с целью повышения производительности. Выполняется анализ времени склеивания полных панорам помещений на доступных образцах процессоров RISC-V на примере аудиторий ННГУ.

Ключевые слова: сопоставление признаковых описаний изображений, склеивание изображений, RISC-V, компьютерное зрение, глубокое обучение, набор данных HPatches.

1. Введение

Склеивание изображений – классическая задача компьютерного зрения. На практике она возникает при построении панорамы сцены из последовательности перекрывающихся фотографий, поступающих с камеры в процессе небольшого поворота. Решение данной задачи для пары изображений включает несколько основных этапов: сопоставление признаковых описаний изображений, регистрация и объединение изображений [1, 2]. На первом этапе выполняется поиск ключевых точек на изображениях (например, углы, ребра) и вычисление их векторов-описателей [3], а также сопоставление полученных признаковых описаний [3] с целью поиска одних и тех же ключевых точек на разных фотографиях сцены. На втором этапе осуществляется поиск матрицы преобразования одного изображения относительно другого и перевод точек изображений в одну систему координат [3]. Последний этап предполагает наложение преобразованных изображений и удаление различных артефактов.

Сопоставление признаковых описаний изображений является ключевым этапом в представленном пайплане, поскольку от качества сопоставления зависит итоговый результат склеивания. При этом методы сопоставления являются вычислительно трудоемкими, увеличение количества ключевых особенностей на изображениях приводит к росту сложности методов. В настоящее время на указанном этапе применяются как классические, так и нейросетевые подходы. Нейросетевые методы, как правило, обеспечивают более высокое качество сопоставления, но часто уступают классическим подходам по производительности [4]. Поэтому развитие и оптимизация данной группы методов для их последующего практического внедрения являются актуальным направлением исследований в компьютерном зрении.

Тенденции развития процессоров на базе архитектур RISC-V свидетельствуют о ближайших перспективах построения мобильных устройств на базе указанной архитектуры. Кроме того, активно развивается программный стек для процессоров RISC-V, обеспечивающий эффективное решение большого числа прикладных задач. Склеивание панорамы – базовая функция во многих мобильных приложениях, предназначенных для работы с камерой. Поэтому задача склеивания представляет интерес для исследования.

Цель настоящей работы – выполнить анализ качества и производительности классических и нейросетевых методов сопоставления изображений на современных образцах процессоров

RISC-V, выделить трудоемкие операции и наметить пути для оптимизации наиболее качественных нейросетевых моделей. Для достижения указанной цели разрабатывается бенчмарк [5], обеспечивающий запуск методов сопоставления изображений с использованием различных бэкендов. Он позволяет оценивать качество сопоставления изображений на открытом наборе данных HPatches [6]. Также бенчмарк предоставляет возможности для массовых запусков с целью определения ключевых метрик производительности и сбора времен выполнения преобразований, соответствующих разным типам слоев нейросетевых моделей.

2. Постановка задачи

Задача сопоставления предполагает, что имеется пара перекрывающихся изображений одной сцены. Пусть I_1 – первое (исходное) изображение, I_2 – второе (целевое) изображение. Для указанных изображений строятся наборы ключевых точек с использованием классических и нейросетевых детекторов: $K_1 = \left\{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_N^{(1)}\right\}$ и $K_2 = \left\{k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_M^{(2)}\right\}$ – множества ключевых точек на I_1 и I_2 соответственно. Далее для каждого множества ключевых точек вычисляются вектора-описатели (дескрипторы): $D_1 = \left\{d_i^{(1)}, i = \overline{1,N}, d_i^{(1)} \in \mathbb{R}^S\right\}$ и $D_2 = \left\{d_j^{(2)}, j = \overline{1,M}, d_i^{(1)} \in \mathbb{R}^S\right\}$ – множества дескрипторов для K_1 и K_2 соответственно.

Задача сопоставления состоит в том, чтобы на основании $(K_1, D_1), (K_2, D_2)$ построить множество пар соответствий $M = \left\{\left(d_{i_k}^{(1)}, d_{j_k}^{(2)}\right),\ i_k \in \{1, \dots, N\}, j_k \in \{1, \dots, M\}\right\}$ одних и тех же точек на разных изображениях сцены:

$$\phi: \{(K_1, D_1), (K_2, D_2)\} \to M.$$

3. Эксперименты

Эксперимент включает запуск различных комбинаций классических методов и нейросетевых моделей на системе с процессором x86-64, выбор наиболее перспективных подходов с точки зрения общепринятых показателей качества на наборе данных HPatches. Лучшее качество демонстрируют следующие комбинации методов детектирования ключевых точек и построения их описателей:

1. ALIKED [7] + LightGlue [8].
2. DISK [9] + LightGlue.
3. SIFT [10] + LightGlue.
4. DoGHardNet [8] + LightGlue.
5. SuperPoint [11] + LightGlue.

Перечисленные методы запускаются на RISC-V с использованием различных библиотек и фреймворков компьютерного зрения и глубокого обучения. Сравнение качества решения задачи сопоставления на x86-64 и RISC-V для выбранных комбинаций методов показывает воспроизводимость показателей качества, что свидетельствует о корректности проводимых экспериментов.

Далее осуществляется сбор показателей производительности и анализ наиболее трудоемких операций при запуске методов на системе с процессором SpacemiT K3. Чипы серии SpacemiT K3 используют технологию унифицированных интегрированных вычислений на базе архитектуры RISC-V. Они объединяют 8 высокопроизводительных вычислительных ядер X100 и 8 ядер A100 с поддержкой сверхширокого параллелизма для вычислений в сфере ИИ [1], т.е. для эффективного вывода нейронных сетей. Здесь проводится сборка фреймворков для запуска на ядрах X100. Следует отметить, что ключевая особенность SpacemiT K3 – наличие матричных расширений для ядер A100. В настоящее время поддержка матричных расширений имеется только в рамках специализированной реализации фреймворка глубокого обучения ONNXRuntime от SpacemiT, для которой недоступны некоторые зависимости, что не позволяет выполнить эффективный запуск вывода. При этом реализация базовых вычислительных ядер в ONNXRuntime является закрытой и поставляется в виде скомпилированной библиотеки. Под-

держка матричных расширений для запуска на ядрах A100 с целью получения максимальной производительности – одно из возможных направлений развития исследуемых фреймворков.

На последнем этапе эксперимента выполняется качественное сравнение результатов склеивания полных панорам помещений на основании последовательности перекрывающихся фотографий аудиторий ННГУ. Проводятся замеры времени склеивания для указанных практических примеров. Обсуждаются полученные результаты и формулируются пути для дальнейших исследований.

4. Заключение

Сопоставление признаковых описаний изображений – ключевой этап склеивания перекрывающихся изображений одной сцены. Качество данного этапа во многом определяет качество итогового панорамного изображения. Вычислительная сложность сопоставления существенно влияет на итоговое время склеивания.

Процессора RISC-V относятся к числу маломощных, поэтому вопросы производительности методов сопоставления при сохранении исходного качества являются ключевыми. Имеющиеся образцы процессоров на базе RISC-V адаптируются для достижения приемлемых результатов производительности при запуске обученных глубоких нейросетевых моделей. Эксперименты демонстрируют необходимость активного развития открытого программного стека, поддерживающего специализированные аппаратные AI-решения.

Литература

1. Xu S., Chen S., Xu R., Wang C., Lu P., Guo L. Local feature matching using deep learning: A survey // Information Fusion. 2024. Vol. 107. Art. 102344. DOI: 10.1016/j.inffus.2024.102344.
2. Yan N., et al. Deep Learning on Image Stitching With Multi-viewpoint Images: A Survey // Neural Processing Letters. 2023. Vol. 55. P. 3863–3898.
3. Szeliski R. Computer Vision: Algorithms and Applications. Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-030-34372-9.
4. Sun L., He M., Shao X., et al. CM-Bench: A Comprehensive Cross-Modal Feature Matching Benchmark Bridging Visible and Infrared Images // 2026 IEEE 20th International Conference on Control and Automation (ICCA). IEEE, 2026. P. 1494–1501. DOI: 10.48550/arXiv.2603.12690.
5. Репозиторий на GitHub. URL: [https://github.com/itlab-vision/feature-matching-mini] (дата обращения: 03.10.2026).
6. Balntas V., Lenc K., Vedaldi A., Mikolajczyk K. HPatches: A benchmark and evaluation of handcrafted and learned local descriptors // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2017. P. 5142–5150.
7. Zhao X., Wu X., Chen W., Chen P. C. Y., Xu Q., Li Z. ALIKED: A Lighter Keypoint and Descriptor Extraction Network via Deformable Transformation // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2023. Vol. 72. P. 1–16. DOI: 10.1109/TIM.2023.3276003.
8. Lindenberger P., Sarlin P.-E., Pollefeys M. LightGlue: Local Feature Matching at Light Speed // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). IEEE, 2023. P. 17627–17638. DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.01617.
9. Tyszkiewicz M. J., Fua P., Trulls E. DISK: Learning local features with policy gradient // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). 2020. Vol. 33. P. 14254–14265.
10. Lowe D. G. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision. 2004. Vol. 60, No. 2. P. 91–110. DOI: 10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94.
11. DeTone D., Malisiewicz T., Rabinovich A. SuperPoint: Self-Supervised Interest Point Detection and Description // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) Workshops. IEEE, 2018. P. 224–236. DOI: 10.1109/CVPRW.2018.00060.
12. SpacemiT. Chip Product Documentation. K3 Brief. URL: https://spacemit.com/community/document/info?lang=en&nodepath=hardware/key_stone/k3/k3_docs/root_overview.md (дата обращения: 03.10.2026).

РАЗРАБОТКА БЕНЧМАРКА ДЛЯ LU-РАЗЛОЖЕНИЯ ПЛОТНЫХ МАТРИЦ

М.В. Симонов, Е.А. Панова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В статье представлены результаты разработки и тестирования бенчмарка LU-разложения плотных матриц. Рассмотрена реализация блочного алгоритма с оптимизациями, ориентированными на параллельное выполнение в векторном режиме с использованием средств библиотеки OpenMP. Приведены результаты замеров на архитектурах x86_64 (Intel Xeon Silver 4310T) и RISC-V (SpaceMiT K1), а также на микроконтроллере К1921ВГ1Т [1] в условиях ограниченного объема памяти. Выполнено сравнение с реализациями аналогичных функций из Eigen 5.0.0 и Intel MKL 2023.0.0.

Ключевые слова: LU-разложение, производительность, параллельные вычисления, оптимизация программ, RISC-V, x86_64, микроконтроллер К1921ВГ1Т.

1. Введение

LU-разложение – одна из базовых операций линейной алгебры, лежащая в основе решения систем линейных уравнений, вычисления определителей и обращения матриц. Данная операция включена в состав библиотеки LAPACK – де-факто стандарта численных методов линейной алгебры [2]. Важной задачей является оптимизация реализации LU-разложения для различных архитектур, в том числе для микроконтроллеров архитектуры RISC-V.

Цель данной работы – разработка и исследование эффективности блочного алгоритма LU-разложения с оптимизациями, ориентированными на параллельное выполнение на микроконтроллерах архитектуры RISC-V.

2. Описание алгоритма

Операция LU-разложения для квадратных невырожденных матриц состоит в представлении матрицы A в виде произведения нижнетреугольной матрицы L и вехнетреугольной матрицы U. Каждый элемент матриц L и U можно вычислить по известным формулам на основе элементов матрицы A. В то же время для увеличения эффективности реализации широко используется рекурсивный блочный алгоритм разложения [3, 4].

Исходная матрица разбивается на подматрицы A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22} (рис. 1).

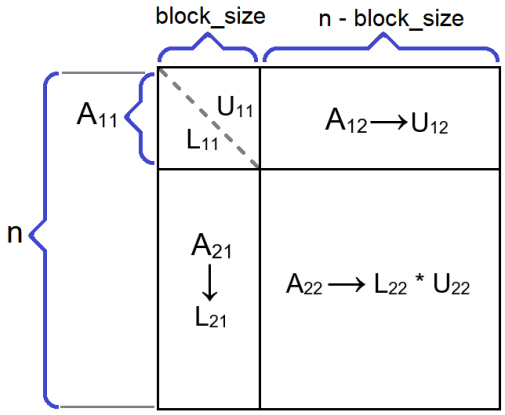


Рис. 1. Визуализация разбиения матрицы. Блочный алгоритм LU разложения

Здесь n – размер матрицы, $block_size$ – константный размер блока, задаваемый на этапе компиляции. На каждой итерации алгоритма происходит последовательная обработка подматриц в следующем порядке:

1. На первом этапе итерации алгоритма обрабатывается подматрица A_{11} последовательно. Формулы для вычисления элементов матриц для фиксированного $j = 0..block_size - 1$ имеют следующий вид:

$$\forall i \le j\colon u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\ ;\ \forall i > j\colon l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left[a_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right]$$

2. Далее параллельно обрабатываются подматрицы A_{12}, A_{21}. Их блочная обработка представляет собой решение треугольных систем с несколькими правыми частями:

$$A_{12} = L_{11} \cdot U_{12};\ A_{21} = L_{21} \cdot U_{11}$$

3. Обработка матрицы A_{22} описывается с помощью матричных операций:

$$\widetilde{A_{22}} = A_{22} - L_{21} \cdot U_{12}$$

На следующей итерации блочного алгоритма выполняется разложение матрицы $\widetilde{A_{22}}$ аналогичным образом. На последней итерации алгоритма выполняется разложение матрицы размера $block_size$ по формулам из пункта 1. В случае некратных размеров n и $block_size$ необходимо отдельно обработать прямоугольные блоки справа и внизу матрицы. Алгоритмическая сложность блочного алгоритма $O(n^3)$.

3. Использованные оптимизации

Далее перечислены используемые программные оптимизации для ускорения реализации алгоритма LU-разложения.

- Матрица хранится построчно с использованием выравнивания памяти при инициализации, что улучшает пространственную локальность данных и позволяет компилятору использовать выровненные векторные инструкции;
- Все матричные операции реализованы в блочном виде с варьируемым размером блока, что позволяет поместить данные, обрабатываемые в данный момент, в кэш процессора;
- Подобраны оптимальные размеры блоков ($block_size = 32$ для RISC-V и 64 для x86);
- Определен оптимальный порядок циклов для улучшения прохода по памяти;
- Произведен вынос инвариантов из циклов, например, арифметика указателей при расчете адресов элементов матрицы.

4. Эксперименты

4.1. Архитектура x86_64

Для тестирования производительности программы на процессорах архитектуры x86_64 использовались компилятор Intel(R) oneAPI DPC++/C++ Compiler 2023.0.0 и 2 процессора Intel Xeon Silver 4310T, характеристики:

- Векторный регистр 512 бит (AVX512);
- 2x10 физических ядер;
- Технология Hyper-Threading (2x20 логических ядер);
- Кэш-память:
  - Кэш L1: кэши команд L1i и данных L1d по 32 Кб;
  - Кэш L2: 1 Мб на каждое ядро;
  - Кэш L3: 15 Мб общий, доступный всем ядрам.

Тестирование проводилось с использованием матрицы размером 15000x15000 элементов типа double. Результаты замеров внесены в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты тестирования на x86_64

	Количество потоков										
Время, сек	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	144,98	71,55	36,66	25,23	20,77	16,91	13,98	13,03	11,59	11,2	10,3

По имеющимся результатам были построены графики ускорения и эффективности (рис. 3, рис. 4).

Рис. 3. Ускорение полученной реализации LU-разложения на архитектуре x86_64

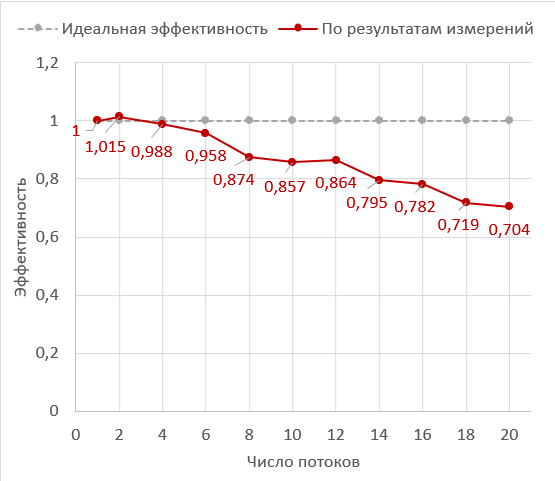


Рис. 4. Эффективность полученной реализации LU-разложения на архитектуре x86_64

Таким образом, при тестировании программы на 20 потоках удалось достичь ускорения в 14 раз. Также проводились экспериментальные замеры с использованием технологии Hyper-Threading, однако использование этой технологии не увеличило производительность программы. При замерах на 40 потоках полученное время вычисления LU разложения составило 10,63 секунды, достигнуто ускорение 13,64 раз и эффективность 70% относительно общего числа физических ядер.

4.2. Архитектура RISC-V

Для тестирования производительности программы на процессорах архитектуры RISC-V использовались кросс-компилятор GNU 15.1.0 и процессор Banana Pi RISC-V SpacemiT K1 (RVV 1.0), характеристики:

- Векторный регистр 256 бит;
- 8 физических ядер, разделенные на 2 кластера;
- Кэш-память:
  - Кэш L1: кэши команд L1i и данных L1d по 32 Кб;
  - Кэш L2: 512 Кб на кластер;
  - TCM (Tight-Coupled Memory): 512 КБ, доступна только для первого кластера – сверхбыстрая оперативная память, напрямую подключенная к ядрам процессора в обход стандартной шины.

Тестирование проводилось с использованием матрицы размером 5000x5000 элементов типа double. Результаты замеров внесены в таблицу 2.

Таблица 2. Результаты тестирования на Banana Pi RISC-V SpacemiT K1

	Количество потоков				
Время, сек	1	2	4	6	8
	167	80,8	39,6	27,2	20,9

По имеющимся результатам были построены графики ускорения и эффективности (рис. 5, рис. 6 соответственно).

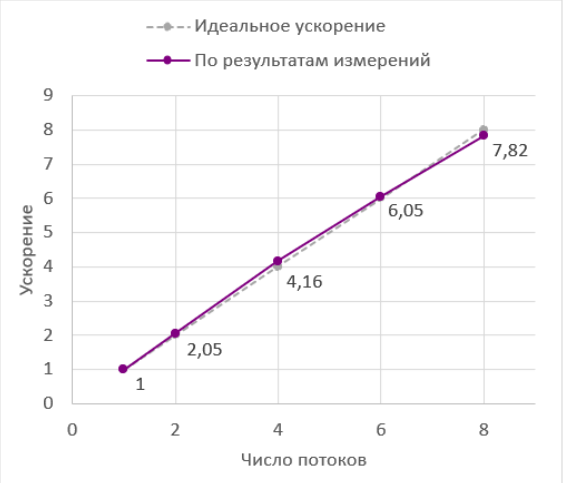


Рис. 5. Ускорение полученной реализации LU-разложения на архитектуре Banana Pi RISC-V

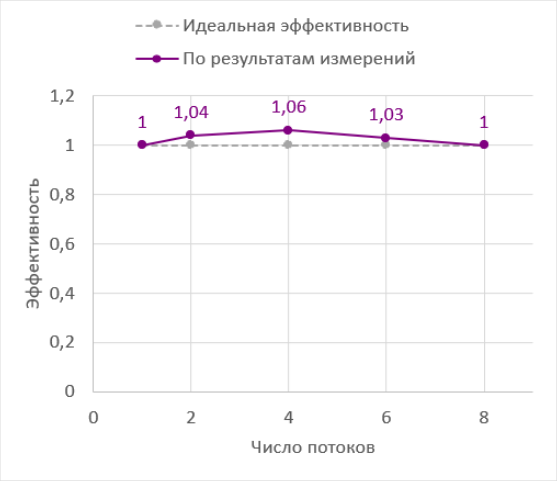


Рис. 6. Эффективность полученной реализации LU-разложения на архитектуре Banana Pi RISC-V

Несмотря на то, что, ввиду использования более слабого устройства, вычисления заняли на порядок большее время, благодаря подобранному размеру блока ($block_size = 32$) удалось достичь линейного ускорения.

4.3. Сравнение с аналогами

При замерах времени вычислений закономерно возникает необходимость сравнения производительности тестируемой программы и существующих аналогов. В качестве реализаций функции LU разложения, принятых за эталон, были использованы функции PartialPivLU библиотеки линейной алгебры Eigen (версия 5.0.0) [5] и LAPACK библиотеки Intel MKL (версия 2023.0.0).

Выбор Eigen обуславливается популярностью, активной поддержкой и простотой её использования – это header-only библиотека, не нуждающаяся в сборке под конкретную систему. Intel MKL была выбрана как эталон эффективности под процессоры Intel. На текущий момент Intel MKL невозможно запустить на экосистеме RISC-V.

Результаты замеров времени вычисления для матрицы 5000x5000 элементов внесены в таблицу 3.

Таблица 3. Время вычисления у аналогичных функций существующих библиотек

	Разработанная реализация		Eigen		Intel MKL
	x86_64	RISC-V	x86_64	RISC-V	x86_64
Время, мс	513	20892	421	26675	227

Таким образом, на архитектуре x86_64 функция библиотеки Eigen отработала приблизительно на 18% быстрее, а функция из Intel MKL – на 56% разработанной реализации. Однако при тестировании на RISC-V тестируемая функция показала лучшую производительность, отработав на 22% быстрее, чем соответствующая функция Eigen.

5. Микроконтроллер К1921ВГ1Т

5.1. Характеристики и ограничения

Для проведения дополнительных экспериментов на архитектуре RISC-V была выбрана макетно-отладочная плата на базе микроконтроллера К1921ВГ1Т от АО "НИИЭТ", ввиду её до-

ступности и простоты эксплуатации. Ниже приведены характеристики, важные для тестирования:

- Ядро: RISC-V SCR5 RV32IMAFDCP, до 204 МГц;
- Кэш:
  - По 32 Кб кэш команд и данных L1;
  - 128 Кб общий кэш L2;
- 1 Мб памяти ОЗУ с ECC.

Небольшой объем ОЗУ обусловил существенные ограничения возможностей для тестирования работоспособности и производительности программы.

1. В целях экономии оперативной памяти было принято решение отказаться от использования какой-либо операционной системы.
2. Объектный файл программы с расширением .elf имеет объем 789 Кб, что дополнительно ограничивает доступный объем оперативной памяти.
3. Несмотря на то, что функция LU разложения для хранения результата использует память, выделенную под исходную матрицу (т.е. практически не требует дополнительной памяти), этот объем крайне недостаточен. Путём проведения экспериментальных замеров получено, что максимальный размер матрицы – всего 250 эле-ментов при использовании типа double и 350 элементов при использовании типа float. Таким образом, вычисление LU разложения для больших матриц оказалось невозможным.
4. Несмотря на то, что микроконтроллер К1921ВГ1Т имеет 2 физических ядра, при тестировании программы не использовались средства многопоточности ввиду их неэффективности при работе с небольшим объемом данных. Иными словами, накладные расходы при использовании таких средств больше, чем ускорение, которое они обеспечивают. Кроме того, реализация многопоточности является нетривиальной задачей в условиях отсутствия операционной системы.

5.2. Результаты

Результаты замеров времени вычисления при различных размерностях внесены в таблицу и отображены на графике (рис. 7).

Таблица 4. Замеры времени вычислений на К1921ВГ1Т

Размерность матрицы	150 x 150	200 x 200	250 x 250	300 x 300	350 x 350
Время, сек	1,32	3,13	6,09	10,56	16,71

Рис. 7. График времени вычисления на К1921ВГ1Т

Экспериментальным путем установлено, что время вычисления при использовании данных типа float не отличается от времени вычисления для double, при идентичности размеров матриц.

6. Заключение

В ходе выполнения работы был успешно разработан и протестирован бенчмарк для LU-разложения плотных квадратных матриц, запускаемый на процессорах различных архитектур, в том числе на микроконтроллерах архитектуры RISC-V.

Результаты тестирования:

- на Intel CPU x86 (20 физических ядер): ускорение – 14 раз, эффективность – 70%;
- на RISC-V (8 физических ядер): линейное ускорение, эффективность 100%.

Таким образом, полученная реализация способна конкурировать с существующими аналогами, а на RISC-V она имеет лучшую производительность.

Также было продемонстрировано, что реализация высокопроизводительных вычислений для микроконтроллера К1921ВГ1Т возможна, однако, она осложнена недостатком оперативной памяти. Для полноценного использования микроконтроллера для подобных задач необходимо дополнительно увеличить доступный объем RAM.

Литература

1. АО «НИИЭТ». Микросхемы интегральные К1921ВГ1Т, К1921ВГ10Я. Руководство пользователя. Воронеж, 2026. 971 с. URL: https://static.chipdip.ru/lib2/b/423/DOC082423075.pdf (дата обращения: 02.10.2026).
2. E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. LAPACK Users' Guide. 3rd ed. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1999. URL: https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898719604?mi=athpmy&af=R&ContribAuthorRaw=Hammarling%2C+S&sortBy=relevancy&target=browse#1.
3. Баркалов К.А. Методы параллельных вычислений: методическое пособие. Н. Новго-род: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011. 124 с. (см. раздел 1.2.5. «БЛОЧНОЕ LU-РАЗЛОЖЕНИЕ») URL: https://studfile.net/preview/5837713/ (дата обращения: 03.10.2026).
4. G.H. Golub and C.F. Van Loan. Matrix Computations. 4th ed. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013, pp. 1-756. (см. главу 3 "General Linear Systems" и раздел 1.3 "Block Matrices and Algorithms"). URL: https://www.ee.iitb.ac.in/~belur/uplod/golub-van-loan-matrix-computations-2012-edition-4th.pdf
5. G. Guennebaud, B. Jacob, et al. Eigen v5.0.0 Documentation. 2025. URL: https://libeigen.gitlab.io/eigen/docs-5.0/ (дата обращения: 02.10.2026).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В АНИЗОТРОПНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ С ЛОКАЛЬНЫМ СГУЩЕНИЕМ СЕТКИ[1*]

И.Е. Смирнов, А.В. Васюков

Московский физико-технический институт

Разработана численная методика моделирования распространения упругих волн в композитных конструкциях на основе метода конечных элементов с квадратичными элементами на неструктурированных тетраэдральных сетках и схемы Ньюмарка HHT. Применено локальное сгущение сетки вблизи углов и пересечений конструкций для корректного разрешения концентраций напряжений. Методика применена к моделированию импульсного воздействия на композитные элементы. Подтверждена сходимость МКЭ в L2.

Ключевые слова: динамическая задача, метод конечных элементов, метод Ньюмарка, анизотропные материалы, сходимость, метод конечных элементов.

1. Введение

Распространение упругих волн в деформируемых твёрдых телах играет ключевую роль в геофизике, биомеханике, авиационной и машиностроительной отраслях, однако для анизотропных композитных конструкций, чувствительных к низкоскоростным ударам и обладающих сложной внутренней архитектурой, аналитические решения практически недоступны, что делает численное моделирование основным инструментом анализа. Среди численных подходов метод конечных элементов (МКЭ) на неструктурированных тетраэдральных сетках естественно адаптируется к произвольным геометриям и сложным определяющим законам, а интегрирование по времени схемой Ньюмарка в модификации Хилбера–Хьюза–Тейлора (HHT) обеспечивает оптимальный баланс точности, безусловной устойчивости и контролируемого подавления высокочастотных паразитных колебаний [1]. При этом локальное сгущение сетки вблизи углов и пересечений конструкций необходимо для корректного разрешения концентраций напряжений и сингулярностей, возникающих в элементах сложной формы.

2. Численный метод

Описание волновых процессов при малых упругих деформациях в приближении линейной упругости материала представляется системой уравнений равновесия и реологическим соотношением [2, 3]:

$$\rho\ddot{u} = \nabla \cdot \sigma + f$$
$$\sigma = \mathbb{C}: \varepsilon$$

Здесь ρ – плотность сплошной среды, u – вектор деформаций, σ – тензор напряжений, $\mathbb{C}$ – тензор упругих модулей, f – массовые силы на единицу объёма, ε – тензор малых деформаций.

Основная идея решения заключается в разбиении пространственной области на элементы и построении конечно-элементного пространства базисных пространственных функций известного вида. Каждая искомая переменная представляется линейной комбинацией базисных функций $(u_h)_i(t,x,y,z) = s(t)_{i,j} \cdot \varphi_j(x,y,z)$. Процесс отыскания решения исходной сводится к нахождению коэффициентов разложения $s(t)_{i,j}$ по базисным функциям. Таким образом, новый вектор искомых величин принимает вид $s = \{s_1 j, s_2 j, s_3 j\}$, и имеет размерность $3 \cdot J$, где J – количество базисных пространственных функций. Разбиение на конечные элементы – тетраэдры

[1*] Информация о финансовой поддержке помещается в виде сноски к названию статьи.

может производится при помощи специального программного модуля построения сеток Gmsh [4].

Построение конечно-элементного пространства и переход к системе ОДУ по времени относительно искомых коэффициентов s осуществляется с помощью FreeFem [5]:

$$M \cdot \ddot{s} + K \cdot s = b.$$

Решение полученной СЛАУ осуществляется методом Ньюмарка [6]. В рамках данных схем перемещения и скорости на новом временном слое аппроксимируются следующим образом:

$$s_{n+1} = s_n + \tau \dot{s_n} + \frac{\tau^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{s}_n + 2\beta\ddot{s}_{n+1}]$$

$$\dot{s}_{n+1} = \dot{s}_n + \tau[(1-\gamma)\ddot{s}_n + \gamma\ddot{s}_{n+1}]$$

Для введения контролируемой диссипации высокочастотных составляющих при сохранении второго порядка точности используется метод Хилбера–Хьюза–Тейлора (HHT- α) [7]. Суть метода заключается в замене уравнения равновесия его взвешенным средним, включающим внутренние, демпфирующие и внешние силы на текущем и следующем временных слоях:

$$M\,\ddot{s}_{n+1} + (1+\alpha)(C\dot{s}_{n+1} + Ks_{n+1}) - \alpha(C\dot{s}_n + Ks_n) = (1+\alpha)b_{n+1} - \alpha b_n$$

Параметр α управляет величиной численного демпфирования. Параметры метода Ньюмарка выбираются как функции от α:

$$\beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha$$

3. Результаты

Проведен анализ сходимости разработанной методики на серии неструктурированных тетраэдральных сеток, число элементов в которых варьировалось от 39 728 до 372 904. В качестве тестовой задачи рассматривалось распространение упругой волны в полупространстве с гладким локализованным скоростным импульсом. Полученные порядки сходимости в L2-норме составили 2.314 по медианной длине ребра и 2.878 по обратному кубическому корню из числа элементов.

Также методика применена к моделированию импульсного воздействия на анизотропную конструкцию – решетчатую структуру. Во всех случаях воспроизводилась пространственно-временная картина распространения упругих возмущений, а локальное сгущение сетки обеспечивало разрешение зон концентрации напряжений. Полученные результаты демонстрируют применимость методики к конструкциям сложной геометрии с анизотропными материалами.

Литература

1. Smirnov I.E., Vasyukov A.V. Numerical Modeling of Wave Propagation in Anisotropic Media and Complex Geometries // Mathematical Models and Computer Simulations, 2025, vol. 17, no. 2, pp. 204–213.
2. Bedford A., Drumheller D.S. Introduction to Elastic Wave Propagation, Springer Nature Switzerland, 2023.
3. Sedov L.I. A Course in Continuum Mechanics, Wolters-Noordhoff, 1971.
4. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, issue 11, pp. 1309–1331.
5. Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics, 2012, vol. 20, no. 3–4, pp. 251–266.
6. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, vol. 85, issue 3, pp. 67–94.
7. Hughes T.J.R. The Finite Element Method // Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

АЛГОРИТМ АДАПТАЦИИ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ НА ОСНОВЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВНЕШНЕГО ОБТЕКАНИЯ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ[1*]

Н.С. Смирнова, В.А. Титарев, О.В. Кравченко

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

Рассматривается предложенный вариант алгоритма r-адаптации расчетной сетки, в котором сетка представляется напряженной системой узлов с упругими связями, а жесткость связи определяется градиентом поля течения. Ранее алгоритм был апробирован только на двумерных задачах. Новизна работы состоит в его переносе на трехмерные задачи вязкого обтекания и в разработке параллельной версии с гибридным распараллеливанием MPI+OpenMP. Работоспособность алгоритма показана на задаче сверхзвукового обтекания аппарата Orion при различных углах атаки. Алгоритм обеспечивает сгущение узлов к фронту головной ударной волны с сохранением разрешения пограничного слоя, а точность решения на адаптированной сетке близка к точности на неадаптированной сетке с втрое большим числом ячеек.

Ключевые слова: адаптация расчетных сеток, r-адаптация, параллельные вычисления.

1. Введение

При численном моделировании сверхзвукового внешнего обтекания тел точность расчета аэродинамических нагрузок и тепловых потоков к поверхности во многом зависит от качества разрешения головной ударной волны на расчетной сетке. Измельчение сетки во всей расчетной области приводит к быстрому росту вычислительных затрат, поэтому широко применяются методы адаптации расчетной сетки. Методы r-адаптации перераспределяют узлы расчетной сетки без увеличения их общего числа и сохраняют ее топологию [1]. Среди них выделяются методы, основанные на механической аналогии. В них расчетная сетка рассматривается как система узлов с упругими связями заданной топологии, а жесткость связей определяется локальными параметрами поля течения [2, 3]. Такие методы применимы к сеткам произвольной размерности и топологии.

В работах [4, 5] предложен алгоритм адаптации, в котором начальное состояние сетки напряжено, а адаптированная сетка находится как положение равновесия упругих сил при наложенных граничных условиях. Алгоритм был апробирован на двумерных задачах сверхзвукового обтекания с головной ударной волной [4] и с системой взаимодействующих скачков уплотнения [5]. Новизна настоящей работы состоит в переносе этого алгоритма на трехмерные задачи вязкого обтекания тел сложной формы. Основная трудность заключалась в сохранении заложенного в исходной сетке разрешения пограничного слоя, где ячейки сильно вытянуты. Для адаптации сеток с большим количеством ячеек разработана параллельная версия алгоритма.

2. Описание алгоритма

В основе метода лежит алгоритм [4, 5], использующий механическую аналогию, в котором узлам расчетной сетки сопоставляются единичные массы, а ребрам упругие связи. Жесткость связи задается гладкой функцией, которая переключается между двумя уровнями в зависимости от градиента функции поля течения вдоль ребра. Отношение уровней жесткости определяет предельное сгущение ячеек в зоне разрешаемой особенности. Адаптированная сетка находится как положение равновесия системы методом установления с демпфированием. Узлы на по-

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 25-11-00359.

верхности тела неподвижны, а узлы на внешних границах области либо зафиксированы, либо перемещаются вдоль этих границ.

Для переноса алгоритма на трехмерные задачи вязкого обтекания выражение для упругой силы дополнено двумя слагаемыми. Первое сохраняет взаимное расположение узлов в пристеночной области и тем самым не нарушает заложенное в исходной сетке разрешение пограничного слоя. Второе слагаемое описывает упругую связь узла с его исходным положением и ограничивает деформацию сетки. Шаг по времени и коэффициент демпфирования рассчитываются локально для каждого узла. Критерием остановки итерационного процесса служит относительное уменьшение осредненной невязки баланса упругих сил.

Разработана параллельная реализация алгоритма с гибридным распараллеливанием MPI+OpenMP.

3. Результаты

Алгоритм проверен на задаче сверхзвукового обтекания аппарата Orion вязким совершенным газом и углах атаки 0° и 28.18°. Поля течения рассчитаны программным комплексом FlowModellium [6]. Адаптация расчетной сетки выполнялась по полю давления на сетках из 1 и 3 млн ячеек. Решение на адаптированной сетке из 1 млн ячеек сопоставлялось с решениями на исходной сетке и на сетке из 3 млн ячеек, а при угле атаки 28.18° также с экспериментом [7].

После адаптации сеточные линии выстраиваются вдоль фронта головной ударной волны, а сгущение сетки у стенки сохраняется. На сетке из 1 млн ячеек численная толщина скачка уменьшается более чем в два раза. Давление торможения и тепловой поток приближаются к значениям на сетке с втрое большим числом ячеек. При угле атаки 28.18° тепловой поток на адаптированной сетке согласуется с экспериментом в пределах его погрешности. При адаптации сетки из 3 млн ячеек, на которой течение разрешено с достаточной точностью, решение изменяется незначительно. Качество сетки после адаптации сохраняется на приемлемом для практических расчетов уровне. Расчеты при обоих углах атаки выполнены на одной исходной сетке без изменения параметров адаптации. Сетка подстраивается под конкретный режим обтекания на этапе адаптации, поэтому построение отдельной сетки для каждого режима не требуется. Полученные результаты подтверждают применимость предложенного алгоритма адаптации к трехмерным задачам вязкого сверхзвукового обтекания.

Литература

1. Vivarelli G., Qin N., Shahpar S. A Review of Mesh Adaptation Technology Applied to Computational Fluid Dynamics // Fluids. 2025. Vol. 10, No. 5. Art. 129.
2. Garanzha V.A. Variational Principles in Grid Generation and Geometric Modelling: Theoretical Justifications and Open Problems // Numerical Linear Algebra with Applications. 2004. Vol. 11, No. 5–6. P. 535–563.
3. Вершков В.А. Математическое моделирование процесса обтекания шарнирного несущего винта вертолета методом деформируемых неструктурированных сеток: дис. … канд. техн. наук. М., 2021. 116 с.
4. Voronich I.V., Smirnova N.S., Titarev V.A. Algorithm for Mesh Adaptation to a Flow Field with a Bow Shock Wave // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, No. 9. P. 2111–2120.
5. Voronich I.V., Smirnova N.S., Titarev V.A. Application of a Mesh Adaptation Algorithm to Gas Flows with Interacting Shock Waves // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. 9. P. 4543–4550.
6. Петров М.Н., Тамбова А.А., Титарев В.А., Утюжников С.В., Чикиткин А.В. Программный комплекс FlowModellium для расчета высокоскоростных течений сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 11. С. 1932–1954.
7. Hollis B.R., Horvath T.J., Berger K.T., Lillard R.P., Kirk B.S., Coblish J.J., Norris J.D. Experimental Investigation of Project Orion Crew Exploration Vehicle Aeroheating in AEDC Tunnel 9. NASA/TP-2008-215547. 2008.

К ВОПРОСУ О КОМПЬЮТЕРНОМ АНАЛИЗЕ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С.Н. Стребуляев, А.М. Круглов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Изучение хаотического поведения в нелинейных системах является популярной областью исследований в течение последних нескольких десятилетий. Ранее проводились исследования, в основном теоретические, различных нелинейных хаотических систем. Известные математические модели Дуффинга и Лоренца были тщательно, по большей части теоретически, изучены, поскольку многие динамические характеристики, заложенные в этих физических системах, могут быть реализованы в конкретных технических конструкциях. Исследования вышеуказанных математических моделей проводилось с помощью разработанного авторами программного обеспечения. В процессе компьютерного моделировании была использована система аналитических вычислений (САВ).

Ключевые слова: хаотическое поведение, фазовый портрет, модель Дуффинга, модель Лоренца.

1. Введение

В настоящее время при исследовании конкретных динамических систем получило широкое распространения методология математического моделирования и вычислительного эксперимента [1 – 4]. Эта методология охватывает многие сферы, от разработки комплексов технических систем и управления ими до анализа сложных технических, экономических, биологических и ряда других систем и процессов. Математическое моделирование развивается в недрах фундаментальных наук: механики и физики, которые отличают наивысший уровень теоретических исследований. В настоящей работе приводятся фрагменты многофакторного вычислительного эксперимент по анализу зависимостей характеристик хаоса от параметров системы с использованием современных средств вычислительной техники и программного обеспечения. По мнению авторов, использование описанных выше средств компьютерного моделирования с наличием стандартных программ численного интегрирования позволило получить, по сравнению с аналитическими исследованиями, новые результаты.

Динамика роста вычислительных возможностей современных компьютеров достаточно высока и позволяет надеяться на успешное решение все более сложных задач.

2. Основной результат

2.1. Хаотические режимы в модели Лоренца

Рассматривается общеизвестная модель Лоренца [3, 4], в виде системы трех автономных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Определяются состояния равновесия в количестве трех (при $r > 1$) и одном (при $r = 1$). На базе этих зависимостей создано универсальное программное обеспечение. Это обеспечение выполняет численный расчет динамических характеристик: вычисление координат состояний равновесия, анализ интегральных кривых и фазового пространства в окрестностях каждого из состояний равновесия, и построение глобальной структуры фазового пространства. Также реализован алгоритм, позволяющий при изменении параметров системы, определять наличие или

отсутствие хаоса (рис. 1). В процессе компьютерного моделирования используются возможности САВ в области численного решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с визуализацией результатов расчетов и виде графиков в режиме анимации.

Ниже приведены результаты компьютерного моделирования и указаны параметры в модели Лоренца. (рис. 2, 3).

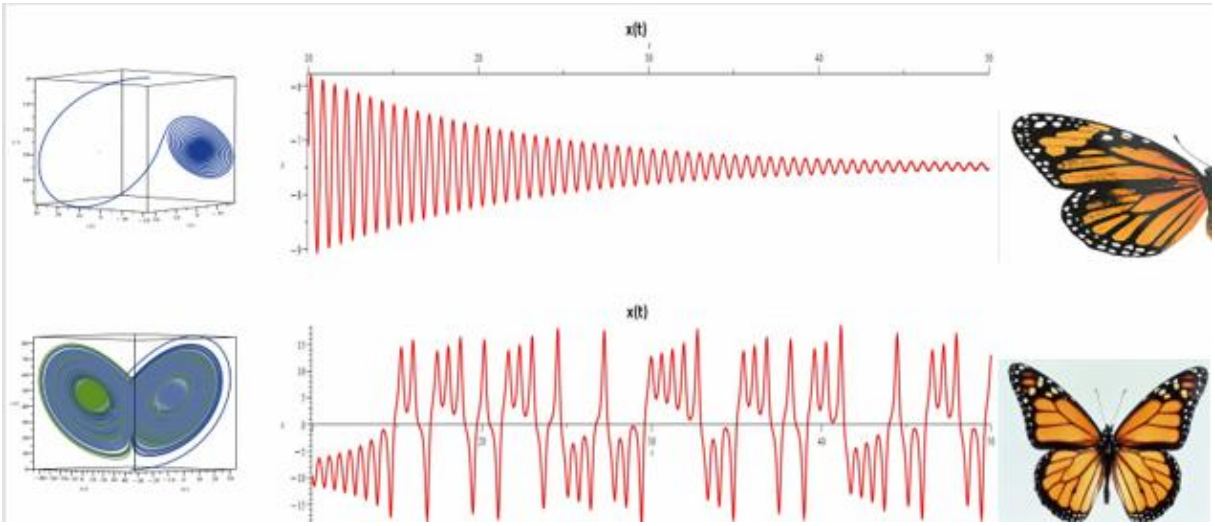


Рис. 1. Глобальная структура фазового пространства и интегральные кривые

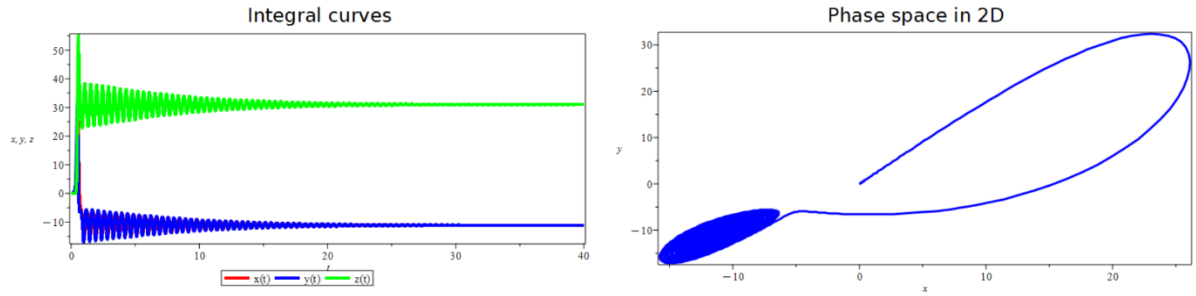


Рис. 2. Интегральные кривые и фазовый портрет системы Лоренца для $r = 32, b = 4, \sigma = 20$

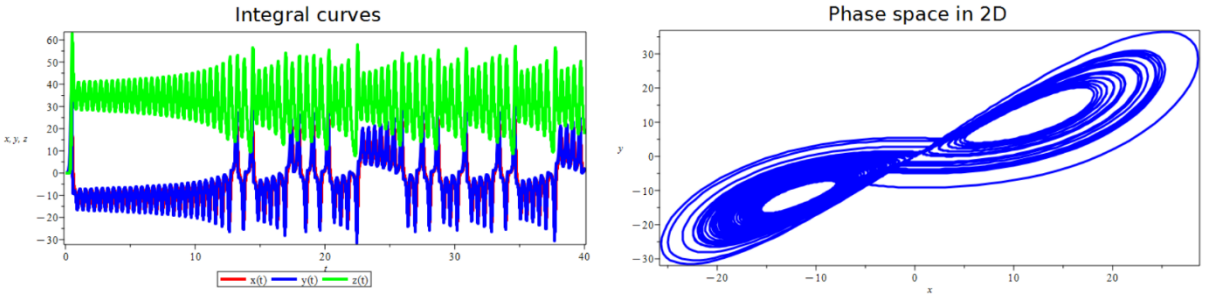


Рис. 3. Интегральные кривые и фазовый портрет системы Лоренца для $r = 36, b = 4, \sigma = 20$

В дальнейшем проведен многофакторный анализ и получены области наличия и отсутствия хаоса при изменении параметров r, b, σ. Результаты исследований приведены ниже (рис. 4, 5).

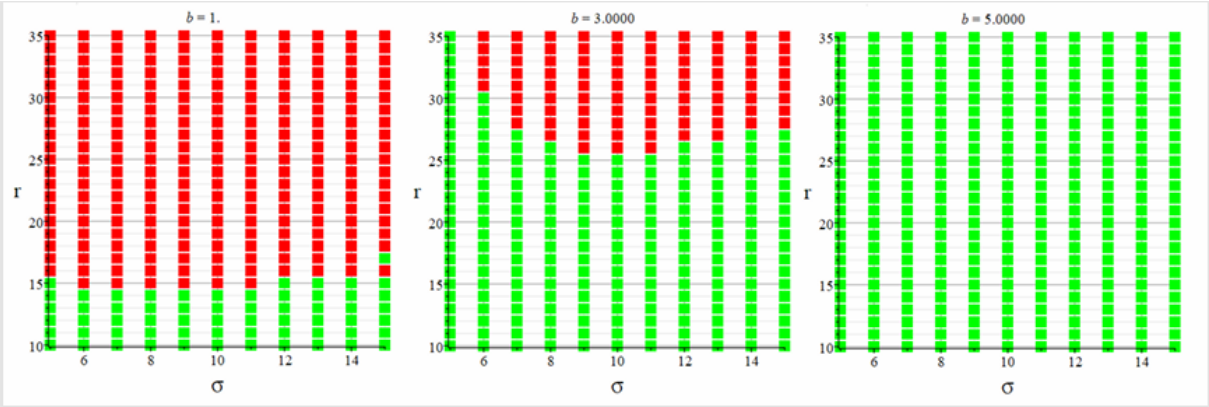


Рис. 4. Области наличия и отсутствия хаоса при изменении параметров r, b, σ

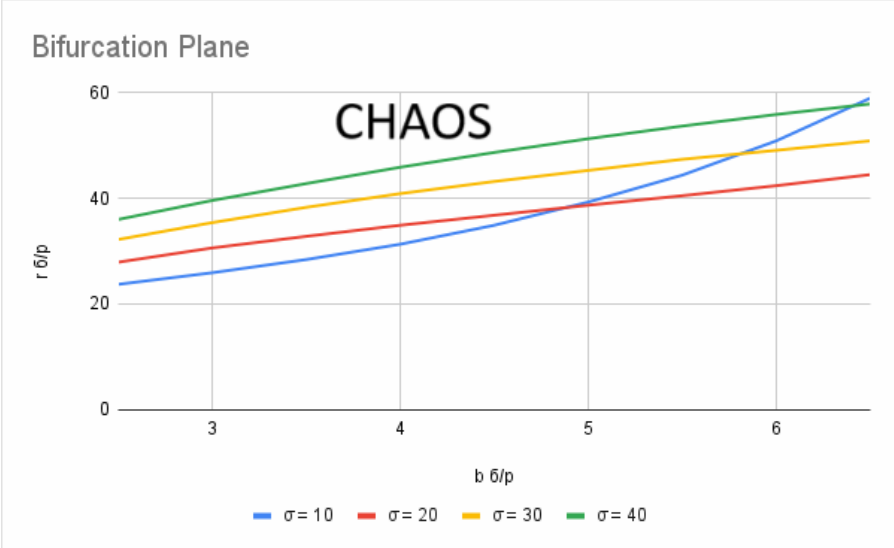


Рис. 5. Границы возникновения хаоса в пространстве параметров модели Лоренца

На следующем этапе проводился вычислительный эксперимент по анализу динамических характеристик модели Лоренца для случая $r = 1$ (рис. 6).

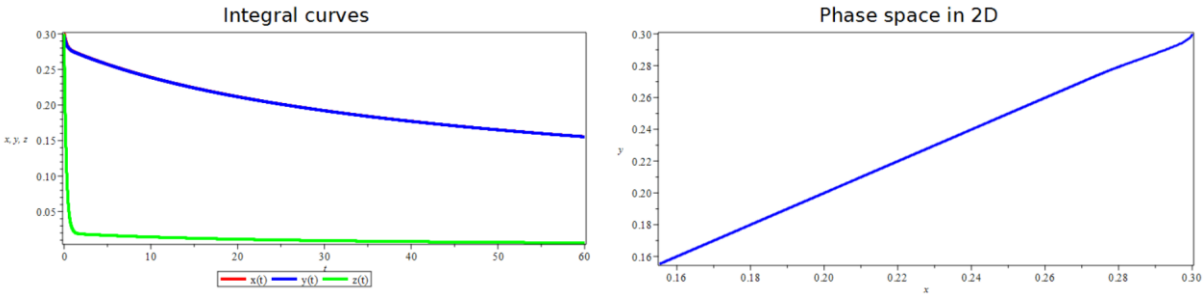


Рис. 6. Динамические характеристики системы Лоренца для $r = 1$

2.2. Хаотические режимы в неавтономной модели Дуффинга

Нелинейный осциллятор, описываемый уравнением Дуффинга и находящийся под действием гармонической внешней силы, содержащий, в общем случае, постоянную составляющую, имеет вид [3]:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + \gamma x^3 = B_0 + B\cos\omega t$$

Для этого уравнения, согласно [3], рассматриваются различные виды упругих характеристик: мягкая ($k > 0,\ \gamma < 0$), жесткая ($k > 0,\ \gamma > 0$), с нулевой ($k = 0,\ \gamma > 0$) и отрицательной ($k < 0,\ \gamma > 0$) линейной жесткостью.

Как при мягкой, так и при жесткой упругой характеристике хаотические колебания существуют при достаточно большой амплитуде внешней силы в некотором интервале частот ω.

Результаты вычислительного эксперимента для $x(t)$ и фазовые портреты приведены на рис. 7, 8.

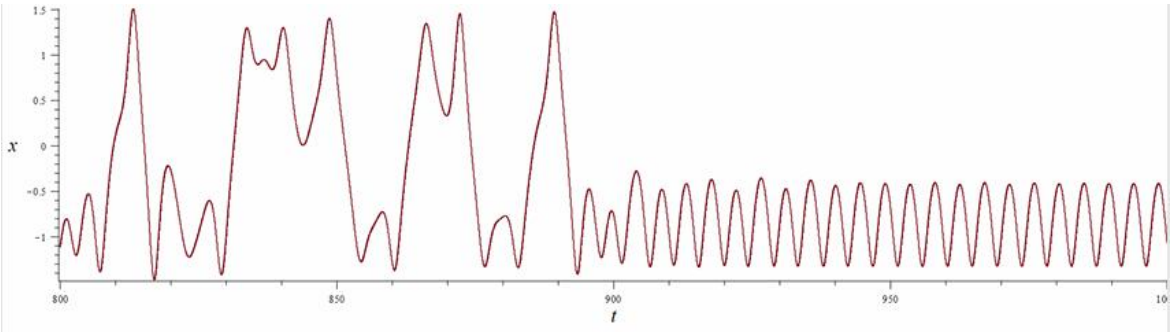


Рис. 7. Зависимость $x(t)$ при значениях параметров $\alpha = 0.1,\ k = -1,\ \gamma = 1,\ B_0 = 0,\ B = 0.3,\ \omega = 1.4$

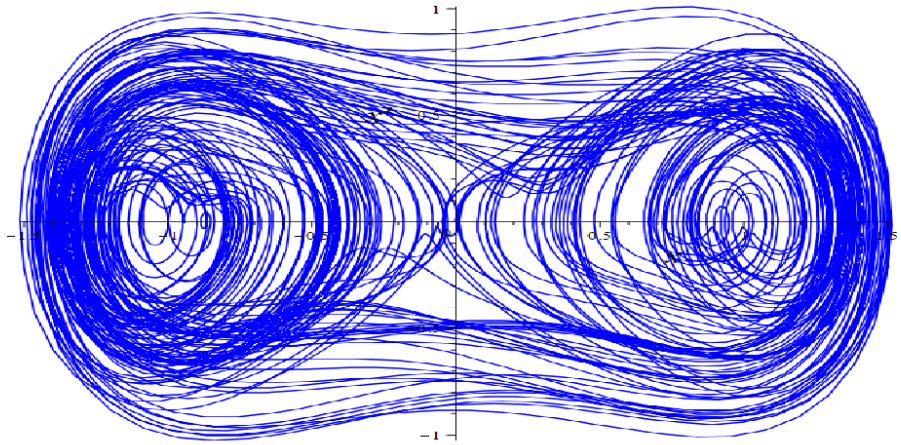


Рис. 8. Фазовый портрет системы Дуффинга при параметрах: $\alpha = 0.1,\ k = -1,\ \gamma = 1,\ B_0 = 0,\ B = 0.3,\ \omega = 1.4$

В дальнейшем проводился компьютерный анализ интегральных кривых и фазового пространства для определения наличия или отсутствия хаоса для случаев, приведенных в [3].

На первом этапе проводился анализ хаотических движений в плоскости параметров (ω, α) (рис. 9). Наличие хаотических движений не наблюдалось почти во всех точках выбранного диапазона параметров ω и α. В некоторых точках были выявлены неустойчивые режимы.

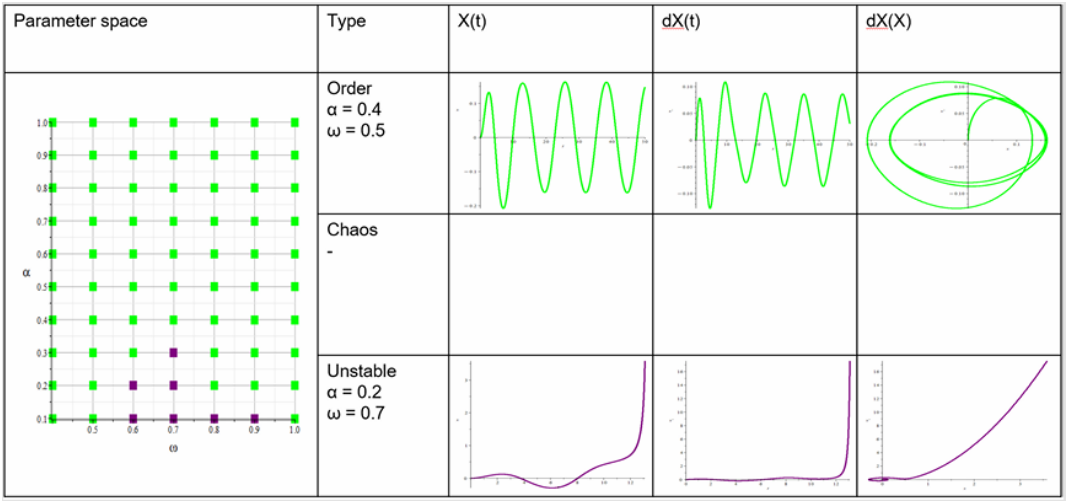


Рис. 9. Мягкая характеристика при параметрах: $k = 1,\ \gamma = -4,\ B_0 = 0,\ B = 0.115$

На втором этапе анализировались характеристики в плоскости тех же параметров при $k = 0$ и $\gamma > 0$ (рис. 10). В этом случае имеем различный характер интегральных кривых и существенная разница в виде фазового пространства.

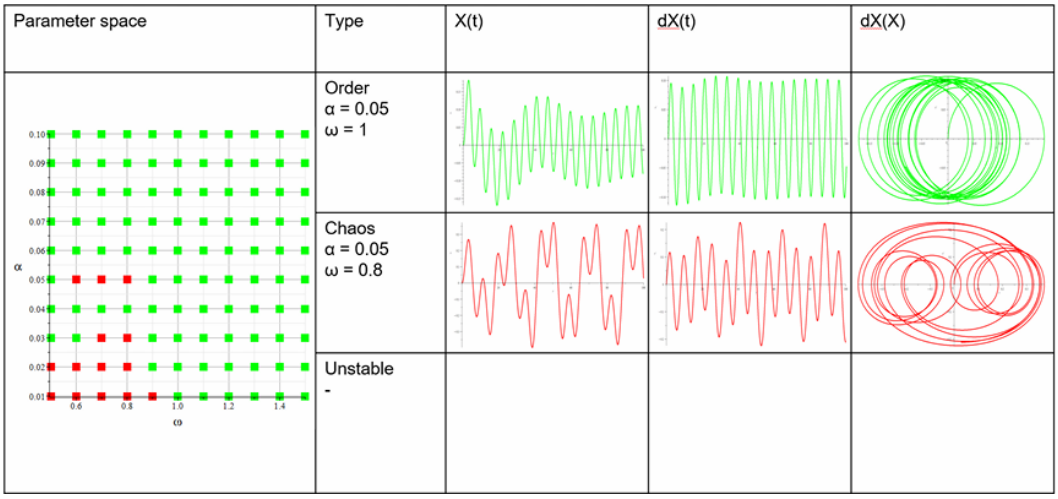


Рис. 10. Нулевая характеристика при параметрах: $k = 0,\ \gamma = 1,\ B_0 = 0,\ B = 0.1$

Для случая отрицательного режима было выявлено, что наличие хаоса наблюдается лишь в некоторых точках плоскости выбранных параметров и существенное отличие в картине фазового пространства (рис. 11).

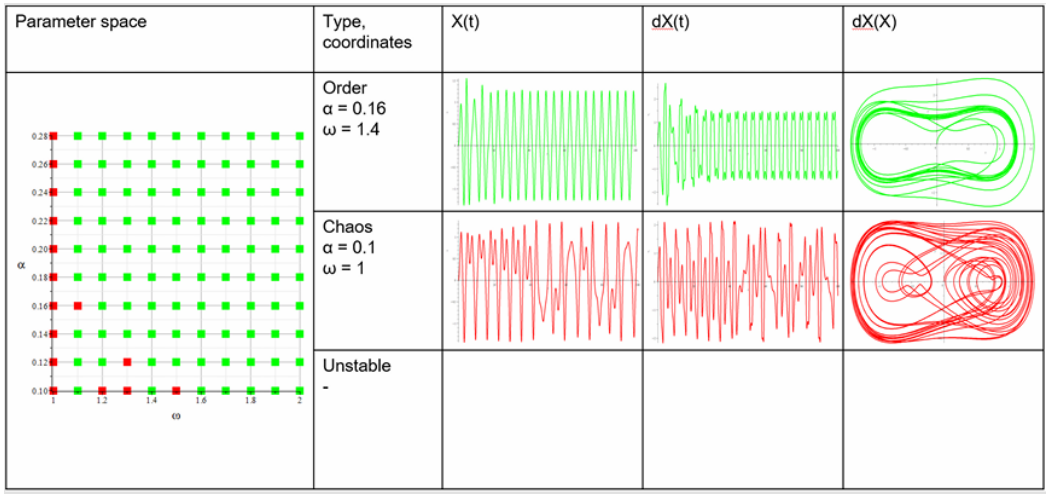


Рис. 11. Отрицательная характеристика при параметрах: $k = -1,\ \gamma = 4,\ B_0 = 0,\ B = 1.5$

Полученные результаты компьютерного эксперимента позволяют проанализировать фазовые портреты, как наиболее информативные для выявления хаотического режима, приведенные на рис. 12. Это позволит в дальнейшем с использованием искусственного интеллекта проводить достаточную диагностику наличия и отсутствия хаоса для исследуемой динамической системы Дуффинга.

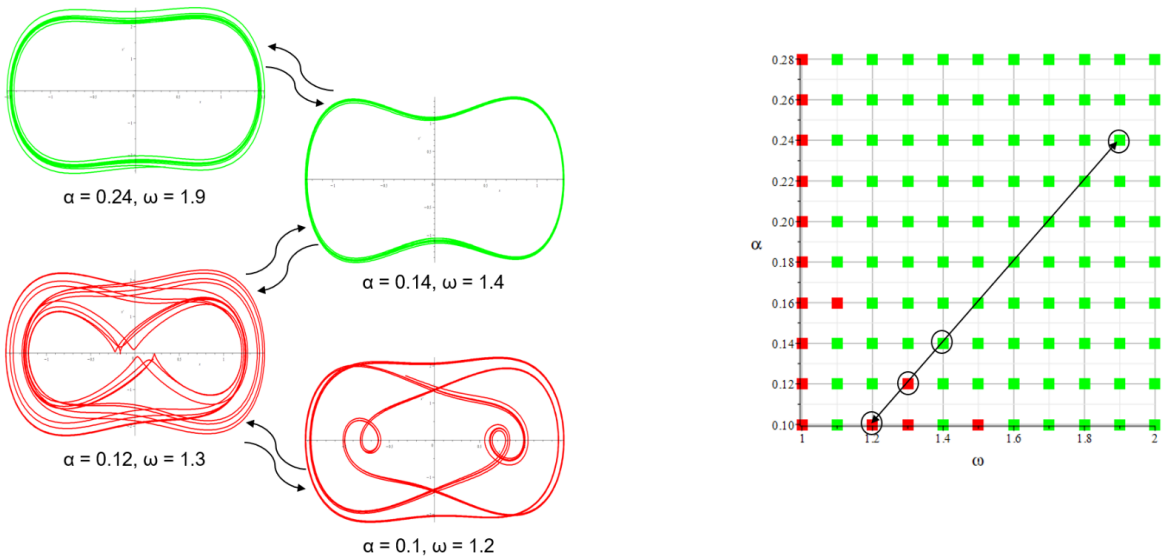


Рис. 12. Динамика развития хаоса на примере отрицательной характеристики

3. Заключение

В рассмотренной работе приведены некоторые результаты математического моделирования и расчета характеристик хаотического движения в моделях Лоренца и Дуффинга. Рассмотрение указанных систем проводилось в полной мере с учетом всех их нелинейных характеристик без каких-либо упрощений. Использование САВ для достижения результатов исследования показало эффективность этого программного обеспечения. Полученные результаты исследований и разработанное универсальные программные средства позволят в дальнейшем проводить более детальный качественный и количественный анализ систем, аналогичных исследованным выше.

Литература

1. Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А. // Учебно-исследовательские проекты по анализу динамического качества технических систем и процессов с использованием их математических моделей, Современные информационные технологии и ИТ-образование.2021. Т.17. №2. С.392-403.
2. Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А., Сингх Д. Автоматизированный расчет характеристик сложных динамических систем//В сборнике: XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. сборник научных трудов. Москва, 2024. С. 2700-2704.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания / Неймарк Ю.И., Ланда П.С. – Москва, Изд. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987 г.
4. Кузнецов С.П. // Динамический хаос – Москва, 2001 г.
5. Стребуляев С.Н., Круглов А.М. Компьютерный анализ хаотического поведения в динамических системах// Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого), Москва, 03–05 июня 2026 года. С. 336-340.

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ НА ПРОЦЕССОРАХ RISC-V И X86

Д.И. Тараканов, А.Ю. Пирова, И.Б. Мееров

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Сравниваются 15 реализаций точных алгоритмов поиска кратчайшего пути в дорожных графах (алгоритм Дейкстры, A*, ALT, двунаправленный поиск, Δ-stepping) на процессоре Intel Xeon и процессорах RISC-V SpacemiT K3 и K1. На одном ядре алгоритм Дейкстры на RISC-V медленнее в 1,7–2,2 (K3) и 3,7–7,5 раза (K1), а ALT – в 4,8–5,5 и 9,5–13,5 раза, поэтому порядок алгоритмов на x86 и RISC-V различается.

Ключевые слова: кратчайший путь в дорожных графах, алгоритм Дейкстры, ALT, Δ-stepping, RISC-V.

Поиск кратчайшего пути в дорожном графе – основа навигационных сервисов. Точные алгоритмы для него [1–5] обычно сравнивают на x86, а работы о RISC-V чаще касаются линейной алгебры и ядер, ограниченных пропускной способностью памяти [6]. Цель работы – выяснить, во сколько раз RISC-V уступает x86 на разных алгоритмах и сохраняется ли их порядок.

Сравнивались 15 реализаций на C++20 с OpenMP [7]. Алгоритм Дейкстры [1] взят с бинарной кучей и с 4-арной, pairing- и биномиальной кучами из Boost. Кроме него, взяты A* с геометрической эвристикой (A*G) [2] и ALT с 16 маяками [3]; у всех трёх есть двунаправленные варианты (обозначены «дв.»). Шесть параллельных реализаций построены на Δ-stepping [4]: без эвристики и с эвристиками A*G и ALT, одно- и двунаправленные.

Граф Нижнего Новгорода (NN, 5,6 тыс. вершин) взят из OpenStreetMap, графы Нью-Йорка (NY, 264 тыс.), Флориды (FLA, 1,07 млн) и запада США (W, 6,26 млн) – из конкурса DIMACS [8], веса везде – длины дорог. Цель запроса ранга r – вершина, 2^r-я по удалённости от случайного источника [5]; источников 100 (для W – 50), дальние – три старших ранга. Ширину корзины Δ подбирали для каждой платформы и алгоритма на отдельных запросах FLA. Все платформы решали одни и те же запросы, ответы сверены с эталоном, ошибок нет. Каждый запрос выполнялся один раз после прогрева (повторные запуски на одном потоке расходятся не более чем на 0,5%). Отношения времён – отношения средних на тех же запросах.

Платформа x86 – один сокет узла с двумя Intel Xeon Silver 4310T (10 ядер, 2,3–3,4 ГГц), RISC-V – платы SpacemiT K3 (8 ядер X100, 2,2 ГГц, 8 ГБ) и K1 (8 ядер X60, 1,6 ГГц, 16 ГБ). Всё собрано GCC 14.2 с -O3 под базовые наборы команд x86-64 и rv64gc; потоки закреплены по ядрам. Параллельные алгоритмы сравниваются на 8 потоках на двух старших рангах.

Алгоритм Дейкстры отвечает на дальний запрос графа W за 346 мс на x86, 0,76 с на K3 и 2,6 с на K1; с ростом графа его отставание (табл. 1) растёт на K1 с 3,7 до 7,5 раза, а на K3 только с 1,7 до 2,2. От алгоритма отставание зависит сильнее: с pairing-кучей алгоритм Дейкстры на K3 медленнее лишь в 1,6–1,7 раза, а алгоритмы с дополнительной работой на вершину (оценка расстояния у A*G и ALT, корзины и атомарные операции у Δ-stepping) теряют больше.

Таблица 1. Во сколько раз дальний запрос на RISC-V медленнее, чем на x86

Алгоритм	K3 / x86				K1 / x86				x86, W, мс
	NN	NY	FLA	W	NN	NY	FLA	W	
Дейкстра, бинарная куча	1,7	2,1	2,1	2,2	3,7	5,6	5,6	7,5	346
Дейкстра, pairing-куча	1,6	1,6	1,6	1,7	3,5	4,2	4,3	5,8	826
A*G	1,5	2,9	2,9	3,2	3,1	7,4	7,9	10,7	189
ALT	4,8	5,5	5,3	5,2	9,5	13,1	13,1	13,5	26,0
Δ-stepping, 1 поток	2,0	3,1	3,1	3,6	4,7	10,3	10,9	16,7	248
дв. ALT-Δ, 8 потоков	4,4	8,0	6,2	7,4	8,1	14,2	12,0	14,7	16,7

Поэтому на RISC-V они выигрывают у Дейкстры меньше (рис. 1): ALT на W быстрее Дейкстры в 13,3 раза на x86 и в 5,6 и 7,4 раза на K3 и K1, а A*G и Δ-stepping на одном потоке

на NY и FLA обгоняют Дейкстру только на x86. Кучи из Boost на всех платформах проигрывают бинарной: на W алгоритм Дейкстры с ними медленнее в 1,3–3,7 раза. Коэффициент τ Кендалла для порядков 15 алгоритмов на одном потоке равен 0,47–0,66 между x86 и RISC-V и 0,87–0,94 между K3 и K1.

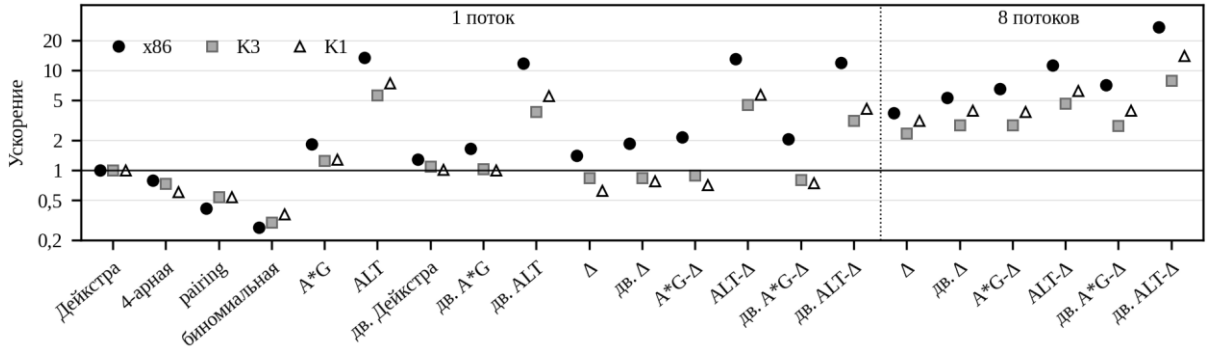


Рис. 1. Ускорение относительно алгоритма Дейкстры той же платформы на дальних запросах графа W

На 8 потоках на FLA и W быстрее всех дв. ALT-Δ: на W он отвечает за 16,7, 124 и 245 мс (x86, K3, K1), в 26,9, 7,9 и 13,9 раза быстрее Дейкстры своей платформы и в 2,0, 1,4 и 1,8 раза быстрее ALT, лучшего на одном потоке. Δ-stepping на W на 8 потоках быстрее, чем на одном, в 2,7, 2,8 и 5,0 раза. На небольших графах параллельность не окупается: на NN на всех платформах, а на NY на x86 и K3 быстрее всех последовательные алгоритмы. Загрузка W занимает 6,5, 19 и 43 с, маяки ALT добавляют 29, 61 и 189 с и окупаются через 84–98 дальних запросов.

Итак, на одном ядре выбирать алгоритм для RISC-V по замерам на x86 нельзя. Когда параллельные алгоритмы работают на 8 потоках, на больших графах порядок почти совпадает (τ = 0,81–0,92 на NY, FLA и W), и лучшим везде остаётся дв. ALT-Δ. В дальнейшем планируется оценить влияние векторного расширения RVV и подсистемы памяти на скорость алгоритмов.

Литература

1. Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. 1959. Vol. 1. P. 269–271. DOI: 10.1007/BF01386390.
2. Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. 1968. Vol. 4, No. 2. P. 100–107. DOI: 10.1109/TSSC.1968.300136.
3. Goldberg A.V., Harrelson C. Computing the Shortest Path: A* Search Meets Graph Theory // Proc. of the 16th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms. SIAM, 2005. P. 156–165.
4. Meyer U., Sanders P. Δ stepping: a parallelizable shortest path algorithm // Journal of Algorithms. 2003. Vol. 49, No. 1. P. 114–152. DOI: 10.1016/S0196-6774(03)00076-2.
5. Bast H., Delling D., Goldberg A., et al. Route Planning in Transportation Networks // Algorithm Engineering. Springer, 2016. P. 19–80. (LNCS; vol. 9220). DOI: 10.1007/978-3-319-49487-6_2.
6. Volokitin V., Kozinov E., Kustikova V., et al. Case Study for Running Memory-Bound Kernels on RISC V CPUs // Parallel Computing Technologies. Springer, 2023. P. 51–65. (LNCS; vol. 14098). DOI: 10.1007/978-3-031-41673-6_5.
7. Реализации алгоритмов и программы замеров. URL: https://github.com/Chiks37/shortest-path (дата обращения: 04.10.2026).
8. 9th DIMACS Implementation Challenge: Shortest Paths. URL: http://www.diag.uniroma1.it/challenge9/ (дата обращения: 04.10.2026).

РАЗРАБОТКА И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

В.А. Титарев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

Традиционным приложением уравнений механики разреженного газа является моделирование аэродинамики и теплообмена космических аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы. При входе аппарата в атмосферу с большой скоростью определяющими являются эффекты разреженности и сильной неравновесности течения. Так как экспериментальные исследования данной задачи сопряжены со значительными техническими трудностями, целесообразно основные аэротермодинамические характеристики изучать методами вычислительной физики.

Другие приложением является моделирование процесса импульсной лазерной абляции, которая широко используется в различных технологиях, связанных с осаждением тонких пленок, синтезом наночастиц, обработкой и структурированием поверхности. Исследования лазерной абляции в вакууме являются важными для изучения механизмов и динамики процесса абляции на основе анализа времяпролетных и угловых распределений разлетающихся частиц. Для корректной интерпретации экспериментальных данных необходимо представлять в целом динамику разлета облака продуктов абляции в вакууме.

Последние годы в ФИЦ ИУ РАН развиваются численные методы решения кинетических уравнений [1-3] с приближенными (модельными) операторами столкновений БГК [4] и Е.М. Шахова [5] в приложении к сложным многомерным течениям одноатомного разреженного газа. Данные методы внедряются в параллельный расчетный код “Несветай”. В расчетах используется авторская версия метода дискретных скоростей, включающая в себя неоднородную конечно-объемную схему аппроксимации оператора переноса на произвольных пространственных сетках и консервативный способ расчета макропараметров на неструктурированной скоростной сетке. При расчете стационарных течений дискретизация по времени осуществляется с помощью экономичной одношаговой схемы. В нестационарных расчетах может использоваться алгоритм решения на подвижной сетке в физическом пространстве. Для ускорения вычислений в коде реализован двухуровневый MPI+OpenMP подход к организации параллельных вычислений, позволяющий использовать в расчетах тысячи физических ядер x86.

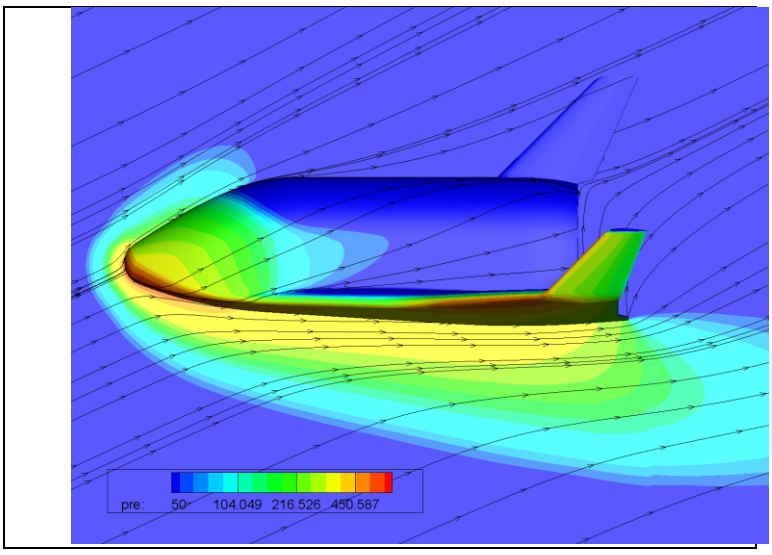


Рис. 1. Картина обтекания модели ВКА на высоте 100 км.

В докладе будут представлены примеры использования кода “Несветай”для моделирования сложных течений разреженного газа, возникающих в задачах высотной аэродинамики [2,6], импульсной лазерной абляции [7] и других. Так, на рис 1. Представлено поле давление при обтекании модели воздушно-космического аппарата (ВКА) ЦАГИ [8] высокоскоростным потоком разреженного газа на высоте полета 100 км. Полное число узлов шестимерной расчетной сетки равнялось 20 миллиардам.

Расчеты проводились с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН и Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

Литература

1. Titarev V.A. Efficient deterministic modelling of three-dimensional rarefied gas flows // Communications in Computational Physics. 2012. V. 12, № 1. P. 162-192.
2. Титарев В.А. Применение кода Несветай к решению трехмерных задач высотной аэродинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики, спец. выпуск по случаю 90-летия академика С.К. Годунова. 2020. Т. 60, № 4. С. 752–764.
3. Titarev V.A., Morozov A.A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian discrete velocity method with application to laser-induced plume expansion // Applied Mathematics and Computation, VSI:NumHyp, 2022. V. 429. P. 127241.
4. Bhatnagar P., Gross E., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94, № 511. P. 1144–1161.
5. Шахов Е.М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 5. С. 142--145.
6. Titarev V.A., Frolova A.A., Rykov V.A., Vashchenkov P.V., Shevyrin A.A., Bondar Ye.A. Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. V. 364. P. 1-12.
7. Morozov A.A., Titarev V.A. Kinetic study of time-of-flight distributions during pulsed laser evaporation into vacuum // Physics of Fluids. 2024. V 36. P. 116112.
8. Ваганов А.В., Дроздов С.М., Косых А.П., Нерсесов Г.Г., Челышева И.Ф., Юмашев В.Л. Численное моделирование аэродинамики крылатого возвращаемого космического аппарата // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL, № 2. С. 3–15.

СТРУКТУРА ЛЕВОГО НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВА МАТРИЦЫ ОГРАНИЧЕНИЙ МНОГОИНДЕКСНОЙ ПЛАНАРНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Е.Б. Титова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Для матрицы ограничений многоиндексной планарной транспортной задачи рассмотрена структура левого нуль-пространства L и получен спектр собственных чисел для матрицы $L \cdot L^{\mathrm{T}}$.

Ключевые слова: многоиндексная планарная транспортная задача, левое нуль-пространство, собственные числа.

1. Введение

Пусть $\mathbb{Q}-$ поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}^n-$ линейное пространство столбцов с компонентами из $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{Z}^n-$ столбцы из $\mathbb{Q}^n$ с целочисленными компонентами. Для $(m \times n)$-матрицы A с элементами из $\mathbb{Q}$ обозначим через $L_A = \{u^T \in \mathbb{Q}^m | uA = 0\}$ левое нуль-пространство матрицы A, а через $L-$ какой-нибудь его базис. Можно считать, что $L-$ целочисленная $(m - r \times m)$-матрица, где $r-$ ранг матрицы A. Множество $L_A^Z = L_A \cap \mathbb{Z}^m$ назовем левым модулем матрицы A. Множество целочисленных линейных комбинаций строк матрицы L содержится в L_A^Z, однако зачастую с ним не совпадает. Они совпадут тогда и только тогда, когда матрица L будет унимодулярная (т.е. НОД базисных миноров равен 1). В этом случае L будем называть базисом левого модуля матрицы A.

Обозначим через $M(A, b)$ множество рациональных решений системы $Ax = b$. Базис L левого нуль-пространства L_A позволяет описать множество всех векторов $b \in \mathbb{Q}^m$, при которых $M(A, b) \neq \emptyset$. По теореме Фредгольма [1] оно совпадает с множеством $\{b \in \mathbb{Q}^m | Lb = 0\}$. Аналогичный вопрос над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ решается сложнее, однако имеет место следующий результат: если $b \in \mathbb{Z}^m$, $A-$ унимодулярна и $L-$ полная система векторов в L_A, то $M(A, b) \cap \mathbb{Z}^m \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $Lb = 0$.

Известно, что если матрица A содержит базисную систему столбцов $A^{\mathcal{B}}$ ($|\mathcal{B}| = r$), содержащую базисный минор, равный 1, то (см., например, [2]) $|\det A^{\mathcal{B}}(\mathcal{J})| = |\det L_A^Z(\bar{\mathcal{J}})|$, где $\bar{\mathcal{J}}-$ множество, дополнительное к $\mathcal{J}$. Таким образом, количественный анализ базисных миноров матриц $A^{\mathcal{B}}$ и L_A^Z, равносилен.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [2, 3, 4, 5]. Для левого нуль-пространства L_A многоиндексной планарной транспортной задачи получен спектр собственных чисел для матрицы $L \cdot L^T$ и вычислен определитель Грама базисной системы строк матрицы L.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ограничения-равенства планарной k-индексной транспортной задачи (см., например, [6]) с неизвестными $x_{j_1 \dots j_k} \geq 0$ ($j_i = 1, \dots, n_i$ при $i = 1, \dots, k$):

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} x_{j_1 \dots j_k} = b_{0 j_2 \dots j_k},$$

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} x_{j_1 \dots j_k} = b_{j_1 0 j_3 \dots j_k},$$

...

$$\sum_{j_k=1}^{n_k} x_{j_1 \dots j_k} = b_{j_1 \dots j_{k-1} 0}$$

и обозначим через $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ ее матрицу.

Из [7] следует, что матрицу $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ можно представить рекурсивно в виде двух строчечных блоков:

$$T_{1,k}(n_1, \dots, n_k) = \begin{pmatrix} T_{1,k-1}(n_1, \dots, n_{k-1}) \times E_{n_k} \\ E_{n_1 \cdot \dots \cdot n_{k-1}} \times I_{n_k} \end{pmatrix},$$

где $A \times B$ – кронекерово произведение матриц A и B (определение и свойства см., например, в [8]), E_n – единичная матрица n-го порядка, $I_n = (1, \dots, 1)$ – n-мерная строка, все компоненты которой равны 1.

Матрица $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ имеет число столбцов $N_T = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$, число строк $M_T = \sigma_{k-1}(n_1, \dots, n_k)$ и ранг $r_T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{k-1}(n_1 - 1, \dots, n_k - 1)$, где $\sigma_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le k} \alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_s}$ – s-я элементарная симметрическая функция от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $\sigma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$. Матрица $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ содержит базисную систему столбцов $T^{\mathcal{B}}$ ($|\mathcal{B}| = r$), имеющую минор порядка r, равный 1.

3. Основные результаты

Рассмотрим левое нуль-пространство матрицы $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$.

В [1] дано описание построения левого нуль-пространства. Следуя ему, матрицу $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ можно представить в блочном виде:

$$L_{1,k}(n_1, \dots, n_k) = \begin{pmatrix} L_{1,k-1}(n_1, \dots, n_{k-1}) \times E_{n_k} & 0_{\sigma_{k-3}(n_1, \dots, n_{k-1}) \cdot n_k \times n_1 \cdot \dots \cdot n_{k-1}} \\ E_{\sigma_{k-2}(n_1, \dots, n_{k-1})} \times I_{n_k} & -T_{1,k-1}(n_1, \dots, n_{k-1}) \times I_1 \end{pmatrix},$$

где $0_{m \times n}$ – нулевая $(m \times n)$-матрица, I_1 – число 1.

Непосредственно перемножая матрицы, получаем, что

$$L_{1,k}(n_1, \dots, n_k) \cdot T_{1,k}(n_1, \dots, n_k) = 0.$$

Матрица $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ имеет число строк $M_L = \sigma_{k-2}(n_1, \dots, n_k)$, число столбцов $N_L = \sigma_{k-1}(n_1, \dots, n_k)$ и ранг $r_L = M_T - r_T = \sigma_{k-2}(n_1, \dots, n_k) - \sigma_{k-3}(n_1, \dots, n_k) + \dots + (-1)^k \sigma_0(n_1, \dots, n_k)$, который совпадает с размерностью левого нуль-пространства матрицы $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$.

Утверждение 1. *Собственные числа матрицы* $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k) \cdot L_{1,k}^T(n_1, \dots, n_k)$ *имеют следующий вид:*

$$\lambda = \begin{cases} \sum_{j \in J} n_j, & \text{кратности } (k-1) \prod_{\mu \notin J} (n_\mu - 1) \\ 0, & \text{кратности } \sigma_{k-3}(n_1, \dots, n_k) - \dots + (-1)^k \sigma_0(n_1, \dots, n_k) \end{cases},$$

где $J \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, $|J| = m$, $m = 2, 3, \dots, k$.

Выделим в матрице $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ базисную систему столбцов $T^{\mathcal{B}}$ ($|\mathcal{B}| = r$), а в матрице $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ базисную систему строк $L_{\overline{\mathcal{B}}}$. Для построения базиса $L_{\overline{\mathcal{B}}}$ достаточно удалить из матрицы $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ линейно зависимые строки.

Следствие 1. *Определитель Грама матрицы* $L_{\overline{\mathcal{B}}}$ *равен произведению всех ненулевых собственных чисел матрицы* $L_{1,k}(n_1, \dots, n_k) \cdot L_{1,k}^T(n_1, \dots, n_k)$.

Например [5], при $k = 5$

$$\det\left(L_{\overline{B}} \cdot L_{\overline{B}}^{T}\right) =$$
$$= (n_1 + n_2)^{(n_3-1)(n_4-1)(n_5-1)} \cdot (n_1 + n_3)^{(n_2-1)(n_4-1)(n_5-1)} \cdot (n_1 + n_4)^{(n_2-1)(n_3-1)(n_5-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_1 + n_5)^{(n_2-1)(n_3-1)(n_4-1)} \cdot (n_2 + n_3)^{(n_1-1)(n_4-1)(n_5-1)} \cdot (n_2 + n_4)^{(n_1-1)(n_3-1)(n_5-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_2 + n_5)^{(n_1-1)(n_3-1)(n_4-1)} \cdot (n_3 + n_4)^{(n_1-1)(n_2-1)(n_5-1)} \cdot (n_3 + n_5)^{(n_1-1)(n_2-1)(n_4-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_4 + n_5)^{(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)} \cdot (n_1 + n_2 + n_3)^{(n_4-1)(n_5-1)} \cdot (n_1 + n_2 + n_4)^{(n_3-1)(n_5-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_1 + n_2 + n_5)^{(n_3-1)(n_4-1)} \cdot (n_1 + n_3 + n_4)^{(n_2-1)(n_5-1)} \cdot (n_1 + n_3 + n_5)^{(n_2-1)(n_4-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_1 + n_4 + n_5)^{(n_2-1)(n_3-1)} \cdot (n_2 + n_3 + n_4)^{(n_1-1)(n_5-1)} \cdot (n_2 + n_3 + n_5)^{(n_1-1)(n_4-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_2 + n_4 + n_5)^{(n_1-1)(n_3-1)} \cdot (n_3 + n_4 + n_5)^{(n_1-1)(n_2-1)} \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)^{(n_5-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_1 + n_2 + n_3 + n_5)^{(n_4-1)} \cdot (n_1 + n_2 + n_4 + n_5)^{(n_3-1)} \cdot (n_1 + n_3 + n_4 + n_5)^{(n_2-1)} \cdot$$
$$\cdot (n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^{(n_1-1)} \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^{4}.$$

Ранее [3] Титовой Е.Б. рассмотрено левое нуль-пространство трёхиндексной планарной транспортной задачи, получен базис модуля этого пространства, для которого вычислен определитель матрицы Грама. На основании этих результатов проведено сравнение роста среднего значения суммы квадратов миноров рангового порядка базисной системы строк и базисной системы столбцов матрицы ограничений трёхиндексной планарной транспортной задачи. Для четырёхиндексной [4] и пятииндексной [5] планарных транспортных задач получена структура левого модуля, спектр собственных чисел $L \cdot L^{\mathrm{T}}$ и определитель Грама $L_{\overline{B}} \cdot (L_{\overline{B}})^{\mathrm{T}}$ в явном виде.

Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. СМБ. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. Шевченко В.Н. Многогранники многоиндексных транспортных задач: алгебраический подход. // Материалы конференции «Дискретный анализ и исследование операций». Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2004. – С. 64–70.
3. Титова Е.Б. Рост миноров рангового порядка матрицы ограничений трёхиндексной планарной транспортной задачи. // Труды XXIV Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, 18 – 21 ноября 2024 года. – Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2024. – С. 164–167.
4. Титова Е.Б., Алпутов И.Н., Петров О.А., Махнёв Р.Д. Структура левого нуль-пространства матрицы ограничений четырёхиндексной планарной транспортной задачи. // Труды XXV Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, 17 – 19 ноября 2025 года. – Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2025. – С. 173–175.
5. Титова Е.Б., Махнёв Р.Д. Структура левого нуль-пространства матрицы ограничений пятииндексной планарной транспортной задачи. // Сборник трудов V Молодёжной школы «Математика и ИТ – вместе в цифровое будущее» (Н. Новгород, 20 – 24 апреля 2026 г.). – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2026. – С. 47–50.
6. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. Шевченко В.Н. Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач. // Дискретная математика Т.15. Вып. 2. 2003. С. 83–88.
8. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М.: Наука, 1965.

ОБНАРУЖЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ АРТЕФАКТОВ В КАДРАХ ВИДЕОИГР КОМПАКТНЫМИ ВИЗУАЛЬНО-ЯЗЫКОВЫМИ МОДЕЛЯМИ БЕЗ ДООБУЧЕНИЯ

А.М. Трыкин, Е.П. Васильев, А.А. Серебрякова, К.К. Пухкий, Н.А. Соколов, В.Е. Турлапов

Исследовательский центр в сфере искусственного интеллекта,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Исследуется, способны ли компактные (0.45–2 млрд параметров) визуально-языковые модели без дообучения обнаруживать артефакты рендеринга и захвата в кадрах видеоигр по текстовому запросу. С помощью открытого фреймворка синтетической генерации аномалий на 300 кадрах из 23 игр синтезирован размеченный набор с 31 классом аномалий. Ответ модели на вопрос о наличии артефакта оценивается по вероятности токена «Yes», что позволяет вычислить TPR, FPR и ROC AUC без разбора генерируемого текста. Лучший результат показала Qwen3.5-2B с описаниями классов (AUC 0.90, TPR 72%, FPR 3%), однако она тратит 31 запрос на кадр. Если перечислить все описания в одном запросе, Qwen3.5-2B достигает AUC 0.88 при 1.5 кадра/с. InternVL3.5-1B-Flash с одним общим запросом находит 28% аномалий без ложных срабатываний и обрабатывает 3.3 кадра/с. Крупные структурные артефакты распознаются почти безошибочно. Глобальные цветовые искажения и мелкие периодические узоры модели до 1 млрд параметров почти не различают, а Qwen3.5-2B различает их заметно лучше, чем InternVL3.5-2B-Flash и LFM2.5-VL-1.6B близкого размера.

Ключевые слова: визуально-языковые модели, zero-shot, обнаружение графических артефактов, видеоигры, автоматизированный контроль качества, синтетические данные.

1. Введение

Графические артефакты (пропавшие текстуры, мусор в видеопамяти, ошибки тонального отображения) встречаются редко и непредсказуемо, поэтому собрать их в объёме, достаточном для обучения детекторов, трудно. Эту задачу решает фреймворк синтетической генерации аномалий, содержащий 31 параметризованный генератор кадровых аномалий с разметкой для классификации, сегментации и детекции. На этих данных обучаются специализированные детекторы [1], но каждый новый тип артефакта требует новой разметки и дообучения.

Визуально-языковые модели (VLM) позволяют описать артефакт словами и спросить модель, есть ли он на кадре. Бенчмарк GlitchBench [2] показал, что даже крупные мультимодальные модели плохо распознают игровые ошибки, а исследования низкоуровневого восприятия [3] показали слабую чувствительность VLM к качеству изображения. Для автоматизированного тестирования при этом важны компактные модели, которые помещаются на одну потребительскую видеокарту и успевают обрабатывать поток кадров. В работе измеряется, насколько такие модели (0.45–2 млрд параметров) без дообучения различают аномалии, созданные этим фреймворком, как результат зависит от класса аномалии и формулировки запроса и какой ценой по скорости он достигается.

2. Методика

2.1. Данные

Из 2000 кадров 23 игр (Battlefield 1, Doom Eternal, Dota 2, Fortnite и др.) отобрано 300 чистых кадров, поровну по играм. Большинство кадров имеет разрешение 1680×1050. Каждый кадр сохранён без изменений и в трёх искажённых копиях, классы которых выдаются из пере-

мешиваемой колоды, так что на каждый из 31 класса приходится 29–30 изображений, всего 900 искажённых и 300 чистых кадров. Генераторы работают с параметрами по умолчанию. Классы разделены на две группы: 9 цветовых (сдвиг цвета, перестановка каналов, бандинг, переполнение значений и др.), как правило, затрагивающих весь кадр, и 22 структурных (штриховка, шум, «мусор» неинициализированной памяти, линии, точки, сдвиг строк и др.), затрагивающих его часть. Примеры показаны на рис. 1.

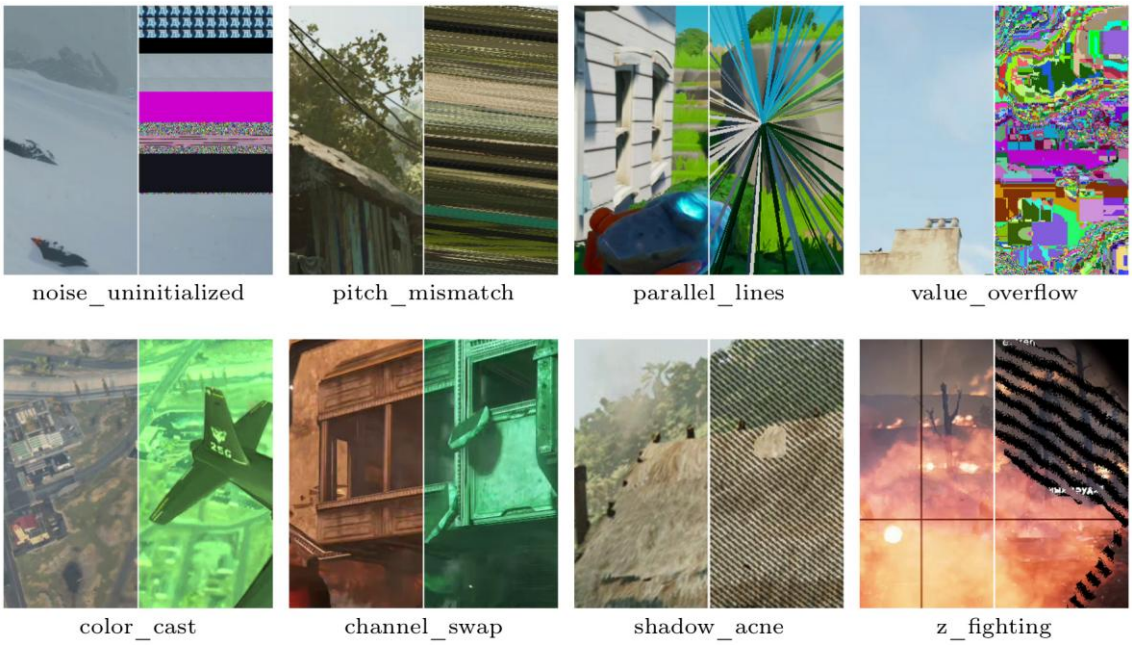


Рис. 1. Примеры классов аномалий. Слева от белой линии исходный кадр, справа тот же фрагмент с артефактом. Верхний ряд: классы, которые Qwen3.5-2B с описанием класса находит почти безошибочно, нижний ряд: трудные классы

2.2. Запросы и оценка ответа

Использовались три режима запроса.

- *Общий запрос* одинаков для всех кадров. Он спрашивает, есть ли на кадре графический артефакт, перечисляет типичные признаки и оговаривает, что стилизация, интерфейс и штатные постэффекты (блум, размытие, зерно) артефактами не являются.
- *Запрос с описанием* содержит визуальное описание одного класса (например, «прямоугольник кадра заменён серым телевизионным шумом») и задаётся изображениям этого класса и 100 чистым кадрам, по которым оценивается его собственная доля ложных срабатываний. Полная проверка кадра в этом режиме требует 31 запроса, поэтому приводимый для него FPR относится к одному запросу, а доля ложных тревог при проверке кадра всеми описаниями выше.
- *Запрос-каталог* перечисляет описания всех 31 класса и спрашивает, есть ли на кадре хотя бы один из этих артефактов. Как и общий запрос, он задаётся каждому кадру один раз, и его FPR относится к кадру.

Ответ модели не генерируется. По логитам первого токена ответа вычисляется $P(\text{Yes}) = \sigma(\ell_{\text{Yes}} - \ell_{\text{No}})$, где ℓ_{Yes} и ℓ_{No} обозначают логарифмы суммарной вероятности вариантов токенов «Yes» и «No». Суммарная вероятность этих токенов превышает 0.99 во всех запусках, кроме запроса-каталога у Qwen3.5-2B, где она в среднем равна 0.97 (не ниже 0.83). Остаток там приходится на токен «Based», с которого модель начинает развёрнутый ответ, так что и эта модель отвечает в заданном формате. Выходной слой вычисляется в float32, поскольку в bfloat16 разность логитов округляется до шага 0.06–0.125 и оценки вырождаются в несколько значений.

По порогу $P(\text{Yes}) > 0.5$ вычисляются TPR (доля обнаруженных кадров с аномалией) и FPR (доля чистых кадров, ошибочно помеченных как аномальные). Качество ранжирования независимо от порога характеризует площадь под ROC-кривой (AUC) [4]. Скорость (FPS) определяет-

ся по медианному времени от декодированного кадра до оценки на GPU NVIDIA RTX 3080 Ti (12 ГБ, bfloat16, transformers 5.17).

2.3. Модели

Сравниваются открытые модели до 2 млрд параметров: LFM2.5-VL-450M и LFM2.5-VL-1.6B [5], Qwen3.5-0.8B и Qwen3.5-2B [6], InternVL3.5-1B-Flash и InternVL3.5-2B-Flash [7, 8]. Все они видят кадр почти в исходном разрешении и тратят 1700–1800 визуальных токенов на кадр 1680×1050. Qwen3.5 обрабатывает кадр целиком, LFM2.5-VL и InternVL3.5 режут его на плитки 512 и 448 пикселей и добавляют уменьшенную копию кадра. InternVL3.5-Flash, кроме того, сжимает в 4 раза плитки, которые её маршрутизатор считает простыми.

3. Результаты

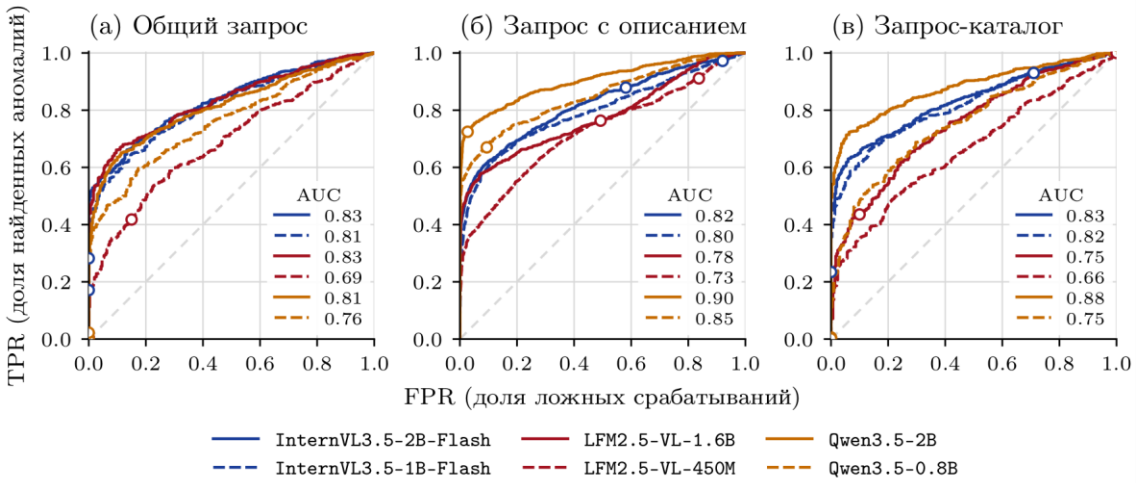


Рис. 2. ROC-кривые по объединённой выборке всех классов (микроусреднение) для трёх режимов запроса. В каждой панели указан AUC моделей в порядке легенды под рисунком. Пунктиром показана меньшая модель семейства, кружком отмечен порог P(Yes) = 0.5

Сводные результаты приведены на рис. 2. Все модели ранжируют кадры заметно лучше случайного угадывания (AUC 0.66–0.90), однако их оценки *P*(Yes) смещены относительно порога 0.5 в противоположные стороны. На общий запрос у Qwen3.5 и LFM2.5-VL-1.6B *P*(Yes) почти всегда ниже 0.5 даже на кадрах с аномалией (у Qwen3.5-2B медиана 0.10 против 0.04 на чистых), поэтому по этому порогу они почти ничего не находят (TPR 0–2%). На запрос с описанием у LFM2.5-VL и InternVL3.5, наоборот, *P*(Yes) высока и на чистых кадрах (медиана от 0.50 у LFM2.5-VL-1.6B до 0.82 у InternVL3.5-1B), и FPR достигает 49–92%. LFM2.5-VL-450M смещена к ответу «Yes» и на общий запрос (FPR 15%). Поэтому для практического применения порог нужно калибровать по чистым кадрам, а модели сравнивать в первую очередь по AUC. Наилучшее качество даёт Qwen3.5-2B с описаниями классов (AUC 0.90, TPR 72%, FPR 3%). По соотношению точности и скорости выделяется InternVL3.5-1B-Flash с общим запросом, которая при пороге 0.5 находит 28% аномалий без единого ложного срабатывания на 300 чистых кадрах (AUC 0.81, 3.3 кадра/с). InternVL3.5-2B-Flash и LFM2.5-VL-1.6B с общим запросом ранжируют кадры немного лучше (AUC 0.83, наибольший среди общих запросов), но при пороге 0.5 находят лишь 17 и 1% аномалий и работают медленнее (2.6 и 2.8 кадра/с).

Качество сильно зависит от класса (табл. 1). Крупные контрастные структурные артефакты (неинициализированная память, блочный шум, сдвиг строк, штриховка, пучки линий) распознаются почти безошибочно: у Qwen3.5-2B с описанием AUC не ниже 0.99 для 15 из 31 класса. Глобальные цветовые искажения (сдвиг цветового баланса, перестановка каналов, бандинг, ошибки тонального отображения) и мелкие периодические узоры («акне» теней, z-fighting, дизеринг) модели до 1 млрд параметров различают плохо. AUC для них лежит в диапазоне от 0.42 до 0.80, в среднем 0.60, и в 86% случаев ниже 0.7. Без эталонного кадра сбой цвета трудно от-

личить от художественного стиля игры, а узоры с периодом в несколько пикселей теряются внутри визуальных токенов, каждый из которых описывает область 28–32 пикселя. У Qwen3.5-2B с описанием AUC этих классов составляет 0.71–0.86, то есть с ростом модели они становятся различимы. У InternVL3.5-2B-Flash и LFM2.5-VL-1.6B он составляет лишь 0.60–0.83 и 0.31–0.81, как у моделей до 1 млрд параметров, так что дело не только в размере. В табл. 1 при FPR = 5% средний TPR растёт с 40 до 55% (общий запрос), с 58 до 70% (каталог) и с 74 до 81% (описание).

Таблица 1. ROC AUC и TPR при FPR = 1% и 5% по классам для Qwen3.5-2B на исходном разрешении. Кадры каждого класса сравниваются с чистыми кадрами, получившими тот же запрос. Порог для TPR выбран так, чтобы ложных срабатываний было не больше 1% (5%): не больше 3 (15) из 300 чистых кадров для общего запроса и каталога и не больше 1 (5) из 100 для запроса с описанием

Класс	Общий запрос		Запрос с описанием		Запрос-каталог	
	AUC ↑	TPR, % ↑ 1% / 5%	AUC ↑	TPR, % ↑ 1% / 5%	AUC ↑	TPR, % ↑ 1% / 5%
Цветовые						
value_underflow	0.99	83 / 97	1.00	100 / 100	1.00	100 / 100
value_overflow_chroma	0.94	55 / 83	1.00	97 / 100	1.00	97 / 100
value_overflow	0.99	90 / 93	1.00	97 / 100	1.00	97 / 100
color_distortion	0.64	0 / 0	0.97	72 / 90	0.89	48 / 76
value_overflow_local	0.91	59 / 69	0.97	90 / 90	0.96	79 / 90
banding	0.57	0 / 14	0.86	62 / 72	0.84	28 / 59
color_cast	0.41	0 / 3	0.86	31 / 52	0.71	14 / 24
tonemap_clipping	0.62	3 / 3	0.83	52 / 62	0.73	17 / 41
channel_swap	0.62	0 / 7	0.74	28 / 38	0.85	31 / 62
Структурные						
denoiser_failure	0.94	31 / 62	1.00	100 / 100	0.98	90 / 93
hatching	0.87	45 / 69	1.00	100 / 100	0.95	86 / 90
hdmi_sparkles	0.96	52 / 76	1.00	100 / 100	0.99	90 / 97
noise_compression	1.00	90 / 97	1.00	100 / 100	1.00	100 / 100
noise_uninitialized	1.00	100 / 100	1.00	100 / 100	1.00	100 / 100
parallel_lines	0.93	48 / 76	1.00	100 / 100	1.00	93 / 100
noise	0.99	83 / 93	1.00	100 / 100	1.00	90 / 100
noise_streaks	0.97	83 / 90	1.00	100 / 100	0.97	90 / 93
noise_texture	0.97	76 / 93	1.00	100 / 100	0.92	55 / 79
pitch_mismatch	0.99	97 / 97	0.99	72 / 100	1.00	97 / 100
block_smear	0.95	72 / 83	0.99	93 / 93	0.98	86 / 90
snowflakes	0.88	48 / 66	0.99	97 / 97	0.88	62 / 79
tiny_line	0.69	0 / 7	0.96	76 / 93	0.86	31 / 59
noise_bitflip	0.99	66 / 93	0.96	62 / 79	1.00	100 / 100
tiny_points	0.78	20 / 40	0.94	77 / 80	0.84	37 / 53
noise_swizzle	0.72	7 / 24	0.93	79 / 79	0.76	14 / 38
dotted_lines	0.62	3 / 28	0.92	79 / 83	0.63	3 / 14
nan_propagation	0.57	7 / 14	0.90	55 / 55	0.62	0 / 17
radiation	0.80	21 / 48	0.84	24 / 45	0.86	38 / 62
shadow_acne	0.63	3 / 21	0.75	24 / 28	0.68	7 / 17
z_fighting	0.72	14 / 41	0.74	31 / 38	0.75	21 / 31
dither_pattern	0.60	0 / 17	0.71	0 / 38	0.62	3 / 10

Описание класса повышает AUC у обеих моделей Qwen3.5 (с 0.76 до 0.85 у 0.8B и с 0.81 до 0.90 у 2B) и у LFM2.5-VL-450M (с 0.69 до 0.73), но требует 31 запроса на кадр, и скорость падает до 0.06–0.25 кадра/с. У InternVL3.5 и LFM2.5-VL-1.6B AUC по отдельным классам остаётся высоким, а общий AUC снижается (с 0.81 до 0.80 у InternVL3.5-1B, с 0.83 до 0.82 у InternVL3.5-2B и с 0.83 до 0.78 у LFM2.5-VL-1.6B при среднем по классам 0.88, 0.90 и 0.88). Разные описания смещают ответы по-разному, поэтому оценки разных запросов плохо сопоставимы между собой. Некоторые описания склоняют меньшую модель к ответу «Yes». Так, у Qwen3.5-0.8B запрос о переполнении цветовых каналов даёт 69% ложных срабатываний на чи-

стых кадрах, а у Qwen3.5-2B только 2%. В целом переход от Qwen3.5-0.8B к 2B снижает FPR с 9 до 3% при росте TPR с 67 до 72%. У InternVL3.5 переход к 2B снижает FPR с 92 до 58%, но почти не меняет AUC. У LFM2.5-VL переход к 1.6B снижает FPR с 84 до 49% и поднимает AUC с 0.73 до 0.78.

Запрос-каталог проверяет кадр на все классы за один проход и потому работает почти со скоростью общего запроса (1.5–5.9 кадра/с). Качество, близкое к запросу с описанием, он даёт только у Qwen3.5-2B: AUC 0.88 против 0.90, причём FPR здесь относится к кадру, а не к запросу. У InternVL3.5 AUC каталога и общего запроса почти совпадают (0.81–0.83), и InternVL3.5-2B-Flash при пороге 0.5 находит 23% аномалий без ложных срабатываний. Меньшим моделям длинный перечень вредит. У Qwen3.5-0.8B AUC падает до 0.75 против 0.85 с отдельными описаниями, LFM2.5-VL-1.6B уступает собственному общему запросу (0.75 против 0.83), а LFM2.5-VL-450M отвечает «Yes» на все кадры (AUC 0.66). Как и на общий запрос, Qwen3.5 почти всегда отвечает на каталог «No» (TPR 0–1%), так что порог и здесь требует калибровки.

4. Заключение

Компактные визуально-языковые модели без дообучения улавливают заметную часть синтетических аномалий. С ростом размера качество растёт во всех трёх семействах моделей, хотя у InternVL3.5 слабо. Qwen3.5-2B с описаниями классов достигает AUC 0.90 при FPR 3%, но тратит 31 запрос на кадр (0.06 кадра/с). InternVL3.5-1B-Flash с общим запросом находит 28% аномалий без ложных срабатываний при 3.3 кадра/с. Запрос-каталог позволяет Qwen3.5-2B получить почти то же качество ранжирования (AUC 0.88) за один запрос на кадр (1.5 кадра/с), но меньшим моделям длинный перечень описаний вредит. Оценки моделей смещены относительно порога 0.5 в разные стороны, а глобальные цветовые искажения и мелкие периодические узоры остаются самыми трудными классами. Поэтому в конвейере автоматизированного тестирования такие модели разумно использовать как второй этап после специализированных детекторов [1], чтобы проверять найденных кандидатов и описывать их текстом. В дальнейшем планируется калибровать порог по чистым кадрам, проверить модели большего размера, добавить в запросы эталонный кадр той же сцены для цветовых классов, кэшировать визуальную часть запроса для ускорения режима с описаниями и дообучить компактную модель на синтетических данных.

Литература

1. Trykin A., Sokolov N., Pukhkii K., Vasiliev E., Serebriakova A., Turlapov V. Image-Feature-Informed Networks for Anomaly Detection in Video Game Frames // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Springer Nature Switzerland, 2026. P. 93–107.
2. Taesiri M.R., Feng T., Bezemer C.-P., Nguyen A. GlitchBench: Can Large Multimodal Mod-els Detect Video Game Glitches? // 2024 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2024. P. 22444–22455.
3. Wu H., Zhang Z., Zhang E., et al. Q-Bench: A Benchmark for General-Purpose Foundation Models on Low-level Vision // The Twelfth International Conference on Learning Representations (ICLR). 2024.
4. Fawcett T. An Introduction to ROC Analysis // Pattern Recognition Letters. 2006. Vol. 27, No. 8. P. 861–874.
5. LFM2.5-VL-450M, LFM2.5-VL-1.6B. URL: https://huggingface.co/LiquidAI/LFM2.5-VL-450M, https://huggingface.co/LiquidAI/LFM2.5-VL-1.6B (дата обращения: 30.09.2026).

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ ПЛАВ[1*]

Р.Ю. Фадеев[1,2,3], М.А. Толстых[1,2,3], Г.С. Гойман[1,2,3]

[1]Институт Вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН,
[2]Гидрометцентр России,
[3]Московский физико-технический институт (НИУ)

Глобальная гидродинамическая модель ПЛАВ применяется в Гидрометцентре России в рамках систем оперативного прогноза погоды и ее аномалий. Совершенствование модели в части точности и полноты описания физических процессов почти всегда сопровождается увеличением ее вычислительной сложности. В работе представлен краткий обзор методов, направленных на повышение точности и вычислительной эффективности модели ПЛАВ.

Ключевые слова: моделирование атмосферы, прогноз погоды, параллельные вычисления.

Глобальная модель атмосферы ПЛАВ (полулагранжева модель, основанная на уравнении для абсолютного вихря) разработана в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН и Гидрометцентре России. В настоящее время эта модель в версии ПЛАВ10 применяется в Гидрометцентре России для оперативного среднесрочного прогноза погоды с заблаговременностью до десяти дней [1], версия ПЛАВ20 с несколько более грубом разрешением – для ансамблевого (вероятностного) среднесрочного прогноза с заблаговременностью до десяти суток, а версия ПЛАВ072L96 в еще более грубом разрешении применяется в качестве метода субсезонного и долгосрочного прогнозирования осредненных аномалий погоды с заблаговременностью до четырех месяцев [2].

Основным направлением развития ПЛАВ является совершенствование физической составляющей модели с точки зрения полноты описания метеорологически важных атмосферных явлений и процессов на поверхности. Усложнение модели, как правило, ведет к повышению ее вычислительной стоимости, поэтому большое внимание уделяется эффективной реализации математических алгоритмов и их программной реализации. Важность этих работ продиктовано, в том числе, формальным ограничением: время расчета одних модельных суток не должно превышать 20 мин. Сейчас время расчета прогноза на 24 часа по модели ПЛАВ10 составляет 14 минут на 2916 ядрах вычислительной системы Cray XC40 с пиковой производительностью 1.293 Пфлопс, установленной в ГВЦ Росгидромета. Данная система включает 936 вычислительных узлов, объединенных интерконнектом Aries. Каждый узел содержит 2 18-ядерных процессора Intel Xeon E2697v4. Используются компилятор Cray Fortran и оптимизированная под интерконнект Aries библиотека Cray MPI.

Развитие модели в части описания физических процессов связано, прежде всего, с совершенствованием блока параметризованного описания процессов подсеточного масштаба. В течение последних нескольких лет в ПЛАВ был модифицирован ряд подходов: уточнен алгоритм параметризованного описания изменчивости скорости ветра подсеточного масштаба [3], на базе пакета ecckd внедрен новый алгоритм для описания распространения излучения в атмосфере [4], реализована возможность использования климатологии аэрозолей на основе реанализа CAMS. Усовершенствованные версии модели ПЛАВ проверялись на рестроспективных прогнозах, где для оценки точности предсказания использовались утвержденные Всемирной метеорологической организацией (ВМО) метрики качества. Эти и другие работы позволили повысить точность воспроизведения турбулентных потоков тепла и влаги, облачно-радиационных и аэрозольно-радиационных связей моделью ПЛАВ.

[1*] Работы по ускорению расчетов долгосрочных прогнозов модели ПЛАВ выполнены при поддержке проекта РНФ 26-17-00314.

Вместе с развитием физического компонента модели, программно-алгоритмическая составляющая претерпела следующие изменения: реализована возможность проведения части вычислений в блоке параметризованного описания процессов подсеточного масштаба с одинарной точностью, все параллельные MPI-обмены в блоке полулагранжевого переноса выполняются с данными в одинарной точности, а размер передаваемых массивов определяется динамически, в зависимости от скорости ветра и размера шаблона интерполяции [5]. Для ПЛАВ10 реализована возможность вывода данных в асинхронном режиме, практически не замедляющая вычисления [6].

Совершенствование модели ПЛАВ позволяет создавать с ее помощью новые прогностические продукты, а также вести разработку новых и перспективных подходов, таких как новое негидростатическое динамическое ядро и совместная модель атмосфера-океан-морской лед [7].

Литература

1. Tolstykh M.A., Fadeev R.Yu., Shashkin V.V., Goyman G.S., Zaripov R.B., Mizyak V.G., Rogutov V.S., Alipova K.A., Biryucheva E.O. Global SLAV10 Model for Medium-range Weather Prediction. Russian Meteorology and Hydrology 2025 Vol. 50(6), pp. 473-481 DOI: 10.3103/S1068373925060032 ISSN 1068-3739.
2. М.А. Толстых, Р.Ю. Фадеев, В.В. Шашкин, Р.Б. Зарипов, С.В. Травова, Г.С. Гойман, К.А. Алипова, В.Г. Мизяк, В.А. Тищенко, Е.Н. Круглова Модель долгосрочного метеорологического прогноза ПЛАВ072L96 // Метеорология и гидрология. – 2024. – № 7. – С. 25-39. – DOI 10.52002/0130-2906-2024-7-25-39.
3. Р.Ю. Фадеев Роль изменчивости скорости ветра подсеточного масштаба в задаче долгосрочного прогноза аномалий погоды // Гидрометеорологические исследования и прогнозы, 2023, № 2 (388), С. 35-54. DOI 10.37162/2618-9631-2023-2-35-54.
4. Фадеев Р.Ю., Толстых М.А., Бирючева Е.О., Гойман Г.С. Включение параметризации ecRad в модель ПЛАВ и ее влияние на атмосферную циркуляцию на годовом и сезонном масштабах // Гидрометеорологические исследования и прогнозы. 2025. № 3 (397). С. 49-63 DOI: 10.37162/2618-9631-2025-3-49-63.
5. Tolstykh M.A., Goyman G.S., Biryucheva E.O., Shashkin V.V., Fadeev R.Yu. Reduced Precision Computations in the SL-AV Global Atmosphere Model // Supercomputing. 9th Russian Supercomputing Days, Moscow, Russia, September 25–26, 2023. Revised Selected Papers, Part I, Lecture Notes in Computer Sciences. 2023. V. 14388, pp. 190–201. https://doi.org/10.1007/978-3-031- 49432-1_15.
6. Fadeev, R.Y., Goyman, G.S. & Tolstykh, M.A. Improving Performance of SLAV Model for Medium Range Weather Prediction. Lobachevskii J Math 45, 3017–3028 (2024). https://doi.org/10.1134/S1995080224603874.
7. Fadeev, Rostislav Yu. "Evaluation of 2010 heatwave prediction skill by SLNE coupled model" Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, vol. 39, no. 4, 2024, pp. 199-208. https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0019.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЧИ-РАЗРЯДА В СМЕСИ ГЕЛИЯ И СИЛАНА В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАНОСТРУКТУР[1*]

Р.А. Фазулзянов[1], А.И. Сайфутдинов[1,2]

[1]Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева
[2]Санкт-Петербургский государственный университет

В работе описаны результаты моделирования высокочастотного индукционного разряда в газовой смеси гелий–силан (He/SiH4), применяемого для решения задач по синтезу наноструктур кремния. Для этого использовалась расширенная гидродинамическая модель плазмы, учитывающая широкий спектр плазмохимических реакций. Приведены ключевые параметры плазмы и распределения продуктов превращения силана, включая радикалы и чистый кремний. Также показано образование ион-ионной плазмы в центре разряда.

Ключевые слова: высокочастотный индукционный разряд, расширенная гидродинамическая модель, ион-ионная плазма

1. Введение

Плазмохимические методы нашли широкое применение в различных областях современной науки и техники. В частности, они применяются для синтеза новых материалов, модификации поверхностей и формирования функциональных покрытий [1]. Подобные подходы обеспечивают прецизионный контроль процессов на нано- и микроуровне, что создает предпосылки для разработки инновационных материалов со сложной структурой и заданными свойствами. Основное достоинство этих методов заключается в использовании неравновесной низкотемпературной плазмы. Она характеризуется высокой скоростью химических реакций в газовой фазе, тогда как макроскопическая температура газа остается низкой. Тем не менее экспериментальное исследование такой плазмы сопряжено с трудностями. Это обусловлено многостадийным преобразованием энергии, наличием множества параллельных и последовательных реакций, а также высокой реакционной способностью частиц (радикалов, ионов, возбужденных молекул). Все перечисленное существенно затрудняет прямые измерения химического состава плазмы [2].

Для решения практических задач, например, увеличения выхода целевых продуктов или скорости их синтеза, требуется наиболее полное описание физико-химических процессов в плазмохимических реакторах различной конфигурации. Помимо этого, управление превращением исходных веществ (прекурсоров) в газоразрядной плазме представляет собой сложную научно-техническую проблему. Именно в этом контексте математическое моделирование приобретает ключевое значение. Оно дает возможность вычислять основные параметры плазмы: концентрации частиц, температурные поля, распределение электрического поля – то есть все необходимые данные для создания и оптимизации технологических процессов.

2. Основная часть

Целью настоящей работы является моделирование плазмохимического реактора на основе высокочастотного разряда с плоским индуктором. Исследуются две среды: чистый гелий и смесь гелия с силаном. Это имеет особое значение для задач синтеза наноструктур на базе кремния.

В основе расчетов лежит расширенная гидродинамическая модель описания плазмы, которая включает уравнения непрерывности для заряженных, возбужденных и нейтральных частиц, уравнение баланса плотности энергии для электронов и тяжелой компоненты плазмы, а

[1*] Работа поддержана грантом РНФ № 26-12-00342.

также уравнения Максвелла для описания внешнего электромагнитного поля. Модель учитывает довольно широкий набор плазмохимических процессов в гелии [3] и силане [4]. В частности, принимались во внимание следующие типы нейтральных частиц: e, He^+, He_2^+, He(T), He(S), He, He_2^*, SiH_4, SiH_3, SiH_2, SiH, Si, H, H_2, Si_2H_2, Si_2H_4, Si_2H_5, Si_2H_6; ионы: SiH_4^+, SiH_4^-, SiH_3^+, SiH_3^-, SiH_2^+, SiH_2^-, SiH^+, $Si_2H_4^+$, $Si_2H_6^+$, H^+, H_2^+, H_3^+. Сечения процессов с участием электронов были взяты из [4].

Численные расчеты выполнялись в широком диапазоне входных параметров как в чистом гелии (He), так и в газовой смеси He/SiH4. Давление буферного газа изменялось от 0.1 до 3 Торр. Входная мощность варьировалась от 50 до 3000 Вт. Помимо этого, содержание силана изменялось от 0.01% до 1%.

Результаты численного моделирования продемонстрировали, что в рассматриваемых условиях преобладающими заряженными частицами выступают электроны, положительные атомарные ионы гелия и отрицательные ионы SiH_4^-. При этом именно последние доминируют в центральной области разряда, что приводит к формированию ион-ионной плазмы. Также необходимо отметить, что с течением времени увеличивается концентрация отрицательных ионов SiH_2^-. Их концентрация становится сопоставимой, а при больших временах даже превышает концентрацию молекулярных ионов гелия.

Было установлено, что при больших временах (от 0.1 с и более) в качестве основных продуктов конверсии силана выступают атомарный водород и радикал SiH. Их концентрация достигает величин $2 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$ и $6 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$, соответственно. Радикал SiH служит ключевым прекурсором для осаждения гидрогенизированного аморфного кремния (a-Si:H) или нанокристаллического кремния (nc-Si:H). Именно эти частицы диффундируют к поверхности подложки и встраиваются в растущую пленку.

Атомарный водород (H) выполняет несколько критически важных функций:

1. Травление: H активно взаимодействует со слабыми и «дефектными» связями в растущей пленке, упорядочивая ее структуру. Он замещает атомы водорода из приповерхностных групп $Si\text{-}H_2$ и $Si\text{-}H_3$, преобразуя их в более стабильные мостики Si-H и Si-Si.
2. В определенных условиях (высокая концентрация H) он может стимулировать формирование нанокристаллов кремния в аморфной матрице, то есть рост nc-Si:H.

Полученные данные убедительно демонстрируют, что в ВЧИ-разряде установился эффективный режим осаждения кремниевых пленок. Плазма продуцирует большое количество именно тех активных частиц (SiH и H), которые требуются для роста высококачественных пленок a-Si:H или nc-Si:H. Атомарный водород выступает не просто побочным продуктом, а активным участником процесса, определяющим качество и структуру получаемого материала.

Литература

1. Miakonkikh, A.; Kuzmenko, V. Formation of Black Silicon in a Process of Plasma Etching with Passivation in a SF6/O2 Gas Mixture. Nanomaterials. 2024, 14(11), 945.
2. Thiry, D.; Konstantinidis, S.; Cornil, J.; Snyders, R. Plasma diagnostics for the low-pressure plasma polymerization process: a critical review. Thin Solid Films 2016, 606, 19–44. DOI: 10.1016/j.tsf.2016.03.050.
3. Saifutdinov, A.I.; Kustova, E.V. Comparative Analysis of Kinetic Schemes for Simulating DC Micro-Discharges in Helium: from Glow to ARC. High Energy Chem. 2024, 58, S380–S392.
4. Kim, H.J.; Lee, H.J. Analysis of intermediate pressure SiH4/He capacitively coupled plasma for deposition of an amorphous hydrogenated silicon film in consideration of thermal diffusion effects. Plasma Sources Sci. Technol. 2017, 26, 085003.

ДИНАМИКА ДВУХ КУБИТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОДНОГО КУБИТА ПОСРЕДСТВОМ ЗАПУТЫВАЮЩЕГО СИГНАЛА

И.Т. Фатыхов, С.С. Савинский

Удмуртский государственный университет

Используется модельный гамильтониан системы кубитов, с помощью которого могут быть исследована временная эволюция кубитов с учетом действия временного сигнала на отдельный кубит и запутывающего временного сигнала действующего на два кубита. Получено аналитическое решение для амплитуд состояний двух кубитов находящихся под действием запутывающего сигнала прямоугольной формы. Предложен алгоритм определения начального состояния одного кубита при контролировании начального и конечного состояний второго кубита.

Ключевые слова: цепочка кубитов, запутанные состояния, запутывающий сигнал, операция iSWAP.

1. Введение

Основным элементом физически различных систем, используемых в настоящее время для создания квантовых компьютеров (ионные цепочки, нейтральные атомы, электрические схемы из сверхпроводящих элементов, квантовые точки) являются кубиты – носители информации, используемые для квантовых вычислений. Одной из идей квантовых вычислений является использование запутанных квантовых состояний кубитов [1, 2], реализация которых возможна только через межкубитное взаимодействие. В предлагаемой работе эволюция амплитуд состояний кубитов определяется из решения системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от времени и являются параметрами управления, обеспечивающими воздействие на кубиты.

2. Постановка задачи

Для одиночного кубита нами рассматривается безразмерный Гамильтониан вида [3]:

$$H = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_z + \varepsilon(t)\sigma_x, \tag{1}$$

где Δ – ширина щели в спектре одиночного двухуровнего кубита, $\varepsilon(t)$ – временной внешний сигнал, действующий на кубит, σ_x, σ_z – матрицы Паули. В отсутствии внешних сигналов собственные функции оператора Гамильтона (1) есть

$$|0> = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ |1> = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

которым соответствуют собственные значения $-\frac{\Delta}{2}$, $+\frac{\Delta}{2}$ определяющие основное и возбужденное состояния кубита. Оператор Гамильтона (1) позволяет изучить временную эволюции волновой функции одиночного кубита под действием внешнего сигнала (резонансы Раби [4]), моделировать временные сигналы $\varepsilon(t)$ с целью перевода кубита из одного квантового состояния в другое [5].

Для построения запутанных состояний в системе кубитов нужно учесть взаимодействие между кубитами. Физическая причина взаимодействий может быть различной: от поляризации одного кубита другим кубитом до диполь-дипольного взаимодействия [6]. Соответственно, возникает проблема построения оператора взаимодействия двух кубитов, который представляет собой матрицу (4×4). В [3] приведен возможный оператор взаимодействия двух кубитов (по нумерации – первый и второй кубиты):

$$H_{12}^{int} = j_{12}(t)(\sigma_{x1} \otimes \sigma_{x2}) = j_{12}(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $j_{12}(t)$ – временной запутывающий сигнал.

Для временных сигналов, действующих на два кубита, рассматривается нестационарная волновая функция, представленная в виде

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n_1,n_2} \chi_{n_1 n_2}(t) \exp\left(-iE_{n_1 n_2} t\right) |n_1 n_2>,$$

где n_j принимают значения 1 или 0, $j = 1, 2$ – номер кубита, коэффициенты $\chi_{n_1 n_2}(t)$ – амплитуды, $E_{n_1 n_2}$ и $|n_1 n_2>$ – энергии и стационарные волновые функции гамильтониана невзаимодействующих кубитов при отсутствии внешних сигналов соответственно.

3. Решение задачи

Для двух кубитов нами решалась система из четырех дифференциальных уравнений для амплитуд с различными начальными условиями. Предполагалось: отсутствие временных сигналов ($\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = 0$) и наличие запутывающего сигнала ($j_{12}(t) \neq 0$). В этом случае уравнения для амплитуд примут вид:

$$\begin{cases} i\,\dfrac{d}{dt}\chi_{00}(t) = j_{12}(t)\chi_{11}(t)\exp(-i(\Delta_1 + \Delta_2)t), \\ i\dfrac{d}{dt}\chi_{01}(t) = j_{12}(t)\chi_{10}(t)\exp(-i(\Delta_1 - \Delta_2)t), \\ i\dfrac{d}{dt}\chi_{10}(t) = j_{12}(t)\chi_{01}(t)\exp(i(\Delta_1 - \Delta_2)t), \\ i\dfrac{d}{dt}\chi_{11}(t) = j_{12}(t)\chi_{00}(t)\exp(i(\Delta_1 + \Delta_2)t). \end{cases} \quad (3)$$

Физическая реализация и выбор параметров в (3) обсуждался в обзоре [3]. Специфика уравнений (3) обусловлена не равными нулю матричными элементами оператора (2) для переходов между состояниями $|00\rangle \leftrightarrow |11\rangle$ и $|01\rangle \leftrightarrow |10\rangle$ и равными нулю для других переходов. Данная система уравнений может иметь точные решения в случае запутывающего сигнала, выбранного в виде прямоугольного импульса с амплитудой *A*. Заметим также: система (3) не содержит информации об утечке информации в другие (неучтенные) уровни кубитов, как и декогеренцию.

Обсудим решения системы (3) для случая $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. Для начальных условий

$$\chi_{00}(0) = 1,\ \chi_{01}(0) = 0,\ \chi_{10}(0) = 0,\ \chi_{11}(0) = 0,$$

решение (3) имеет вид:

$$\chi_{00}(t) = \left(\cos(\gamma t) + i\frac{\Delta}{\gamma} sin(\gamma t)\right)\exp(-i\Delta t),\ \chi_{01}(t) = 0,$$
$$\chi_{10}(t) = 0,\ \chi_{11}(t) = \left(-i\frac{A}{\gamma} sin(\gamma t)\right)\exp(+i\Delta t), \quad (4)$$

где $\gamma = \sqrt{A^2 + \Delta^2}$. Решение (4), с учетом граничного условия, получено из следующих соображений: для системы (3) рассматриваются первое и четвертое уравнения, которые подстановкой

$$B_0(t) = \chi_{00}(t)\exp(i\Delta t), \qquad B_1(t) = \chi_{11}(t)\exp(-i\Delta t)$$

сведутся для функций $B_0(t)$, $B_1(t)$ к системе двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Полученные уравнения легко интегрируются с учетом начальных условий для $B_0(0), B_1(0)$, таким образом можно получить решение (4). Для рассматриваемых начальных условий, как следует из (4), формируются запутанные состояния.

Второй вариант решения системы уравнений (3), приводящий к запутанным состояниям, может быть реализован для начальных условий

$$\chi_{00}(0) = 0,\ \chi_{01}(0) = 1,\ \chi_{10}(0) = 0,\ \chi_{11}(0) = 0. \quad (5)$$

Решение (3) в данном случае имеет вид

$$\chi_{00}(t) = 0,\ \chi_{01}(t) = \cos(\gamma_1 t),\ \chi_{10}(t) = -i\frac{A}{\gamma_1} sin(\ \gamma_1 t\ ),\ \chi_{11}(t) = 0\,,\ \ \gamma_1 = |A|. \qquad (6)$$

Для выбранных условий (5), как следует из (6), в момент времени $t = \frac{\pi}{4\gamma_1}$ формируется одно из запутанных состояний, определяемых знаком амплитуды сигнала A:

$$\mathrm{F}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10>,\ \ \mathrm{F}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle.$$

Обсудим следующую ситуацию: пусть первый кубит находится в основном состоянии, состояние второго кубита не определено: основное или возбужденное. Соответственно, отличными от нуля в нулевой момент времени для двух кубитов может быть одна из амплитуд: $\chi_{00}(0)$ или $\chi_{01}(0)$. При подаче на систему кубитов запутывающего прямоугольного сигнала формируются амплитуды

$$\chi_{00}(t),\ \chi_{01}(t),\ \chi_{10}(t),\ \chi_{11}(t),$$

которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3), и в соответствии с выбранными начальными условиями могут быть определены из формул (4) или (6). Таким образом, если в начальный момент времени два кубита находились в состоянии определяемом амплитудой $\chi_{00}(0)$, то действие запутывающего сигнала приведет к эволюции кубитов согласно формулы (4). В другой ситуации, когда два кубита находились в состоянии с амплитудой $\chi_{01}(0)$, действие запутывающего сигнала приведет к эволюции кубитов определяемое формулой (6). Решения (4) и (6) являются периодическими, их периоды определятся через частоты γ и γ_1: при кратном соотношении между периодами можно реализовать ситуацию когда $P_{00}(t_*) = 1$ *либо* $P_{10}(t_*) = 1$. Это обозначает: если обнулить запутывающий сигнал в момент времени t_* и измерить состояние первого кубита, то он окажется либо в основном состоянии либо в возбужденном. Если первый кубит оказался в основном состоянии, то второй кубит в начальный момент времени был также в основном состоянии и в этом же состоянии он находится в момент времени t_*. Соответственно, если первый кубит оказался в возбужденном состоянии, то второй кубит в начальный момент времени также находился в возбужденном состоянии, в момент времени t_* он находится в основном состоянии. Как найти t_*? Из условий $\gamma t_* = 2\pi,\ \gamma_1 t_* = \frac{3\pi}{2}$ можно установить связь между A и Δ, также найти t_*: $A = \frac{3\Delta}{\sqrt{7}}$, $t_* = \frac{\pi\sqrt{7}}{2\Delta}$. На рис. 1 приведены графики вероятностей $P_{00}(t)$ и $P_{10}(t)$ для амплитуды запутывающего сигнала $A = \frac{3\Delta}{\sqrt{7}}$. Как следует из рисунка, условие $P_{00}(t) = 1$ *либо* $P_{10}(t) = 1$ выполняется при $t = t_*$. Заметим, что для возврата (при необходимости) второго кубита в исходное состояние можно применить оператор NOT [4], который также может быть реализован через прямоугольный импульс путем действия только на второй кубит. Для случая когда второй кубит находится в суперпозиции состояний (основного и возбужденного) рассмотренная схема не позволяет однозначно решить задачу определения состояния второго кубита посредством измерения запутанного состояния первого кубита. Предложенная схема определения состояния второго кубита через состояние первого кубита путем создания запутанности может рассматриваться как модифицированный вариант реализации операции iSWAP [8].

4. Результаты

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен модельный гамильтониан для системы кубитов с учетом внешних сигналов, действующих на отдельные кубиты, и запутывающих сигналов. На примере двух взаимодействующих кубитов через временной прямоугольный сигнал найдено точное решение для амплитуд нахождения кубитов в основном и возбужденном состояниях. Показано: при воздействии запутывающим сигналом на два кубита, зная исходное состояние одного кубита и, измерив его после взаимодействия, можно определить состояние второго кубита (из возможных состояний: $|0>$ или $|1>$), которое было до действия запутывающего сигнала. Полученные в работе данные могут быть использованы для временной оптимизации физически реализуемых алгоритмов в квантовом компьютере, взаимодействие между кубитами которого построено согласно модели (2).

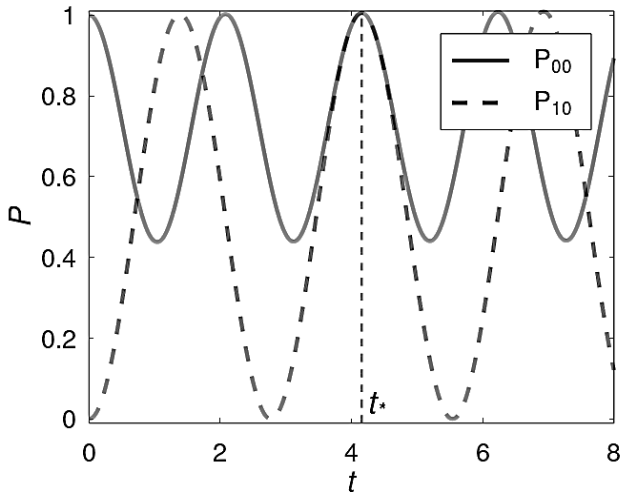


Рис. 1. Временная эволюция состояний двухкубитной системы при воздействии сигналом $j_{12}(t) = A\Theta(\tau - t),\ A = (3\Delta)/(\sqrt{7}),\ \Delta = 1,\ \tau = 8$

Литература

1. Zhang J., Vala J., Sastry S., Whaley K.B. Exact Two-Qubit Universal Quantum Circuit // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91, No. 2. Art. 027903. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.027903.
2. Валиев К.А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физических наук. 2005. Т. 175, № 1. С. 3–39. DOI: 10.3367/UFNr.0175.200501a.0003.
3. Вожаков В.А., Бастракова М.В., Кленов Н.В., Соловьев И.И., Погосов В.В., Бабухин Д.В., Жуков А.А., Сатанин А.М. Управление состояниями в сверхпроводниковых квантовых процессорах // Успехи физических наук. 2022. Т. 192, № 5. С. 457–476. DOI: 10.3367/UFNr.2021.02.038934.
4. Rabi I.I. Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field // Physical Review. 1937. Vol. 51, No. 8. P. 652–654. DOI: 10.1103/PhysRev.51.652.
5. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 702 p. DOI: 10.1017/CBO9780511976667.
6. Заливако И.В., Семенин Н.В., Жаднов Н.О., Галстян К.П., Каменских П.А., Смирнов В.Н., Корольков А.Е., Сидоров П.Л., Борисенко А.С., Аносов Ю.П., Семериков И.А., Хабарова К.Ю., Колачевский Н.Н. Квантовые вычисления на ионах в ловушках: принципы, достижения и перспективы // Успехи физических наук. 2025. Т. 195, № 6. С. 585–620. DOI: 10.3367/UFNr.2024.12.039884.
7. Majer J., Chow J.M., Gambetta J.M., Koch J., Johnson B.R., Schreier J.A., Frunzio L., Schuster D.I., Houck A.A., Wallraff A., Blais A., Devoret M.H., Girvin S.M., Schoelkopf R.J. Coupling superconducting qubits via a cavity bus // Nature. 2007. Vol. 449, No. 7161. P. 443–447. DOI: 10.1038/nature06184.

ОБЪЯСНИМАЯ МОДЕЛЬ МУЛЬТИМОДАЛЬНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ОПУХОЛИ МОЗГА С ВЫБОРОМ ВАРИАНТА МАСКИ ЕЁ ЯДРА[1*]

А.И. Хоменко, В.Е. Турлапов

Исследовательский центр в области искусственного интеллекта
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Представлена объяснимая модель мультимодальной сегментации опухоли мозга по пространственно совмещённым МР-изображениям T1, T1c, T2 и FLAIR. Базовые маски уточняются обобщёнными аддитивными моделями. Для опухолевого ядра дополнительно строится маска гистограммного градиентного бустинга, а неглубокое регрессионное дерево выбирает один из двух вариантов. Для проверки решения сохраняются признаки, путь дерева, выбранный вариант и промежуточные результаты. Проверка с разделением пациентов показала повышение точности и уменьшение частоты крупных ухудшений по сравнению с безусловным применением дополнительной маски.

Ключевые слова: глиома, магнитно-резонансная томография, сегментация, объяснимый искусственный интеллект, обобщённая аддитивная модель, градиентный бустинг, дерево решений.

1. Введение

Мультимодальная магнитно-резонансная томография позволяет наблюдать различающиеся по сигналу области глиомы. В постановке Brain Tumor Segmentation (BraTS) используются T1-взвешенные изображения до контрастирования, T1-взвешенные изображения после контрастирования, обозначаемые T1c, T2-взвешенные изображения и изображения с подавлением сигнала свободной жидкости (Fluid-Attenuated Inversion Recovery, FLAIR). Совместный анализ четырёх последовательностей даёт сведения об анатомии, контрастном усилении и изменении содержания жидкости в ткани [1, 2].

Полная сегментация в постановке BraTS включает всю опухолевую область (Whole Tumor, WT), опухолевое ядро (Tumor Core, TC) и контрастно усиливающуюся область (Enhancing Tumor, ET). Эти области вложены друг в друга: ET входит в TC, а TC входит в WT. Поэтому независимое построение трёх масок может привести к геометрически противоречивому результату.

Современные исследования развивают прозрачные методы на основе кластеризации, пороговой обработки и топологических признаков [11, 14, 15], а также глубокие архитектуры с механизмами интерпретации [12, 13]. Их показатели получены на разных версиях BraTS и по разным протоколам, поэтому при сопоставлении необходимо указывать набор и условия оценки.

Повышение среднего Dice при уточнении маски опухолевого ядра может сопровождаться крупными ухудшениями в отдельных исследованиях, поэтому актуальна задача выбора между вариантами TC-маски с контролем частоты таких ухудшений, но при этом причина выбора должна быть доступна для проверки.

Детерминированная обработка позволяет проверить операции и изменения маски. Для ответственных задач обосновано применение интерпретируемых моделей [8]. В рассматриваемом алгоритме сначала формируются согласованные базовые маски, затем обобщённые аддитивные модели уточняют WT, TC и ET. Для TC градиентный бустинг строит второй вариант, а отдельное регрессионное дерево принимает решение о его использовании.

Под объяснимостью понимается возможность проследить формирование результата. Доступны одномерные функции аддитивных моделей, 13 признаков выбора TC, прогнозируемая

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства экономического развития РФ (соглашение о предостав-лении гранта № 139-15-2025-004 от 17 апреля 2025 г., ИГК 000000Ц313925Р3Х0002).

разность Dice, порог и путь неглубокого дерева. Также записываются промежуточные маски, параметры операций и контрольные суммы.

2. Математическая постановка

Пусть Ω представляет множество вокселей исследования, а x(v) содержит признаки вокселя v, рассчитанные по четырём последовательностям и базовым маскам. Требуется построить три бинарных множества WT, TC и ET, удовлетворяющие включениям ET ⊆ TC ⊆ WT. Для оценки совпадения предсказанной маски A и экспертной маски B использован коэффициент Dice:

$$\mathrm{Dice}(A, B) = \frac{2|A \cap B|}{|A| + |B|}$$

Dice сначала усреднялся по исследованиям каждого пациента, затем по пациентам с равным весом. Итоговый показатель равен среднему Dice для WT, TC и ET.

В каждой из пяти обучающих ветвей для областей WT, TC и ET строятся отдельные обобщённые аддитивные модели [6]. Вероятность принадлежности вокселя области r имеет вид:

$$p_r^{(k)}(v) = \sigma\left(\beta_{0r}^{(k)} + \sum_{j=1}^{m_r} f_{jr}^{(k)}\left(x_j(v)\right)\right)$$

Здесь σ обозначает логистическую функцию, β_{0r} является свободным коэффициентом, а f_{jr} представляет одномерную кусочно-линейную функцию признака. Используются линейные сплайны с шестью квантильными узлами и логистическая регрессия со штрафом второго порядка. Пороги равны 0,70 для WT, 0,60 для TC и 0,70 для ET.

Второй вариант TC строится классификатором гистограммного градиентного бустинга над деревьями решений [7]. Регрессионное дерево глубиной не более трёх получает 13 признаков всего исследования. На обучающих данных целевое значение дерева равно разности Dice между вариантом градиентного бустинга и вариантом обобщённой аддитивной модели. Для нового исследования экспертная разметка и Dice не используются. Дерево получает только признаки изображений, вероятностной карты и автоматически построенных масок, после чего прогнозирует ожидаемую разность:

$$\Delta\hat{D}_k = g_k(z)$$

Если прогноз превышает сохранённый порог γ_k, ветвь k принимает вариант градиентного бустинга. В противном случае сохраняется вариант обобщённой аддитивной модели. Выбирается целая маска TC. Воксели двух вариантов между собой не смешиваются.

При применении за пределами внутренней проверки выполняются все пять ветвей. Каждая ветвь обучена без одной из пяти непересекающихся групп пациентов. Итоговая маска каждой области формируется по правилу большинства, то есть воксель принимается при наличии не менее трёх голосов:

$$R_{final}(v) = 1\left[\sum_{k=1}^{5} 1\left[v \in R^{(k)}\right] \geq 3\right]$$

После объединения повторно проверяется вложенность ET ⊆ TC ⊆ WT. Из итоговых областей также выводятся перифокальная область WT \ TC и неусиливающаяся часть ядра TC \ ET.

3. Последовательность работы алгоритма

На вход подаются совмещённые MP-изображения T1, T1c, T2 и FLAIR после удаления тканей вне головного мозга. Обработка выполняется при совпадении размеров, положения и размеров вокселей.

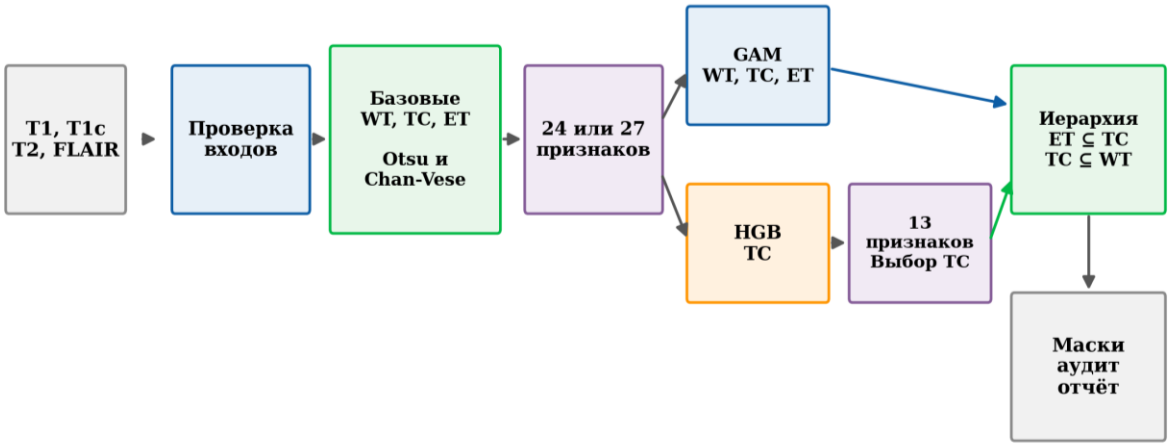


Рис. 1. Упрощённая схема алгоритма полной сегментации и выбора маски опухолевого ядра

Детерминированная часть нормализует интенсивности и формирует исходные WT, TC и ET с помощью графового метода, кластеризации, анализа контрастирования и локальных признаков. Варианты ET объединяются методом совместной оценки истинной сегментации и качества исходных масок [3].

Граница WT уточняется порогом Otsu в полосе 3 мм после устойчивой нормализации [4]. Допускается добавить до 10% и удалить до 5% объёма WT, при этом TC защищена от удаления. Для TC выполняются шесть итераций трёхмерного морфологического контура Chan-Vese в области, расширенной на 6 мм [5]. Изменения ограничены полосой 3 мм.

Обучаемое уточнение использует нормализованные интенсивности, их разности и средние, локальный контраст, градиенты, координаты и расстояния до базовых масок. Модели TC и ET получают 24 признака, модель WT и градиентный бустинг TC получают 27. Бинарные признаки отражают принадлежность вокселя базовым областям.

Для аддитивных моделей выбиралось до 1500 вокселей каждого класса на исследование, использовались логистическая функция потерь, L2-штраф 10^{-4} и до 1000 итераций. Для градиентного бустинга выбиралось до 1000 вокселей каждого класса. Зафиксированы 240 итераций, темп обучения 0,05, до 63 листьев, не менее 150 объектов в листе, L2-штраф 5,0 и 80% признаков в разбиении.

Тринадцать признаков дерева описывают объёмы и согласованность масок, сводки вероятностей бустинга и изменения базовой TC. Проверялись глубины 1–3, минимальные размеры листа 25–100 и пороги прогнозируемой разности от −0,01 до 0,06. Параметры выбирались во внутреннем цикле. Допустимая конфигурация не должна была уменьшать средний TC Dice, а доля снижений на 0,05 и более не должна была превышать 4%.

Для исследования сохраняются итоговая сегментация, результаты пяти ветвей, карты голосов, промежуточные объёмы, сводки вероятностей, признаки и путь дерева, выбранный вариант TC и контрольные суммы. Альтернативные TC можно повторно построить из зафиксированных моделей и входов.

4. Экспериментальная проверка

Внутренняя проверка выполнена на 1008 исследованиях 907 пациентов из BraTS 2023 Adult Glioma. Пациенты разделены на пять непересекающихся групп. Модели, оценивавшие очередную группу, обучались без её пациентов, а параметры дерева дополнительно выбирались во внутреннем цикле. Полученные значения являются OOF-оценкой на наборе разработки.

Доверительные интервалы парных изменений рассчитаны по 20 000 повторным выборкам пациентов с возвращением [10]. Границы соответствуют 2,5-му и 97,5-му процентилям.

Переносимость зафиксированной конфигурации без повторного обучения проверена на всех 146 исследованиях BraTS-Africa [9].

5. Результаты

Таблица 1. Dice[1] при внутренней проверке с разделением пациентов

Конфигурация	WT	TC	ET	Среднее
Детерминированная сегментация	0,799249	0,607150	0,642840	0,683080
Обобщённые аддитивные модели	0,816265	0,655883	0,688179	0,720109
Безусловная замена TC вариантом градиентного бустинга	0,816265	0,675516	0,688179	0,726653
Выбор варианта TC регрессионным деревом	0,816265	0,688542	0,688179	0,730996

Обобщённые аддитивные модели повысили средний Dice с 0,683080 до 0,720109. Безусловная замена TC вариантом градиентного бустинга дополнительно повысила средние TC и общий показатель, но снизила TC Dice не менее чем на 0,05 в 27,58% исследований относительно аддитивного варианта. Это показывает, что увеличение среднего значения не исключает крупных ухудшений отдельных сегментаций.

Регрессионное дерево выбрало вариант градиентного бустинга для 322 из 1008 исследований и сохранило аддитивный вариант для 686 исследований. TC Dice увеличился с 0,655883 до 0,688542. Парное изменение равно 0,032660 при 95-процентном доверительном интервале от 0,026324 до 0,039306. Средний показатель трёх областей увеличился на 0,010887 при доверительном интервале от 0,008775 до 0,013102. Доля исследований со снижением TC Dice не менее чем на 0,05 относительно аддитивного варианта составила 3,77% вместо 27,58% при безусловной замене.

Таблица 2. Внутренняя OOF-оценка разработанной модели и опубликованные значения Dice современных объяснимых и прозрачных методов

Метод	Данные и объём оценки	WT	TC	ET	Среднее[2]
TDA [14] (2026)	BraTS 2025, n=1251	0,7600	0,3400	0,4600	0,5200
GHMRF [11] (2015)	BraTS 2013, n=21	0,7200	0,6200	0,5900	0,6433
Разработанная модель	BraTS 2023 GLI, n=1008 OOF	0,8163	0,6885	0,6882	0,7310
HNMF, Gent [11] (2016)	UZ Gent, n=21	0,8100	0,7400	0,6800	0,7433
AUCseg [11] (2021)	BraTS 2018, n=210	0,8209	0,7087	0,7254	0,7517
TransXAI [13] (2024)	BraTS 2019 validation, n=125	0,8820	0,7820	0,7450	0,8030
HNMF, Leuven [11] (2016)	UZ Leuven, n=14	0,8500	0,8400	0,7300	0,8067
Factorizer [12] (2023)	BraTS, n=484, 5-fold CV	0,9016	0,8314	0,7933	0,8421
US-ATHC [15] (2026)	BraTS 2021 validation, n=219	0,9320	0,9190	0,8990	0,9167

Разработанная модель численно превысила GHMRF и TDA по WT, TC и ET. Относительно HNMF Gent она выше по WT и ET, но ниже по TC. Опубликованные значения AUCseg, TransXAI, Factorizer и US-ATHC выше, но из-за различий протоколов оценки это сопоставление нельзя назвать прямым рейтингом.

На 146 исследованиях BraTS-Africa полный алгоритм получил средний Dice 0,617372 против 0,545477 у детерминированной конфигурации с локальными коррекциями. Парное изменение составило 0,071895 при 95-процентном доверительном интервале от 0,059108 до 0,084894.

Вычислительные эксперименты проводились на сервере на базе Intel Xeon Gold с 48 физическими ядрами. В контрольном запуске полная обработка одного исследования BraTS 2023 GLI в однопоточном режиме на CPU без использования графического ускорителя заняла 182,12 с. Обработка 146 исследований BraTS-AFRICA при параллельном запуске на 48 процессах заняла 849,68 с.

На рисунке 2 совмещены графики изменения точности и частоты крупных снижений TC Dice. Во втором показателе каждый вариант сравнивается с аддитивной маской того же исследования. Поэтому уменьшение доли с 27,58 до 3,77% характеризует действие дерева выбора, а не сопоставление с другим опубликованным алгоритмом.

[1] Значения усреднены сначала по исследованиям каждого пациента, затем по пациентам с равным весом.
[2] Среднее опубликованных WT, TC и ET. Наборы данных, способы усреднения и протоколы оценки различаются, поэтому таблица не является прямым рейтингом.

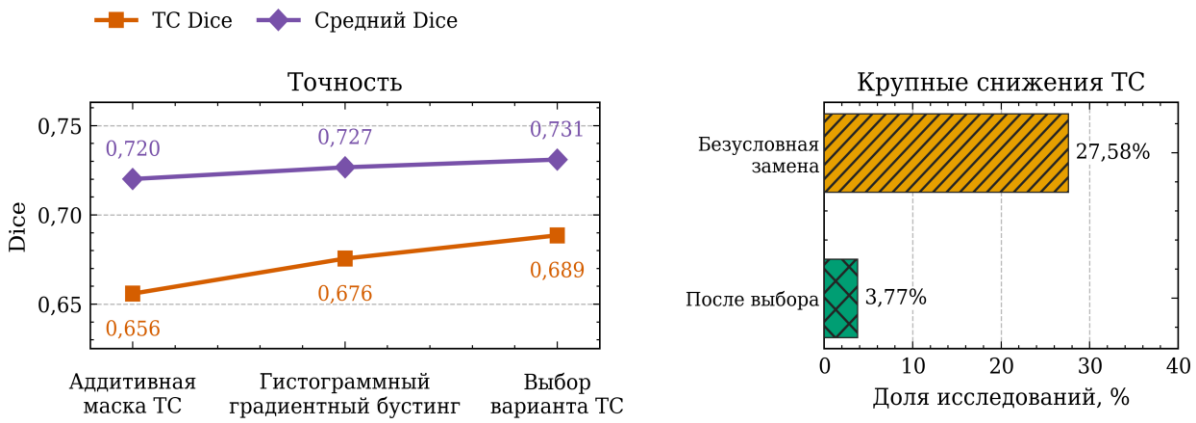


Рис. 2. Точность аддитивной маски TC, маски гистограммного градиентного бустинга при безусловном применении и результата выбора. Справа показана доля исследований со снижением TC Dice не менее чем на 0,05 относительно аддитивной маски.

На рисунке 3 показаны случай, ближайший к медиане среднего Dice, и случай, ближайший к медиане положительного изменения TC среди принятых вариантов градиентного бустинга. Ручной отбор по внешнему виду не выполнялся.

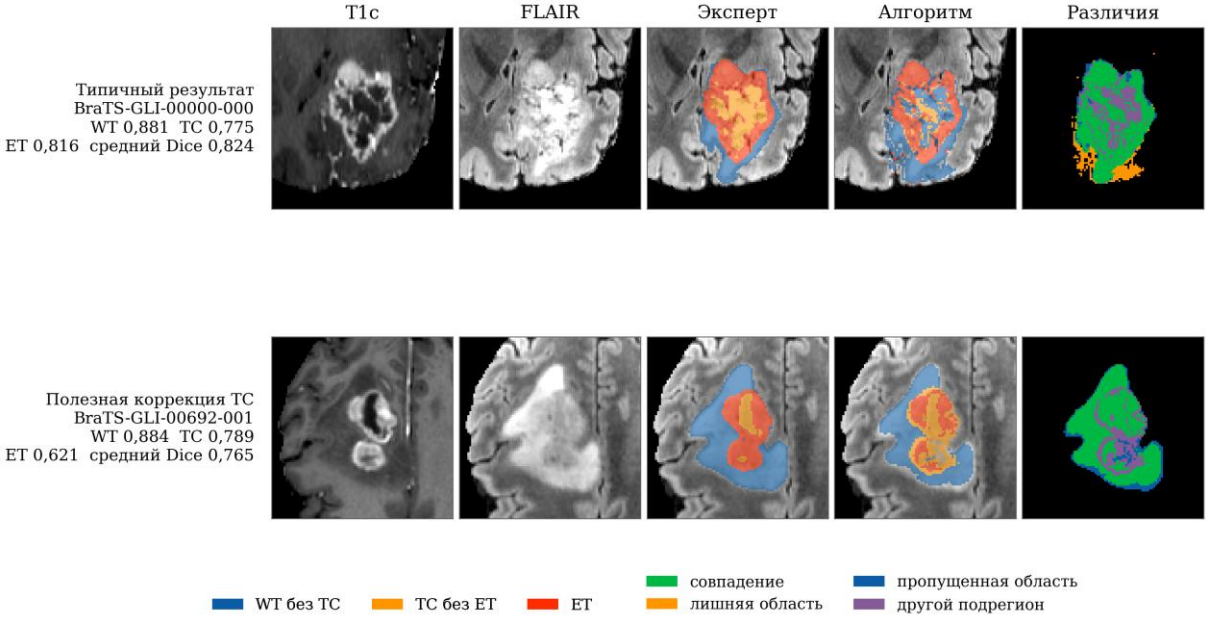


Рис. 3. Примеры внутренней сегментации. Показаны T1c, FLAIR, экспертная разметка, результат алгоритма и карта различий. На карте различий зелёный цвет обозначает совпадение, оранжевый лишнюю область, синий пропущенную область, фиолетовый другой подрегион.

6. Заключение

Модель формирует вложенные WT, TC и ET по четырём MP-последовательностям. Аддитивные модели уточняют базовую сегментацию, а неглубокое дерево выбирает один из двух вариантов TC по признакам, доступным без экспертной разметки нового исследования.

Выбор второго варианта TC повысил внутренний средний Dice до 0,730996 и уменьшил долю крупных снижений относительно безусловной замены. На BraTS-Africa зафиксированная конфигурация дала положительное среднее изменение относительно детерминированной сегментации. Дальнейшая работа будет направлена на повышение точности и переносимости алгоритма.

Литература

1. Menze B.H., Jakab A., Bauer S. et al. The Multimodal Brain Tumor Image Segmentation Benchmark (BRATS) // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2015. Vol. 34, No. 10. P. 1993-2024. DOI: 10.1109/TMI.2014.2377694.
2. Bakas S., Akbari H., Sotiras A. et al. Advancing The Cancer Genome Atlas glioma MRI collections with expert segmentation labels and radiomic features // Scientific Data. 2017. Vol. 4. Art. 170117. DOI: 10.1038/sdata.2017.117.
3. Warfield S.K., Zou K.H., Wells W.M. Simultaneous Truth and Performance Level Estimation (STAPLE): An Algorithm for the Validation of Image Segmentation // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2004. Vol. 23, No. 7. P. 903-921. DOI: 10.1109/TMI.2004.828354.
4. Otsu N.A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1979. Vol. 9, No. 1. P. 62-66. DOI: 10.1109/TSMC.1979.4310076.
5. Chan T.F., Vese L.A. Active Contours Without Edges // IEEE Transactions on Image Processing. 2001. Vol. 10, No. 2. P. 266-277. DOI: 10.1109/83.902291.
6. Hastie T., Tibshirani R. Generalized Additive Models // Statistical Science. 1986. Vol. 1, No. 3. P. 297-310. DOI: 10.1214/ss/1177013604.
7. Friedman J.H. Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine // The Annals of Statistics. 2001. Vol. 29, No. 5. P. 1189-1232. DOI: 10.1214/aos/1013203451.
8. Rudin C. Stop Explaining Black Box Machine Learning Models for High Stakes Decisions and Use Inter-pretable Models Instead // Nature Machine Intelligence. 2019. Vol. 1, No. 5. P. 206-215. DOI: 10.1038/s42256-019-0048-x.
9. Adewole M., Rudie J.D., Gbadamosi A. et al. The BraTS-Africa Dataset: Expanding the Brain Tumor Seg-mentation Data to Capture African Populations // Radiology: Artificial Intelligence. 2025. Vol. 7, No. 4. Art. e240528. DOI: 10.1148/ryai.240528.
10. Efron B., Tibshirani R.J. An Introduction to the Bootstrap. New York: Chapman & Hall, 1993. 456 p. ISBN 978-0-412-04231-7.
11. Zhao B., Ren Y., Yu Z. et al. AUCseg: An Automatically Unsupervised Clustering Toolbox for 3D-Segmentation of High-Grade Gliomas in Multi-Parametric MR Images // Frontiers in Oncology. 2021. Vol. 11. Art. 679952. DOI: 10.3389/fonc.2021.679952.
12. Ashtari P., Sima D.M., De Lathauwer L. et al. Factorizer: A Scalable Interpretable Approach to Context Modeling for Medical Image Segmentation // Medical Image Analysis. 2023. Vol. 84. Art. 102706. DOI: 10.1016/j.media.2022.102706.
13. Zeineldin R.A., Karar M.E., Elshaer Z. et al. Explainable Hybrid Vision Transformers and Convolutional Network for Multimodal Glioma Segmentation in Brain MRI // Scientific Reports. 2024. Vol. 14. Art. 3713. DOI: 10.1038/s41598-024-54186-7.
14. François A., Tinarrage R. Train-Free Segmentation in MRI with Cubical Persistent Homology // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2026. Vol. 68. Art. 20. DOI: 10.1007/s10851-026-01300-1.
15. Alameddine J., Thomarat C., Le-Guillou X. et al. US-ATHC: Unsupervised Multi-Class Glioma Segmenta-tion via Adaptive Thresholding and Clustering // Biomedicines. 2026. Vol. 14, No. 2. Art. 397. DOI: 10.3390/biomedicines14020397.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАНЕТАРНЫХ МОДЕЛЯХ С ПРИМЕНЕНИЕМ НАЛОЖЕННЫХ И МНОГОБЛОЧНЫХ СЕТОК[1*]

Н.И. Хохлов[1], И.А. Яковлев[1], Д.Д. Шевелева[1], О.А. Усольцева[1,2]

[1]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный,
[2]Институт динамики геосфер имени академика М.А. Садовского РАН, г. Москва

В работе представлены результаты численного моделирования распространения упругих волн в двумерных областях планетарного масштаба сеточно-характеристическим методом на наложенных и многоблочных сетках. Выполнена верификация на модели Земли PREM сравнением синтетических сейсмограмм с пакетом AxiSEM. Также подход применён к модели Марса, исследована параллельная эффективность двух стратегий декомпозиции области.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, наложенные сетки, многоблочные сетки, PREM, AxiSEM

1. Введение

Численное моделирование сейсмических волн – ключевой инструмент исследования внутреннего строения планет. Для численного решения такого рода задач широко применяются метод спектральных элементов [1, 3] и методы конечных разностей [2]. Методы спектральных элементов обычно строятся на применении неструктурированных сеток. В недавних работах для цилиндрических и сферических областей были применены наложенные и многоблочные сетки [2]. Сеточно-характеристический метод (СХМ) успешно применяется в динамических задачах механики сплошных сред [4]. Цель данной работы – исследование применимости СХМ на структурированных наложенных и многоблочных сетках для задач сейсмологии, верификация со сторонними пакетами и анализ параллельной масштабируемости.

2. Математическая модель и численный метод

Распространение волн описывается уравнениями линейной теории упругости. В данной работе используется формулировка в скоростях и напряжениях. Система приводится к характеристическим переменным и сводится к скалярным уравнениям переноса, для численного интегрирования используется сеточно-характеристическая схема третьего порядка точности.

В работе рассматривается расчётная область в виде круга, представляющая собой поперечное сечение планеты. Для устранения сингулярности полярной сетки в центре используется квадратная подобласть. В работе сравнивается подход на основе наложенных и многоблочных расчетных сеток. Наложенная сетка – центральный прямоугольник и перекрывающее его кольцо (рис. 1а). Многоблочная сетка – центральный квадрат и четыре примыкающих сектора (рис. 1б). При учёте топографии границы деформируются по рельефу.

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 26-11-00143), https://rscf.ru/project/26-11-00143/.

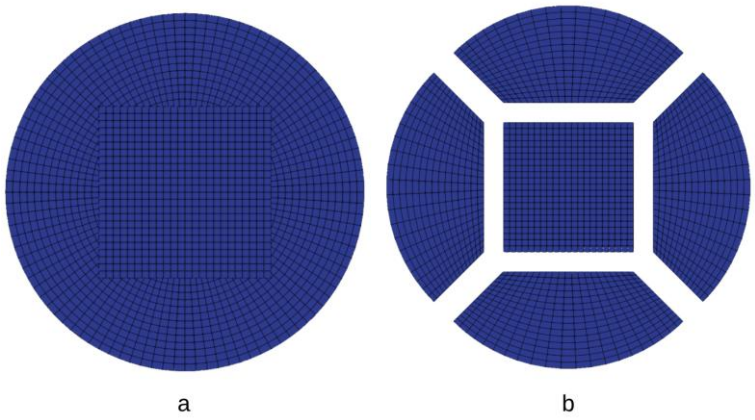


Рис. 1. Наложенная (а) и многоблочная (б) сетки для круговой области

3. Результаты

Для глобальной проверки подхода выполнено моделирование в двумерной радиально неоднородной модели Земли на наложенных структурированных сетках. Скоростная модель – Preliminary Reference Earth Model (PREM) [5], профиль $c_p(r)$, $c_s(r)$, $\rho(r)$ с сохранением разрывов на границах оболочек, во внешнем ядре $c_s = 0$ (рис. 2). Источник – импульс Рикера частотой 0,2 Гц на глубине 600 км, приёмники на поверхности.

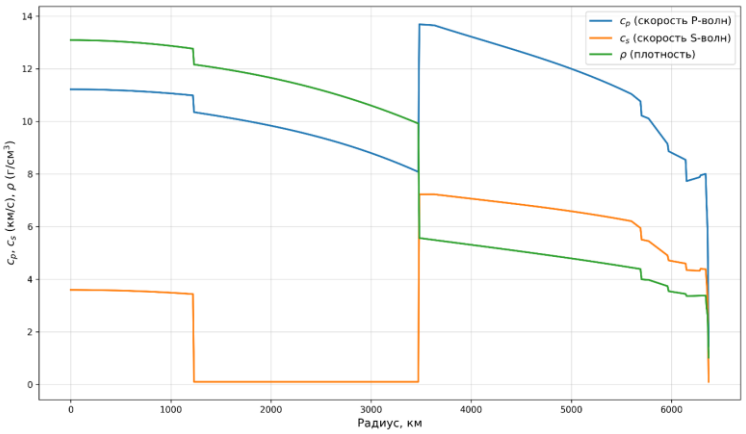


Рис. 2. Радиальные зависимости c_p, c_s и ρ для модели Земли PREM

Синтетические сейсмограммы (вертикальная компонента скорости) сравнивались с решением пакета AxiSEM [6] и теоретическими годографами (TauP/ObsPy). На эпицентральных расстояниях 6°–33° корректно воспроизводится прямая продольная волна P; согласие между AxiSEM и RECT на этом интервале наилучшее. Аналогично прослеживаются дифрагированные фазы P_{diff} и pP_{diff} (115°–155°), а также фазы, связанные с ядром (PKIKP, PKiKP, PKPbc, PKPab на 125°–175°). На рис. 3 слева – AxiSEM, справа исследуемый в работе метод. Зеленой линией обозначена фаза PKIKP, проходящая через внутреннее ядро, красной – фаза PKiKP, отраженная от границы внешнего и внутреннего ядра, синими линиями – ветви PKPbc и PKPab, распространяющиеся во внешнем ядре. В результате, оба метода имеют все четыре типа волн, а положение соответствующих фазовых ветвей в целом согласуется с теоретическими годографами. Это подтверждает применимость СХМ на наложенных сетках к моделированию основных продольных сейсмических фаз в модели Земли.

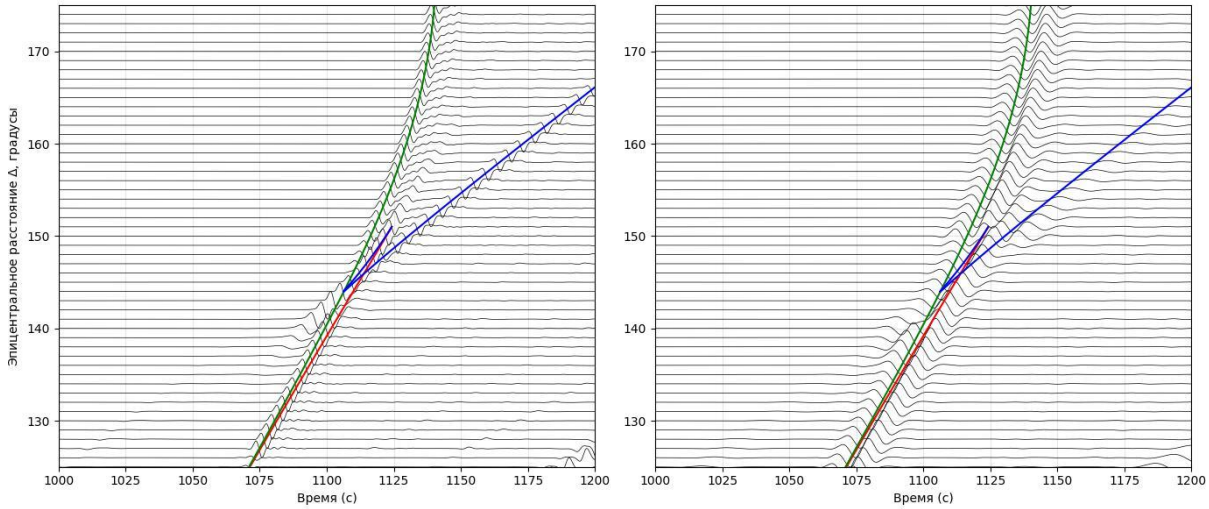


Рис. 3. Сравнение синтетических сейсмограмм фаз PKIKP, PKiKP, PKPbc и PKPab: AxiSEM – слева, RECT – справа

Также данный подход был применён к модели Марса, использовалась топография по MEGDR [7], внутренняя структура по Durán et al. [8]. Источник на глубине около 30 км имитирует падение метеорита; в волновом поле наблюдаются отражённые и преобразованные волны и характерный фронт внутри ядра. Дополнительно выполнено сравнение с SPECFEM2D [1, 3]. Параллельная реализация на MPI (сетки ~$6{,}4 \cdot 10^7$ узлов, до 96 процессов) показала ускорение до 32 раз.

4. Заключение

Реализован подход на основе сеточно-характеристического метода, наложенных и многоблочных расчётных сеток для численного решения задач сейсмологии в двумерных постановках. Верификация на модели Земли PREM сравнением с AxiSEM подтвердила корректное воспроизведение основных продольных фаз. Подход применён к модели Марса, было проведено сравнение с пакетом SPECFEM2D. Результаты распараллеливания алгоритмов показали лучшую масштабируемость наложенных сеток и меньшее время счёта многоблочных при декомпозиции по числу узлов. Дальнейшая работа связана с повышением точности подхода и переходом к трёхмерным моделям.

Литература

1. Komatitsch D., Tsuboi S., Tromp J. The spectral-element method in seismology // Geophysical Monograph Series. 2005. P. 205–227.
2. Qiu H. et al. An overset-grid finite-difference algorithm for seismic wavefield propagation modelling… // Geophys. J. Int. 2024. Vol. 241. P. 1881–1895.
3. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation // Geophys. J. Int. 1999. Vol. 139. P. 806–822.
4. Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И. Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1523–1533.
5. Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model // Phys. Earth Planet. Inter. 1981. Vol. 25. P. 297–356.
6. Nissen-Meyer T. et al. AxiSEM: broadband 3-D seismic wavefields in axisymmetric media // Solid Earth. 2014. Vol. 5. P. 425–445.
7. Neumann G. et al. MOLA Mission Experiment Gridded Data Record (MEGDR) // NASA Planetary Data System. 2003.
8. Durán C. et al. Seismology on Mars… // Phys. Earth Planet. Inter. 2022. Vol. 325. Art. 106851.

ОЦЕНКА МАСШТАБИРУЕМОСТИ ОПЕРАЦИЙ APACHE IGNITE ПО УНИВЕРСАЛЬНОМУ ЗАКОНУ МАСШТАБИРУЕМОСТИ

***А.М. Чесноков*[1,2]**

[1]*Московский физико-технический институт,*
[2]*СберТех*

Измерена зависимость пропускной способности пяти операций Apache Ignite 2.18 от числа потоков на узле с 16 выделенными ядрами. Проверено, описывает ли ее универсальный закон масштабируемости (USL) Гюнтера. Для чтения и записи достаточно закона Амдала: коэффициент конкуренции σ = 0,12–0,14, спада нет, и модель, подобранная по части точек, предсказывает остальные с ошибкой до 13 %. Член когерентности κ нужен только для обхода партиции, и его поведение согласуется с ограничением пропускной способности памяти. Вызов задачи на узле хранения данных выходит на плато при неполной загрузке процессора и лежит вне области применимости обеих моделей. По профилям зарегистрированное время ожидания на блокировках мало, а процессорное время расходуется на общих счетчиках, реестрах незавершенных операций и передаче управления между потоками.

Ключевые слова: масштабируемость, универсальный закон масштабируемости, закон Амдала, Apache Ignite, in-memory data grid, распределенные вычисления, производительность, профилирование

1. Введение

Сколько из N процессорных ядер система использует на деле, описывают закон Амдала [1], закон Густафсона [2] и универсальный закон масштабируемости (Universal Scalability Law, USL) Гюнтера [3, 4]. USL выражает ускорение через два параметра: долю последовательной работы, называемую конкуренцией, и затраты на согласование общего состояния, называемые когерентностью. USL применялся для анализа многопоточных приложений, кластеров Hadoop [5] и реляционных СУБД [6]. Опубликованные оценки распределенных платформ хранения данных в оперативной памяти, как правило, ограничиваются сравнительными измерениями пропускной способности по методике YCSB [7] без параметрической модели.

Объект исследования – Apache Ignite 2.18, распределенная платформа, которая хранит данные в оперативной памяти узлов кластера [8]. Она объединяет хранилище типа «ключ – значение» с транзакционной и атомарной семантикой операций и сервис выполнения распределенных задач. Данные в Ignite разбиты на фрагменты – партиции, распределяемые между узлами. Конфигурация содержит параметры, вводящие заранее известные виды координации: режим атомарности, число резервных копий, режим синхронности записи. Это делает систему удобной для проверки того, отражает ли USL цену согласования. Ограничения масштабирования Ignite лежат в программном слое – в блокировках, пулах потоков и управлении страницами памяти, то есть в области, для которой модель и предназначена.

Цель работы – получить параметры USL для основных операций Ignite на одном узле, проверить предсказательную силу модели вне выборки и сравнить ее с законом Амдала. Полученные коэффициенты объясняются по данным профилировщика. Рассматривается только внутриузловое масштабирование по числу потоков. Масштабирование по числу узлов кластера – предмет дальнейшего исследования.

2. Модель и метод проверки

USL задает ускорение S(N) при N исполнителях относительно одного исполнителя формулой

$$S(N) = N / (1 + \sigma(N - 1) + \kappa N(N - 1)), \quad (1)$$

где $\sigma \in [0, 1]$ – коэффициент конкуренции, то есть доля работы, выполняемой последовательно из-за общих ресурсов, $\kappa \geq 0$ – коэффициент когерентности, то есть затраты на согласование, растущие как число пар исполнителей. При $\kappa = 0$ формула (1) переходит в закон Амдала. При $\kappa > 0$ кривая имеет максимум в точке $N^* = \sqrt{((1 - \sigma)/\kappa)}$, после которой ускорение убывает. Этот участок называют ретроградным. В настоящей работе $S(N) = X(N)/X(1)$, где $X(N)$ – медианная пропускная способность при N потоках.

Проверка модели выполнена в три этапа. Коэффициенты подбирались методом наименьших квадратов по точкам $N \leq 10$, а точки $N = 12, 14, 16$ использовались для проверки предсказания вне выборки. Затем для каждой операции сравнивались невязки USL и закона Амдала, то есть разности между измеренным и предсказанным ускорением. Для закона Амдала σ подбирается отдельно при $\kappa = 0$. Наконец, для точки $N = 16$ снят профиль встроенного профилировщика JVM Java Flight Recorder (JFR) [10]. По профилю установлено, на что расходуется процессорное время и есть ли ожидание на блокировках.

3. Стенд и методика измерений

Стенд – виртуальная машина Timeweb Cloud [11] с выделенными ядрами: 16 vCPU AMD EPYC под KVM, без SMT, один узел NUMA, 64 ГБ ОЗУ, NVMe, Ubuntu 24.04, Temurin JDK 17.0.20, Apache Ignite 2.18.0. Использован один серверный узел. Потоки нагрузки работают в том же процессе JVM, что исключает влияние сети и позволяет измерять только программную конкуренцию. Данные разбиты на 256 партиций, значения 1 КБ, 1 000 000 ключей. Данные хранятся в памяти вне кучи JVM, запись на диск отключена, куча 8 ГБ, сборщик мусора G1. Доля времени, отобранного гипервизором, фиксировалась из /proc/stat каждые 5 с и за весь прогон составила 0,007 % процессорного времени.

Измерялись пять операций.

– get – чтение значения по ключу из кэша с атомарными операциями.

– put – запись значения по ключу в тот же кэш.

– put (tx) – запись в транзакционный кэш, где каждая операция выполняется как отдельная транзакция.

– scan – обход партиции: последовательное чтение всех записей одного фрагмента данных, около 3900 записей и 4 МБ, как в запросах без индекса.

– affinityCall – вызов задачи на узле хранения ключа: клиент отправляет небольшую задачу на тот узел, где лежит заданный ключ, задача читает значение из локальной памяти и возвращает результат. Так в Ignite переносят вычисления к данным вместо переноса данных к вычислениям.

Ключи выбирались равномерно. Для каждой операции измерялась пропускная способность при $N = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ потоках в закрытом цикле: каждый поток выдает следующий запрос сразу после получения ответа на предыдущий. Прогрев 10 с, замер 30 с, каждая точка повторялась 5 раз, порядок всех 250 точек перемешан.

Задержки регистрировал нагрузочный клиент библиотекой HdrHistogram, дополнительно фиксировались загрузка процессора и время сборки мусора. В расчетах использована медиана по повторам. Разброс по повторам, то есть отношение среднеквадратического отклонения к медиане, при $N \geq 10$ не превышал 3 %, при $N = 8$ достигал 5,7 %, при $N = 2–4$ – 9–22 % для операций доступа к данным, что, по-видимому, связано с размещением виртуальных ядер гипервизором.

4. Результаты

На рис. 1 показаны измеренные кривые ускорения. В табл. 1 приведены коэффициенты моделей, подобранные по точкам $N \leq 10$, предсказанный пик N^*, суммы квадратов невязок USL и закона Амдала и наибольшая по модулю ошибка предсказания для $N = 12–16$.

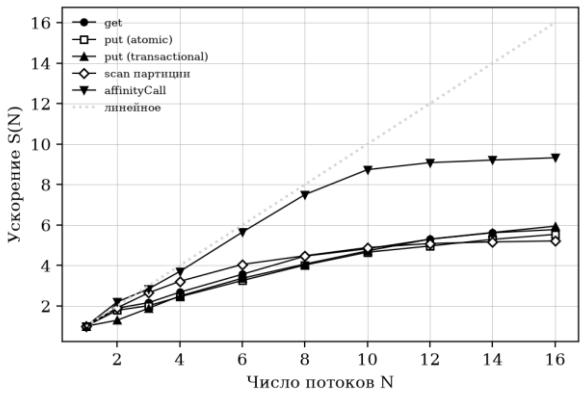


Рис. 1. Ускорение S(N) пяти операций Apache Ignite по числу потоков; пунктир – линейное ускорение

Таблица 1. Коэффициенты моделей (подбор по $N \le 10$; ± – стандартная ошибка), суммы квадратов невязок и ошибка предсказания для N = 12–16

Операция	X(1), оп/с	S(16)	σ	κ	N*	Σ невязок² USL / Амдал	Ошибка вне выборки
get	784 645	5,78	0,123 ± 0,029	0 ± 0,003	–	0,185 / 0,185	−4 %
put	525 320	5,54	0,143 ± 0,046	0 ± 0,005	–	0,361 / 0,361	−8 %
put (tx)	200 163	5,94	0,140 ± 0,059	0 ± 0,007	–	0,636 / 0,636	−13 %
scan	499	5,21	0,061 ± 0,007	0,0058 ± 0,0009	13	0,016 / 0,146	−7 %
affinity-Call	48 017	9,33	0,006 ± 0,011	0,0009 ± 0,0012	33	0,129 / 0,144	+31 %

Операции доступа к данным. Для чтения, записи и транзакционной записи достаточно закона Амдала. Коэффициент конкуренции σ составляет 0,12–0,14, а κ статистически неотличим от нуля. Ретроградного участка до 16 потоков нет, но ускорение на 16 ядрах ограничено значениями 5,5–5,9 при полной загрузке процессора. USL и закон Амдала дают одинаковые невязки. Модель, подобранная по $N \le 10$, предсказывает точки 12–16 с ошибкой от −2 до −13 %, и во всех случаях измеренное значение выше предсказанного. Транзакционность снижает пропускную способность одного потока в 2,6 раза, но не меняет форму кривой.

Обход партиции. Последовательное чтение целой партиции – единственная операция, для которой необходим член κ. USL уменьшает сумму квадратов невязок в 9 раз по сравнению с законом Амдала, предсказывает максимум при $N^* \approx 13$, и измеренная кривая действительно выравнивается на 12–16 потоках. Поведение κ согласуется с ограничением пропускной способности памяти. Каждый обход читает около 4 МБ, и при 16 потоках объем читаемых данных составляет 2600 обходов/с × 4 МБ ≈ 10 ГБ/с. Контрольные серии на том же стенде согласуются с этим объяснением. При значениях 100 Б κ уменьшается до 0,0016 ± 0,0002. При значениях 10 КБ и 200 000 ключах κ растет до 0,0145 ± 0,0001, предсказанный пик $N^* \approx 7{,}6$, измеренный пик – на 8 потоках.

Вызов задачи на узле хранения данных. Эта операция лежит вне области применимости USL и закона Амдала. Ускорение сверхлинейно при N = 2, близко к линейному до N = 8, а с N = 12 наступает плато 436–448 тыс. оп/с при загрузке процессора лишь 0,57. Модель, подобранная по $N \le 10$, переоценивает точки 12–16 на 11–31 %.

Такое поведение согласуется с закрытым циклом нагрузки. Один поток большую часть времени ожидает ответа задачи, поэтому добавление потоков сначала перекрывает ожидание, а затем упирается в предел, задаваемый задержкой обработки. По закону Литтла [9] число запросов, находящихся в обработке, равно произведению пропускной способности на задержку. При 16 одновременно обрабатываемых запросах и средней задержке 35,6 мкс это дает оценку 449 тыс. оп/с при измеренных 448 тыс. Совпадение показывает, что плато задано задержкой обработки задания.

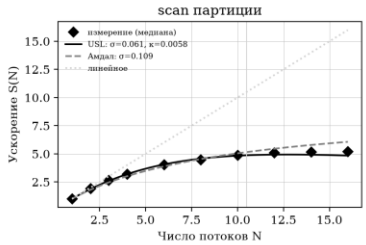


Рис. 2. scan: измерения, USL (σ = 0,061, κ = 0,0058) и закон Амдала (σ = 0,109); вертикальная линия – граница подбора N ≤ 10

4.1. Профилирование при N = 16

Далее по профилям JFR рассмотрено, на что уходит процессорное время при N = 16 потоках. Зарегистрированное время ожидания на блокировках мало. Профили длительностью 60 с с выборкой стеков каждые 10 мс зарегистрировали за прогон от 0 до 18 событий входа в занятый монитор, а все длительные простои потоков относятся к простаивающим служебным пулам сервера. Доли горячих участков показывают, на каких общих структурах расходуется процессорное время (табл. 2), но не отделяют полезную работу операции от затрат, растущих с числом потоков. Для чтения наибольшая доля выборок стека приходится на обновление общих счетчиков внутренних метрик, хотя сбор статистики кэша выключен. Далее идут общий семафор, ограничивающий число незавершенных асинхронных операций, пробуждение ожидающих потоков при завершении операции, доступ к переменным ThreadLocal и проверка активной транзакции при каждом чтении. Для записи основная доля связана с переменными ThreadLocal и с общим реестром незавершенных операций. Это конкурентная хеш-таблица ConcurrentHashMap, куда каждая операция добавляется и откуда удаляется. Для транзакционной записи заметны счетчики метрик и создание объекта блокировки на каждую транзакцию. Для вызова задачи время уходит на служебные действия вокруг задачи: счетчики метрик, запись событий о запуске и завершении задания, копирование его атрибутов. Пул исполнителей занят лишь на 40 %.

Таблица 2. Горячие участки по профилям JFR при N = 16

Операция	Основные потребители процессорного времени при N = 16 (доля выборок стека по JFR)
get	общие счетчики метрик 16 %; семафор асинхронных операций 12 %; пробуждение ожидающих потоков 8 %; ThreadLocal 7 %; проверка активной транзакции 5 %
put	ThreadLocal 22 %; реестр незавершенных операций 10 %; спин-блокировка состояния узла 4 %; проверка топологии 4 %
put (tx)	общие счетчики метрик 12 %; создание объекта блокировки на транзакцию 8 %; ThreadLocal и пробуждение потоков – менее 5 % каждый
affinityCall	общие счетчики метрик 6 %; запись событий задания 6 %; копирование атрибутов задания 5 %; пул исполнителей задач занят на 40 %

Профили согласуются с тем, что «конкуренция» в терминах USL для доступа к данным складывается из когерентного трафика кэш-линий процессора на общих счетчиках и реестрах и из стоимости передачи управления между потоками. Какая доля σ приходится на каждый участок, по долям выборок установить нельзя.

5. Обсуждение и ограничения

При использовании результатов необходимо учитывать следующие ограничения.

– Измерения выполнены на одном узле, одной версии Ignite и JDK и на виртуальной машине. Ядра выделены, но кэш последнего уровня и память разделяются с соседями. Повышенный разброс при N = 2–4 отнесен к размещению виртуальных ядер.

– Ось масштабирования – потоки клиента в закрытом цикле, поэтому для вызова задачи измеряется задержка конвейера заданий.

– Член κ у обхода партиции зависит от объема данных, и ограничение полосы памяти как его причина не измерено напрямую, поэтому значение переносимо лишь при том же размере записей.

– Коэффициенты получены при равномерном распределении ключей. При неравномерном доступе конкуренция за отдельные партиции может изменить σ.

– Результаты относятся к однородным ядрам. На процессорах с разнородными ядрами излом кривой задается структурой процессора, и подбирать USL по таким измерениям без ее учета нельзя.

6. Заключение

На основе данных можно сделать следующие практические выводы. Для доступа к данным на одном узле Ignite 2.18 достаточно закона Амдала: σ = 0,12–0,14, пропускная способность на 16 потоках примерно в 6 раз выше однопоточной, спада нет. Для этой конфигурации и этой нагрузки модель, подобранная по части точек, предсказывает остальные с ошибкой до 13 %, и ею можно пользоваться вместо полного измерения. Член когерентности USL в Ignite проявился только для обхода партиций, его значение зависит от размера записей и согласуется с ограничением пропускной способности памяти, поэтому переносится только вместе с размером записей. Вызов задачи на узле хранения в закрытом цикле измеряет задержку конвейера заданий, и для него нужна нагрузка с открытым циклом. По профилям σ у Ignite связано с процессорным временем на общих счетчиках, реестрах и передаче управления, а зарегистрированное ожидание на блокировках мало. Поиск резерва производительности имеет смысл начинать с этих участков. Дальнейшая работа: ось узлов с резервными копиями и синхронной записью и влияние режима журнала при хранении на диске.

Литература

1. Amdahl G. M. Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities // Proc. AFIPS Spring Joint Computer Conference. 1967. P. 483–485.
2. Gustafson J. L. Reevaluating Amdahl's law // Communications of the ACM. 1988. Vol. 31, No. 5. P. 532–533.
3. Gunther N. J. A simple capacity model of massively parallel transaction systems // Proc. Int. Computer Measurement Group (CMG) Conference. San Diego, 1993.
4. Gunther N. J. Guerrilla Capacity Planning. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007.
5. Gunther N. J., Puglia P., Tomasette K. Hadoop superlinear scalability // Communications of the ACM. 2015. Vol. 58, No. 4. P. 46–55.
6. Schwartz B. Practical Scalability Analysis with the Universal Scalability Law: white paper. VividCortex, 2015.
7. Cooper B. F., Silberstein A., Tam E., Ramakrishnan R., Sears R. Benchmarking cloud serving systems with YCSB // Proc. 1st ACM Symposium on Cloud Computing (SoCC '10). 2010. P. 143–154.
8. Apache Ignite Documentation. URL: https://ignite.apache.org/docs/ignite2/latest/ (дата обращения: 27.09.2026).
9. Little J. D. C. A proof for the queuing formula: L = λW // Operations Research. 1961. Vol. 9, No. 3. P. 383–387.
10. Java Flight Recorder. JDK 17 Documentation. URL: https://docs.oracle.com/en/java/javase/17/jfapi/ (дата обращения: 27.09.2026).
11. Timeweb Cloud. URL: https://timeweb.cloud/ (дата обращения: 05.10.2026).

НЕЧЁТКО-ГРАФОВАЯ И МАРКОВСКАЯ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ АКТУАЛЬНОСТИ УГРОЗ БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ БДУ ФСТЭК РОССИИ

В.В. Шейкин, Д.В. Фролов

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ

Предлагается единая математическая модель оценки актуальности и динамики угроз безопасности информации, объединяющая нечётко-множественную модель риска на графе угроз с доказанной неаддитивностью совокупного риска, практический коэффициент актуальности угрозы уязвимости $\boldsymbol{k = U \cdot S}$ и аппарат скрытых и нечётких скрытых марковских моделей (СММ) поведения нарушителя. Функции опасности, защищённости и взаимного влияния угроз строятся не экспертно, а непосредственно из атрибутов реальных угроз: объектов воздействия, компонентов информационной системы, способов реализации и мер защиты. Доказано, что коэффициент $\boldsymbol{k = U \cdot S}$ является α-срезом общего нечёткого отношения взаимного влияния угроз, его нечёткое обобщение $\boldsymbol{\tilde{k}}$ согласовано с ним при пороговом переходе, а задача поиска пути максимального совокупного риска сводится к декодированию Витерби на скрытой марковской модели с той же весовой матрицей, что даёт полиномиальный алгоритм вместо экспоненциального перебора путей. Показано, что модель риска, коэффициент актуальности и СММ суть проекции одной алгебраической структуры $(\boldsymbol{DDI, W, \oplus, \otimes})$ на множестве угроз с нечётким отношением взаимного влияния. Модель апробирована на агрегированных данных Банка данных угроз (БДУ) ФСТЭК России по 11 классам угроз: построена весовая матрица взаимного влияния, вычислены риск, коэффициент актуальности и путь максимального совокупного риска, а декодирование Витерби на подмодели из четырёх угроз даёт содержательно интерпретируемый результат. Анализ чувствительности к выбору весов модели показал устойчивость ранжирования угроз: совпадение наиболее опасных угроз составило 80–100% при варьировании весов.

Ключевые слова: нечёткие множества, теория графов, скрытые марковские модели, банк данных угроз, ФСТЭК России, коэффициент актуальности, алгоритм Витерби, α-срез, неаддитивность риска.

1. Введение

Актуальность и динамика угроз безопасности информации оцениваются на практике табличным коэффициентом $k = U \cdot S$, где U и S – число входящих и исходящих актуальных угроз для вершины уязвимости на графе угроз. Одновременно в исследовательской литературе развиваются, но формально не сведены друг к другу ещё две содержательно связанные конструкции: (1) нечётко-множественная модель риска деструктивных воздействий на графе угроз с доказанной неаддитивностью совокупного риска [7] и (2) аппарат скрытых и нечётких скрытых марковских моделей (СММ) [3, 9], применяемый для описания и прогнозирования динамики поведения нарушителя [8]. Обе конструкции опираются на нечёткие множества [1] и нечёткие отношения [2, 10], а практический коэффициент $k = U \cdot S$ используется в контексте методических документов ФСТЭК России [5] и классификации уязвимостей [6], однако все три конструкции применяются на практике изолированно друг от друга.

Целью настоящей работы является построение единой алгебраической структуры $(DDI, W, \oplus, \otimes)$ – множества угроз DDI с нечётким отношением взаимного влияния W и парой операций агрегирования, в рамках которой: (а) коэффициент $k = U \cdot S$ получает строгий вывод как α-срез общего нечёткого отношения W; (б) его нечёткое обобщение $\tilde{k}$ согласуется с $k = U \cdot S$ при пороговом переходе; (в) задача поиска пути максимального совокупного риска сводится к декодированию Витерби [4] на скрытой марковской модели, построенной по той же весовой матрице W, что даёт полиномиальный, а не экспоненциальный алгоритм; (г) функции опасно-

сти, защищённости и взаимного влияния вычисляются не экспертно, а непосредственно из атрибутов реальных угроз Банка данных угроз (БДУ) ФСТЭК России, на которых модель и проверяется численно.

2. Модель

2.1. Граф деструктивных воздействий и неаддитивность риска

Пусть $DDI = \{d_1, \dots, d_n\}$ – множество угроз, каждой из которых сопоставлены функция опасности $D(d_j) \in [0,1]$ и функция защищённости $P(d_j) \in [0,1]$, скорректированный риск $R_{adj}(d_j)$ при этом учитывает обе величины. Для последовательности воздействий $d = (d_{j_1}, \dots, d_{j_m})$, в которой каждое последующее воздействие реализуется с учётом результатов предыдущего, кумулятивный риск сценария определяется мультипликативной агрегацией взаимного влияния $\mu_{MI}(di, d_j)$ вдоль пути. На иллюстративном примере из четырёх угроз «фишинговое письмо → установка вредоносного ПО → повышение привилегий → эксфильтрация данных» со степенями взаимного влияния $\mu_{MI} = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}75$ вдоль цепочки и $R_{adj}(d_1) = 0{,}378$: $R_{TOTAL}\ (d_1 \to d_2 \to d_3 \to d_4) = R_{adj}(d_1) \cdot (1 + 0{,}7) \cdot (1 + 0{,}8) \cdot (1 + 0{,}75) \approx 0{,}378 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}75 \approx 2{,}024$, то есть более чем в 4,5 раза выше наибольшего одиночного скорректированного риска (0,448) и почти в 2,4 раза выше риска укороченной цепочки без промежуточного звена «установка ВПО»: $R_{TOTAL}\ (d_1 \to d_3 \to d_4) = 0{,}378 \cdot (1 + 0{,}3) \cdot (1 + 0{,}75) \approx 0{,}860$.

Это подтверждает неаддитивность совокупного риска: ни сумма, ни максимум рисков отдельных звеньев не отражают опасности цепочки атаки в целом и требуется учитывать структуру и направленность взаимного влияния угроз, что и мотивирует построение отношения $w(d_i, d_j)$ в п. 2.3.

2.2. Функции опасности и защищённости по данным БДУ ФСТЭК России

Вместо экспертного назначения $D(d_j)$ и $P(d_j)$ вручную (как в исходном модельном примере [7]) предлагается вычислимое определение через атрибуты угрозы d_j из БДУ ФСТЭК России: множество объектов воздействия $O(d_j)$, компонентов информационной системы $K(d_j)$, способов реализации $M(d_j)$ и мер защиты $Z(d_j)$. Опасность угрозы задаётся как среднее арифметическое трёх нормированных долей от общего числа объектов, компонентов и способов реализации по всем угрозам:

$$D(d_j) = \frac{1}{3}\left(\frac{|O(d_j)|}{|O|} + \frac{|K(d_j)|}{|K|} + \frac{|M(d_j)|}{|M|}\right) \tag{1}$$

то есть опасность растёт с широтой «поверхности воздействия» угрозы. Защищённость экспоненциально насыщается с ростом числа применимых мер защиты (эффект «убывающей предельной полезности» дополнительного контроля, характерный для эшелонированной защиты, defence in depth):

$$P(d_j) = 1 - e^{-\kappa |Z(d_j)|}, \quad \kappa > 0 \tag{2}$$

где $\kappa > 0$ – параметр насыщения. Обе функции принимают значения в [0,1] и монотонно связаны с ростом соответствующих множеств атрибутов.

2.3. Взаимное влияние угроз и граф деструктивных воздействий

Взаимное влияние пары угроз d_i, d_j вычисляется как взвешенная комбинация коэффициентов подобия по атрибутам, агрегирующая совпадение по объектам воздействия, компонентам и способам реализации и различие по мерам защиты:

$$\begin{aligned} w(d_i, d_j) = \lambda_M \operatorname{ov}\left(M(d_i), M(d_j)\right) + \lambda_K \operatorname{ov}\left(K(d_i), K(d_j)\right) \\ +\lambda_O \operatorname{ov}(O(d_i), O(d_j)) - \lambda_Z J(Z(d_i), Z(d_j)) \end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda_M + \lambda_K + \lambda_O = 1, \quad \lambda_M, \lambda_K, \lambda_O, \lambda_Z \in [0,1]$ – весовые коэффициенты значимости атрибутов. Ориентированный взвешенный граф с весами w задаёт граф деструктивных воздействий (DDI, W).

2.4. Коэффициент актуальности как α-срез общей модели

Для порогового уровня $\alpha \in (0,1]$ назовём дугу (d_i, d_j) актуальной, если её степень взаимного влияния не ниже α:

$$R_\alpha = \{(d_i, d_j) \in DDI \times DDI : w(d_i, d_j) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1] \tag{4}$$

Для вершины d_j определяются число входящих и исходящих связей на α-срезе и их произведение:

$$U_\alpha(d_j) = |\{i : (d_i, d_j) \in R_\alpha\}|, \quad S_\alpha(d_j) = |\{i : (d_j, d_i) \in R_\alpha\}|, \quad k_\alpha(d_j) = U_\alpha(d_j) \cdot S_\alpha(d_j) \tag{5}$$

Полученный результат показывает, что практический коэффициент актуальности угрозы уязвимости $k = U \cdot S$ в точности совпадает с $k_\alpha(d_j)$ при отождествлении вершин орграфа безопасности информационной системы с вершинами графа деструктивных воздействий, то есть является α-срезом общего нечёткого отношения w. Это же объясняет известную практическую особенность коэффициента $k = U \cdot S$ – его немонотонное, «скачкообразное» поведение при изменении состава системы защиты, поскольку U_α и S_α являются кусочно-постоянными функциями порога α.

Нечёткое обобщение коэффициента, не зависящее от произвольного выбора α, вводится как:

$$U_f(d_j) = \sum_{i \neq j} w^+(d_j, d_i), \quad S_f(d_j) = \sum_{i \neq j} w^+(d_j, d_i), \quad \tilde{k}(d_j) = U_f(d_j) \cdot S_f(d_j) \tag{6}$$

где $w^+(d_i, d_j) = max\{w(d_i, d_j), 0\}$. Данная формула устанавливает, что при замене w^+ его индикатором превышения порога $[w \geq \alpha]$ нечёткий коэффициент $\tilde{k}$ переходит в k_α,то есть $\tilde{k}$ и $k = U \cdot S$ связаны отношением «общее – частное».

2.5. Скрытая марковская модель и декодирование Витерби

Переходная и эмиссионная матрицы скрытой марковской модели поведения нарушителя строятся непосредственно из весовой матрицы W и множеств способов реализации $M(d_j)$, без дополнительного экспертного задания:

$$A_{ij} = \frac{w^+(d_i, d_j)}{\sum_k w^+(d_i, d_k)} \tag{7}$$

Задача поиска максимального совокупного риска по всем путям длины ровно T в графе деструктивных воздействий (ограниченная длиной T по аналогии с практической рекомендацией [7]) эквивалентна задаче декодирования Витерби на этой скрытой марковской модели и решается рекурсией динамического программирования:

$$\delta_t(j) = \max_i [\delta_{t-1}(i) \cdot A_{ij}] \cdot B_j(o_t) \tag{8}$$

за время $O(|DDI|^2 \cdot T)$ вместо экспоненциального перебора всех путей. Тем самым открытый вопрос о вычислительной трудоёмкости поиска максимального пути в общем случае получает точное полиномиальное решение для путей ограниченной длины.

2.6. Единство модели

Центральным результатом работы является следующее: пусть W – нечёткое отношение взаимного влияния, вычисленное по формуле (3) из атрибутов угроз БДУ ФСТЭК России. Тогда: (1) при мультипликативной агрегации $1 + W$ вдоль путей и максимизации по путям W порождает модель риска деструктивных воздействий [7] с доказанной неаддитивностью совокупного риска (п. 2.1); (2) при α-срезе $W \rightarrow [W \geq \alpha]$ и подсчёте входящих/исходящих дуг W порождает коэффициент $k = U \cdot S$ (формула 5), а при агрегации без порога – его нечёткое обобщение $\tilde{k}$ (формула 6); (3) при стохастической нормировке $W \rightarrow A$ и введении эмиссионной матрицы B из множеств способов реализации W порождает скрытую марковскую модель поведения нарушителя [8], для которой задача поиска максимального риска по путям ограниченной

длины эффективно решается алгоритмом Витерби (формула 8); (4) при рассмотрении W как нечёткого отношения с max-произведение композицией W порождает нечёткую скрытую марковскую модель [9, 10]. Иными словами, три конструкции, введённые независимо в разных источниках, суть проекции одной алгебраической структуры $(DDI, W, \oplus, \otimes)$ на разные операции агрегирования.

3. Апробация на данных БДУ ФСТЭК России

3.1. Исходные данные и весовая матрица

Исходные данные представлены агрегированной выгрузкой из БДУ ФСТЭК России, содержащей 11 укрупнённых классов угроз (УБИ 1, …, УБИ 11), для которых |O| = 12 объектов воздействия, |K| = 33 компонента информационной системы, |M| = 109 способов реализации и |Z| = 240 мер защиты (суммарно по всем классам). По формуле (3) при весах $\lambda_M = 0{,}4$; $\lambda_K = 0{,}3$; $\lambda_O = 0{,}15$; $\lambda_Z = 0{,}15$ построена весовая матрица W размера 11×11. Матрица отчётливо асимметрична: например, $w(\text{УБИ 1} \rightarrow \text{УБИ 9}) = 0{,}426$, тогда как $w(\text{УБИ 9} \rightarrow \text{УБИ 1}) = 0{,}077$ есть широкая по поверхности воздействия угроза «утечка информации с периферийного оборудования» (УБИ 1), существенно облегчающая последующую реализацию узкой угрозы «получение информации из недоверенного источника» (УБИ 9), но не наоборот.

3.2. Коэффициент актуальности и путь максимального риска

По формуле (5) вычислены значения k_α при уровнях порога α = 0,3 и α = 0,5: переход от α = 0,3 к 0,4 не меняет состава актуальных дуг, однако при α = 0,5 коэффициент меняется скачкообразно и неравномерно по вершинам (например, для «УБИ 10» – с 90 до 45), что иллюстрирует немонотонность практического коэффициента $k = U \cdot S$. Применение формулы, учитывающей риск и матрицу W, ограниченное путями длины $k \leq 4$, находит путь максимального совокупного риска: в пути УБИ 2 → УБИ 3 → УБИ 4 → УБИ 7 путь начинается с несанкционированного доступа к автоматизированному рабочему месту (наибольший скорректированный риск $R_{adj} = 0{,}2595$ среди всех 11 угроз), продолжается через несанкционированную модификацию и подмену информации, передаваемой по физическим линиям связи, и завершается ненадлежащим использованием АРМ. Показательно, что этот путь не совпадает с приоритетом по одному лишь коэффициенту k_α (наибольшее значение k_α = 90 разделяют сразу семь угроз, включая УБИ 1, 5, 8, 10, 11). Формула, учитывающая направленность и последовательность влияний, даёт содержательно иной и более специфичный результат.

3.3. Декодирование Витерби и чувствительность к весам

На подмодели из четырёх угроз с наибольшим базовым риском (УБИ 2, УБИ 3, УБИ 8, УБИ 9) декодирование Витерби (формула (8)) по наблюдаемой последовательности «доступ без авторизации → произвольное иное событие» даёт наиболее вероятный путь УБИ 8 → УБИ 3. Наиболее вероятной интерпретацией оказывается сценарий, при котором нарушитель сначала нарушил функционирование автоматизированного рабочего места, а затем перешёл к несанкционированной модификации информации, передаваемой по физическим линиям связи. Поскольку веса λ_M, λ_K, λ_O, λ_Z в формуле (3) выбраны на основе содержательных, а не эмпирически откалиброванных соображений, проверена устойчивость ранжирования угроз по $\tilde{k}$ к их изменению: при альтернативном наборе весов II состав пяти угроз с наибольшим $\tilde{k}$ совпадает полностью (100% top-5), при наборе I в четырёх из пяти позиций (80% top-5), то есть относительное ранжирование угроз устойчиво к разумным вариациям весов, даже при существенном изменении абсолютных значений $\tilde{k}$.

4. Обсуждение

Практическая ценность модели иллюстрируется расчётом для угрозы с наибольшим риском «УБИ 2» ($R_{adj} = 0{,}2595$). Если система дополнительно внедряет 30 независимых мер защиты сверх уже учтённых 167, защищённость по формуле (2) возрастает с $P_0 \approx 0{,}6715$ до $P_1 \approx 0{,}7311$, а скорректированный риск снижается с 0,2595 до 0,2124, относительное снижение риска составляет приблизительно 18,1%. Эта величина может быть непосредственно сопоставлена со стоимостью внедрения дополнительных мер для обоснования экономической целесообразности конкретных контрмер.

Практический выигрыш от сведения к декодированию Витерби (формула 8) можно проиллюстрировать численно: при |DDI| = 11 угрозах и ограничении длины пути T = 4 полный перебор путей (с учётом возможных повторений вершин) требует до $11^4 = 14\,641$ проверок, тогда как рекурсия Витерби (формула (8)) требует лишь $O(|DDI|^2 \cdot T) = 11^2 \cdot 4 = 484$ операций. Получен выигрыш более чем на порядок уже на этом небольшом графе, причём разрыв растёт экспоненциально с увеличением T.

Модель имеет ряд ограничений: формула (3) для весов взаимного влияния – эвристическая, не выведенная из первых принципов конструкция, а веса $\lambda_M,\ \lambda_K,\ \lambda_O, \lambda_Z$ выбраны на основе содержательных, а не статистически откалиброванных соображений. Марковское допущение (независимость перехода от предыстории, за исключением текущего состояния) применительно к реальному поведению нарушителя не может считаться строго обоснованным логически. Кроме того, значение $|Z| = 240$ является технически усечённым: агрегированная выгрузка БДУ ограничивает список мер защиты, приводимых для каждого класса угроз, что может занижать истинную мощность множества $Z(d_j)$ для угроз с большим числом применимых мер. Естественными направлениями дальнейших исследований представляются эмпирическая калибровка весов и параметра насыщения к по статистике реальных инцидентов, настройка переходной и эмиссионной матриц по историческим данным мониторинга алгоритмом Баума-Велша, а также сопоставление модели с данными MITRE ATT&CK.

Заключение

В работе построена единая математическая модель оценки актуальности и динамики угроз безопасности информации, объединяющая три ранее разрозненные конструкции: нечёткомножественную модель риска деструктивных воздействий с доказанной неаддитивностью совокупного риска, практический коэффициент актуальности угрозы уязвимости $k = U \cdot S$ и аппарат скрытых и нечётких скрытых марковских моделей поведения нарушителя.

В отличие от исходного модельного примера, все конструкции апробированы на реальных агрегированных данных Банка данных угроз ФСТЭК России, охватывающих 11 классов угроз с полным перечнем атрибутов. Специалист по защите информации получает вычислимые, а не экспертно назначаемые значения параметров модели риска, строгое обоснование применяемого на практике коэффициента актуальности и конструктивный полиномиальный алгоритм поиска наиболее опасной цепочки атак.

Литература

1. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.
2. Rosenfeld A. Fuzzy Graphs // Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes / eds. L. A. Zadeh, K. S. Fu, M. Shimura. – New York: Academic Press, 1975. – P. 77–95.
3. Rabiner L.R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // Proceedings of the IEEE. – 1989. – Vol. 77, № 2. – P. 257–286.
4. Viterbi A.J. Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems // IEEE Transactions on Communications Technology. – 1971. – Vol. COM-19, № 5. – P. 751–772.
5. Методический документ. Методика оценки угроз безопасности информации: утв. ФСТЭК России 05.02.2021. – URL: https://docs.cntd.ru/document/607699443.

6. ГОСТ Р 56546-2015. Защита информации. Уязвимости информационных систем. Классификация уязвимостей информационных систем. – М.: Стандартинформ, 2015.
7. Шейкин В.В., Стародубов К.В. Математическая модель анализа рисков деструктивных воздействий в информационных системах на основе нечеткой логики // Безопасность. Управление. Искусственный интеллект. 2026. № S3 (материалы Международной научно-практической конференции «Цифровые технологии, анализ данных и искусственный интеллект в науке, образовании, управлении»). С. 47–57.
8. Шейкин В.В. Подход к моделированию поведения нарушителя в государственных информационных системах на основе скрытых марковских моделей / В.В. Шейкин, К.В. Стародубов, П.И. Карасев // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2026. – Т. 15. – № 2(74). – С. 20-25. – EDN: CCMYKO.
9. Шейкин В.В., Стародубов К.В., Зинюк Б.Ф. Представление скрытых марковских моделей с использованием нечетких множеств // МИЭМ НИУ ВШЭ – 2026.
10. Dubois D., Prade H. Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. – New York: Plenum Press, 1988. – 263 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОШИБКИ GCC, ПРИВОДЯЩЕЙ К SIGBUS

С.С. Широбокова

Санкт-Петербургский государственный университет

В работе исследуется ошибка кодогенерации GCC для архитектуры RISC-V, обнаруженная при сборке и тестировании библиотеки OpenSSL с использованием расширения RVV. При определённых условиях GCC генерирует векторную загрузку из адреса, для которого не гарантировано требуемое выравнивание, несмотря на использование опции `-mvector-strict-align`. На процессоре SpacemiT X60 выполнение такой инструкции приводит к исключению и аварийному завершению программы с сигналом SIGBUS. На минимальном рабочем примере воспроизведена ошибка, исследована причина некорректного выбора векторной загрузки и определено желаемое поведение компилятора.

Ключевые слова: RISC-V, невыровненный векторный доступ, кросс-компиляция, GCC.

1. Введение

Спецификация векторного расширения RISC-V не требует обязательной поддержки невыровненных векторных обращений к памяти. Если адрес элемента не имеет естественного выравнивания, реализация может либо успешно выполнить обращение, либо сгенерировать исключение `address-misaligned`. При этом поддержка невыровненных векторных обращений не зависит от поддержки невыровненных скалярных обращений [2]. При генерации кода компилятор должен учитывать требования целевой машины к выравниванию векторных обращений. Существует опция GCC `-mvector-strict-align`, которая должна сообщать компилятору о недопустимости невыровненных векторных обращений к памяти [3].

При попытке перенести библиотеку OpenSSL с помощью кросс-компилятора GCC 16.1.0 была обнаружена ситуация, при которой генерируется векторная операция загрузки для адреса с недостаточно большим значением выравнивания. На исследуемой платформе SpacemiT X60, где нет поддержки невыровненного векторного доступа, выполнение такой инструкции приводит к исключению, что вызывает завершение теста OpenSSL с ошибкой.

2. Воспроизведение проблемы

Благодаря паттерну, найденному в OpenSSL, был собран и приложен к багрепорту минимальный воспроизводимый пример [1]. Ошибка возникает в функции `repro_xor` (см. листинг 1), при обработке вызова `memcpy` в строке 15.

```
    #define SIV_LEN 16

    typedef union {
      unsigned char byte[SIV_LEN];
      uint64_t word[2];
    } SIV_BLOCK;

    __attribute__((noinline))
    void repro_xor(unsigned char const *in, size_t len,
 0    SIV_BLOCK const *d,
      SIV_BLOCK *out)
 1  {
```

```
        SIV_BLOCK t;

        memcpy(&t, in + (len - SIV_LEN), SIV_LEN);
        t.word[0] ^= d->word[0];
        t.word[1] ^= d->word[1];
        *out = t;
      }
```

Листинг 1. Код функции `repro_xor`

3. Анализ кодогенерации GCC

```
    addi                a1,a1,-16
    vsetivli            zero,2,e64,m1,ta,ma
    add                 a0,a0,a1
    vle64.v             v2,0(a0)
    vle64.v             v1,0(a2)
    addi                sp,sp,-16
```

Листинг 2. Ассемблерное представление функции `repro_xor`, сгенерированное GCC 16.1.0 с флагами `-O3 -mvector-strict-align`

Адрес `in + len - SIV_LEN`, находящийся в регистре `a0` (см. листинг 2, стр. 3), может быть невыровненным, поэтому для безопасности данные сначала копируются в выровненный буфер, а уже затем применяется операция `XOR`.

Внутри GCC для описания размера объекта данных и способа его представления используется машинный режим (machine mode) [4]. Функция `memcpy` копирует 16 байтов. На низком уровне компилятор представляет это как 128-битный вектор из 16 отдельных байтов, что соответствует машинному режиму `V16QI`. Для такой операции достаточно побайтовой загрузки, поэтому невыровненный адрес для неё безопасен. Проблема появляется из-за последующей операции `XOR`, выполняемой над переменной типа `uint64_t`. Обращения к элементам `t.word[0]` и `t.word[1]` компилятор видит как две 64-битные операции, или же машинный режим `V2DI`.

Для представления значения в машинном режиме, отличном от режима исходного объекта, GCC использует конструкцию `subreg` [5]. В данном случае появляется `subreg` с машинным режимом `V2DI`, который позволяет рассматривать исходные 16 байтов уже как вектор из двух 64-битных элементов. Пытаясь оптимизировать код, GCC на этапе объединения инструкций устраняет промежуточное представление `subreg` и формирует операцию в режиме `V2DI` (см. листинг 3). При этом значение выравнивания **`A8`** сохраняется на всех этапах преобразования, ***тогда как минимальное выравнивание 64-битных элементов режима*** **`V2DI`** ***соответствует*** **`A64`**. Во внутреннем представлении GCC значения **`A8`** и **`A64`** обозначают выравнивание 8 и 64 бит соответственно.

Таким образом, компилятор решает, что промежуточный выровненный буфер больше не нужен, избавляется от него и генерирует инструкцию быстрой векторной загрузки напрямую. Но из-за ошибки в логике GCC эта векторная инструкция (см. листинг 2, стр. 4) выполняет за-

грузку из невыровненного адреса, что приводит к исключению address-misaligned на уровне процессора и завершению программы с ошибкой sigbus.

```
                    mem:     V16QI ... A8
                               ↓
                subreg:      V2DI (mem:V16QI ... A8)
                               ↓
                    mem:     V2DI ... A8
```

Листинг 3. Последовательность преобразования из режима `V16QI` в `V2DI`

4. Сравнение с Clang 18.1.3

```
1     add             a0, a0, a1
2     addi            a0, a0, -16
3     vsetivli        zero, 16, e8, m1, ta, ma
4     vle8.v          v8, (a0)
5     vsetivli        zero, 2, e64, m1, ta, ma
6     vle64.v         v9, (a2)
7     vxor.vv         v8, v9, v8
8     vse64.v         v8, (a3)
9     ret
```

Листинг 4. Ассемблерное представление функции `repro_xor`, сгенерированное Clang 18.1.3 с флагами `-O3 -mstrict-align`

Можно видеть, что Clang в этой же ситуации не переносит загрузку из `in + len - SIV_LEN` в режим `V2DI`. Сначала векторный модуль настраивается на работу с однобайтовыми элементами (см. листинг 4, стр. 3), после чего потенциально невыровненные 16 байтов загружаются инструкцией `vle8.v`. После загрузки данные уже находятся в векторном регистре, где проблема выравнивания памяти отсутствует. Затем Clang перенастраивает векторный модуль на работу с 64-битными элементами (см. листинг 4, стр. 5) и выполняет `XOR`. Таким образом, Clang использует дополнительную инструкцию `vsetivli`, но сохраняет векторную реализацию и соблюдает требования `-mstrict-align`.

Аналогичное поведение ожидается и от GCC при использовании опции `-mvector-strict-align`. Невыровненные данные могут быть загружены как последовательность байтов без дополнительных требований к выравниванию адреса, а переход к 64-битным элементам выполнен уже после размещения данных в векторном регистре. Это позволило бы сохранить векторную реализацию, не выполняя потенциально невыровненную 64-битную загрузку из памяти.

5. Заключение

В ходе работы было проведено исследование механизма выбора векторных инструкций при копировании данных в GCC для RISC-V, определена причина некорректного учёта выравнивания и проведено сравнение кодогенерации GCC и Clang при обработке невыровненных обращений к памяти. Сравнение показало, что Clang позволяет сохранить использование векторных инструкций, избегая при этом потенциально невыровненной загрузки. По результатам исследования был подготовлен и зарегистрирован отчёт об ошибке в системе GCC Bugzilla [1].

Литература

1. GCC Bugzilla – Bug 127597. – URL: https://gcc.gnu.org/bugzilla/show_bug.cgi?id=127597 (дата обращения: 03.10.2026).

2. "V" Standard Extension for Vector Operations, Version 1.0. – URL: https://docs.riscv.org/reference/isa/v20260120/unpriv/v-st-ext.html (дата обращения: 03.10.2026).
3. GCC RISC-V Options. – URL: https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gcc/RISC-V-Options.html (дата обращения: 03.10.2026).
4. GCC Machine Modes. – URL: https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gccint/Machine-Modes.html (дата обращения: 03.10.2026).
5. GCC Registers and Memory. – URL: https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gccint/Regs-and-Memory.html (дата обращения: 03.10.2026).

СРАВНЕНИЕ И АНАЛИЗ КАЧЕСТВА МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО МАКЕТА ПОМЕЩЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ ОДНОГО ПАНОРАМНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

М.А. Шубин, В.А. Шишкина, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается задача восстановления трехмерного макета помещения на основании единственного панорамного изображения. Разрабатывается программная система для сравнения качества различных методов решения задачи, построенных на применении глубоких нейронных сетей. Система интегрирует множество открытых методов, набор общепринятых показателей качества и несколько доступных наборов данных. В рамках системы выполняется сравнение качества открытых методов и анализ возможных путей развития существующих нейросетевых моделей. Осуществляется качественная оценка восстановления макета на реальных панорамах аудиторий ННГУ.

Ключевые слова: восстановление трехмерного макета помещения, панорамное изображение, глубокое обучение, компьютерное зрение, бенчмарк.

1. Введение

В современном мире цифровое представление реальных объектов является критически важным инструментом для множества практических отраслей. Это касается и трехмерных макетов помещений, применяемых в планировании реновций реальных помещений и виртуальных турах по объектам недвижимости, а также в технологиях дополненной и виртуальной реальности. Традиционные методы создания таких моделей (например, с использованием лазерного сканирования или ручного моделирования по чертежам) требуют значительных временных и финансовых затрат, а также специального оборудования и технических знаний, что ограничивает их доступность. Один из способов уменьшить требования и затраты при восстановлении трехмерных макетов помещений – применение методов компьютерного зрения и нейросетевых моделей [1–3]. Такой подход позволяет получить приближенный макет помещения, который может либо использоваться напрямую, либо редактироваться и уточняться для большего соответствия реальному объекту.

Цель настоящего исследования состоит в том, чтобы выполнить чистое сравнение качества восстановления макета помещения с использованием открытых методов. Для этого разрабатывается программная система, которая является расширяемой с точки зрения поддерживаемых методов и тестовых наборов данных, и обеспечивает сбор общепринятых для данной задачи показателей качества. Выполняется запуск данной системы для доступных открытых методов на синтетическом наборе данных. Сравниваются полученные показатели качества и анализируются возможности развития наиболее перспективных методов. Качественное сравнение результатов восстановления макета помещения выполняется на реальных панорамах аудиторий ННГУ.

2. Постановка задачи

Задача восстановления трехмерного макета предполагает, что на входе имеется панорама помещения. При этом панорамное изображение может быть получено разными способами [3]. Технически наиболее «дешевый» способ предполагает алгоритмическое склеивание последовательности перекрывающихся фотографий, полученных в результате вращения зафиксированной камеры вокруг своей оси в плоскости, параллельной полу [4–6]. При таком подходе на итоговых панорамах могут наблюдаться различные артефакты в областях наложения изображений.

Следует отметить, что подобные алгоритмы, как правило, являются вычислительно трудоемкими, в результате чего увеличивается время решения исходной задачи.

Задача восстановления трехмерного макета помещения состоит в том, чтобы на основании входной панорамы восстановить множество точек в трехмерном пространстве, которые ограничивают помещение. Если помещение представляет собой прямоугольный параллелепипед, макет определяется набором координат углов помещения и сегментов прямых, соответствующих пересечениям плоскостей стен, потолка и пола. Углы и линии задаются в трехмерном пространстве и однозначно определяют каркас помещения в указанном частном случае. В общем виде макет определяется облаком трехмерных точек, принадлежащих полу, потолку и стенам помещения. Следует отметить, что если пол всегда представляется горизонтальной плоскостью, то потолок может быть расположен под некоторым углом наклона относительно пола (например, в случае мансарды), а стены вовсе могут быть изогнутыми. Поэтому помещения, имеющие сложную форму, затруднительно описать простыми геометрическими примитивами. В связи с этим, в литературе вводятся две модели мира для представления частных случаев трехмерных макетов помещений, которые наиболее приближены к реальным. Манхэттенская модель мира [7] описывает помещения в форме прямоугольного параллелепипеда. Модель мира Атланты [8] является обобщением предыдущей модели и позволяет представлять помещения с произвольными углами пересечения стен, в частности, помещения Г- и Т-образной формы. Помещения обеих групп можно представить в виде двумерного плана (проекция в плоскости пола) и высоты.

3. Программная система

Программная система состоит из четырех основных подсистем.

1. Подсистема загрузки панорамных изображений из открытых наборов данных. Предоставляет возможности последовательной загрузки панорам.

2. Подсистема построения трехмерного макета помещения. Обеспечивает запуск открытых моделей восстановления макета с учетом предварительной обработки входной панорамы и постобработки выхода нейросети. Подсистема предоставляет соответствующие интерфейсы для интеграции новых методов с собственными методами пред- и постобработки.

3. Подсистема вычисления метрик качества. Содержит конвертеры выходных данных методов в формат, который позволяет вычислить определенную метрику, а также обеспечивает реализацию или обертки над существующими реализациями общепринятых показателей качества [3].

4. Подсистема визуализации построенного макета. Позволяет визуализировать выходные данные методов, чтобы качественно оценить результаты восстановления макета.

Реализация выполнена на языке Python, исходный код системы выложен в открытый доступ на GitHub [9]. На момент подготовки тезисов система поддерживает запуск глубоких моделей LGT-Net [10], LED^2-Net [11], AtlantaNet [12], BiLayout [13], PSM-Net [14], DOP-Net [15], DMH-Net [16], Deep3DLayout [17] с соответствующими методами пред- и постобработки.

4. Качественные результаты восстановления макета на реальных панорамах помещений

Для качественного сравнения результатов восстановления макета помещения с помощью различных методов участниками проекта собраны последовательности перекрывающихся фотографий аудиторий ННГУ. Далее эти последовательности фотографий склеены в панорамы стандартными средствами библиотеки компьютерного зрения OpenCV. Ниже (рис. 1 и 2) приведены результаты решения задачи с использованием доступного набора методов.

Для демонстрации приведены результаты работы различных моделей в рамках реализованной программной системы на панорамах, восстановленных из фотографий аудиторий 114 и 317 второго корпуса ННГУ.

Рис. 1. Результаты восстановления макета (аудитория 317)

Рис. 2. Результаты восстановления макета (аудитория 114)

Аудитория 317 представляет собой пример простейшего помещения Манхэттенской модели мира, в то время как аудитория 114 является более сложной и имеет Г-образную зеркально отраженную форму с перепадом в высоте потолка, наблюдаемым вдоль шкафа и выемки в стене. Обе панорамы получены алгоритмически, из-за чего на них наблюдаются визуальные дефекты.

Предсказания всех моделей рассматриваются в преобразованном виде. Вместо исходного предсказанного контура комнаты используется ближайший многоугольник без самопересечений и внутренних пустот. Подобное преобразование позволяет минимизировать влияние случайных локальных смещений границ в предсказаниях моделей.

В случае аудитории 317 предсказания всех моделей, кроме Deep3DLayout, визуально близки к истинным границам. При этом все модели совершили ошибки при предсказании стены, которая видна на краях панорамы. Наиболее вероятная причина – ошибка, возникшая при алгоритмическом склеивании панорамы, из-за которой эта стена выглядит деформированной. Модель Deep3Dlayout при этом допустила ошибки в предсказании формы и высоты других стен.

Для аудитории 114 предсказания моделей LGT-Net, LED2-Net и DOP-Net визуально схожи, но содержат различные ошибки при рассмотрении в деталях. Модели LGT-Net и DOP-Net некорректно предсказали высоту. В предсказаниях моделей LED2-Net и DOP-Net стена со шкафом располагается между границами шкафа и стены. Модель LGT-Net предсказала ту же стену вдоль границы шкафа. Предсказание DMH-Net содержит ошибки в предсказании глубины стены с окнами и стены со шкафом, в то время как две другие стены предсказаны лучше, чем у других моделей с поправкой на наличие дефекта в восстановлении краев панорамы, как и в случае с аудиторией 317. Предсказанные моделью Deep3DLayout границы в большинстве случаев повернуты, а в некоторых случаях деформированы, из-за чего контур помещения сильно искажается. Предсказание модели AtlantaNet содержит наибольшее число визуальных ошибок, при этом сама предсказанная форма помещения больше похожа на овал. Также стоит отметить, что модели LGT-Net, LED2-Net и Deep3DLayout смогли распознать наличие выемки в стене со шкафом, но не смогли корректно предсказать ее форму, как видно на предсказанном плане помещения.

Модель BiLayout смогла распознать как выемку в стене со шкафом, так и выемку, в которой находится входная дверь, а также корректно предсказала высоту. Тем не менее, как и в случае с моделью Deep3DLayout, многие участки границ повернуты, что также приводит к деформации контура. Применение более сложных методов постобработки, приводящих предсказание модели к ближайшему прямоугольному многоугольнику, позволит избавиться от таких деформаций, тем самым улучшив предсказание этой модели.

5. Заключение

Задача восстановления макета помещения является актуальной и практически значимой. В настоящее время предложено значительное количество методов ее решения, которые построены на базе моделей глубокого обучения. Обзор литературы показал отсутствие общепринятого инструментария для сравнения и анализа качества решения задачи на каких-либо открытых наборах данных. Авторами предпринимается попытка разработать программную систему, позволяющую выполнять унифицированный запуск и сравнение качества моделей и методов с точки зрения общепринятых показателей, а также проводить визуальный анализ полученных результатов на реальных панорамах.

К моменту подготовки тезисов разработан прототип программной системы, проведены тестовые запуски на небольших открытых наборах данных. Выполняется подготовка синтетического набора данных для проведения полного эксперимента, включающего запуск всех доступных методов и сбор показателей качества, для последующего анализа результатов. Наряду с этим, продолжается сбор реальных панорамных изображений.

Литература

1. Zou C., Su J.W., Peng C.H., et al. Manhattan Room Layout Reconstruction from a Single 360 Image: A Comparative Study of State-of-the-Art Methods // International Journal of Computer Vision. 2021. Vol. 129. P. 1410–1431. DOI: 10.1007/s11263-020-01426-8.
2. Mohan N., Kumar M. Room layout estimation in indoor environment: a review // Multimedia Tools and Applications. 2022. Vol. 81. P. 1921–1951. DOI: 10.1007/s11042-021-11358-1.
3. Meng M., Zhu Y., Zhao Y., Li Z., Zhu Z. 3D Indoor Scene Geometry Estimation from a Single Omnidirectional Image: A Comprehensive Survey // Computational Visual Media. 2025. Vol. 11. No. 3. P. 431–464. DOI: 10.26599/CVM.2025.9450438.
4. Wang Z., Yang Z. Review on image-stitching techniques // Multimedia Systems. 2020. Vol. 26.

P. 413–430. DOI: 10.1007/s00530-020-00651-y.

5. Szeliski R. Computer Vision. Algorithms and Applications. Springer, Cham, 2023. DOI: 10.1007/978-3-030-34372-9.
6. Yan N., et al. Deep Learning on Image Stitching With Multi-viewpoint Images: A Survey // Neural Processing Letters. 2023. Vol. 55. P. 3863–3898. DOI: 10.1007/s11063-023-11226-z.
7. Coughlan J. M., Yuille A. L. Manhattan World: compass direction from a single image by Bayesian inference // Proceedings of the Seventh IEEE ICCV. IEEE, 1999. Vol. 2. P. 941–947.
8. Schindler G., Dellaert F. Atlanta world: an expectation maximization framework for simultaneous low-level edge grouping and camera calibration in complex man-made environments // Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on CVPR. IEEE, 2004. Vol. 1. pp. I–I.
9. Репозиторий проекта на GitHub. URL: https://github.com/itlab-vision/3dscanner (дата обращения: 02.10.2026).
10. Jiang Z., Xiang Z., Xu J., Zhao M. LGT-Net: Indoor Panoramic Room Layout Estimation with Geometry-Aware Transformer Network // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on CCVPR. IEEE, 2022, New Orleans, LA, USA. P. 1644-1653. DOI: 10.1109/CVPR52688.2022.00170.
11. Wang F. E., Yu-Hsuan Y., Min S., Wei-Chen C., Yi-Hsuan T. LED2-Net: Monocular 360deg Layout Estimation via Differentiable Depth Rendering // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2021. P. 3385-3394.
12. Pintore G., Agus M., Gobbetti E. AtlantaNet: Inferring the 3D Indoor Layout from a Single 360 Image Beyond the Manhattan World Assumption // Computer Vision – ECCV 2020: 16th European Conference. August 23–28, Glasgow, UK. Proceedings, Part VIII. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2020. P. 432–448. DOI: 10.1007/978-3-030-58598-3_26.
13. Tsai Y. J., Jhang J. C., Zheng J., Wang W., Chen A., Sun M., Kuo C. H., Yang M. H. No more ambiguity in 360 room layout via bi-layout estimation // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2024.
14. Wang H., Hutchcroft W., Li Y., Wan Z., Boyadzhiev I., Tian Y., Kang S. B. PSMNet: Position-aware stereo merging network for room layout estimation // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2022. P. 8616–8625.
15. Shen Z., et al. Disentangling Orthogonal Planes for Indoor Panoramic Room Layout Estimation with Cross-Scale Distortion Awareness // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2023, Vancouver, BC, Canada. P. 17337-17345. DOI: 10.1109/CVPR52729.2023.01663.
16. Zhao Y., Wen C., Xue Z., Gao Y. 3D Room Layout Estimation from a Cubemap of Panorama Image via Deep Manhattan // Computer Vision – ECCV 2022. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13661. Springer, Cham, 2022. P. 640-657. DOI: 10.1007/978-3-031-19769-7_37.
17. Pintore G., Almansa E., Agus M., Gobbetti E. Deep3DLayout: 3D reconstruction of an indoor layout from a spherical panoramic image // ACM Transactions on Graphics. 2021. Vol. 40. No. 6, Art. 250. DOI: 10.1145/3478513.3480480.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАГИРУЮЩИХ ДОЗВУКОВЫХ ГАЗОПЫЛЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ[1*]

И.Р. Янгляев, М.С. Мустайкин

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

В данной работе рассматривается математическая модель, описывающая процесс течений реагирующих газопылевых смесей в цилиндрической системе координат при существенно дозвуковых скоростях. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, учитывающих гидродинамику несущего газа и твердых частиц, межфазный обмен импульсом, теплом и массой, а также гетерогенные и гомогенные химические реакции. Сформулированы граничные условия для цилиндрических областей, что делает модель применимой для анализа полных трехмерных потоков. Представленная модель может быть использована для исследования технологических процессов, связанных с переработкой углеводородов.

Ключевые слова: газовая динамика, двухфазное течение, твердые частицы, газопылевой поток, цилиндрическая система координат, химические реакции.

1. Введение

Процессы температурного воздействия на газопылевые смеси находят широкое применение в энергетике, химической технологии и в задачах промышленной безопасности. Большинство таких аппаратов имеют цилиндрическую геометрию, а характерные скорости потоков в них являются существенно дозвуковыми. Создание эффективных математических моделей для таких течений требует учета сложного межфазного взаимодействия и химической кинетики в трехмерной постановке при сохранении вычислительной эффективности [1].

Рассматриваются дозвуковые течения многокомпонентной газопылевой смеси. В силу малости числа Маха полное давление представляется в виде суммы постоянного в расчетной области термодинамического давления и малой поправки [2, 3].

При этом течение не является несжимаемым, поскольку за счет подвода тепла от стенок и протекающих в результате этого химических реакций и, как следствие, изменения числа молей происходит существенное изменение плотности и объема смеси.

2. Математическая модель газовой фазы

Для описания несущего газа используется модифицированная система уравнений Навье-Стокса в полной трехмерной цилиндрической системе координат с разрешением всех трех компонент вектора скорости. Она включает в себя уравнение переноса массовых долей компонент, уравнение сохранения импульса, уравнение сохранения энергии (в терминах энтальпии).

3. Моделирование дисперсной фазы и условие на дивергенцию скорости

Поведение твердых частиц описывается в рамках двухтемпературного подхода. Для дисперсной фазы решаются уравнения переноса массы, импульса и энергии частиц.

Ключевой особенностью модели в приближении малых чисел Маха является явное выражение для дивергенции вектора скорости, которое выводится из уравнений состояния идеального газа, неразрывности и энергии. Это условие заменяет традиционное уравнение неразрыв-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 26-11-00095).

ности для определения гидродинамической поправки к давлению и обеспечивает учет сжимаемости, обусловленной исключительно тепловыми и химическими эффектами.

4. Химическая кинетика и граничные условия

Химические превращения описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, учитывающей как гомогенные (газофазные), так и гетерогенные (на поверхности частиц) стадии. В трехмерной цилиндрической геометрии модель явно учитывает радиальное, азимутальное и осевое распределение концентраций реагентов, температур и скоростей. Для азимутальной координаты задаются условия периодичности (при моделировании полного сечения трубы) или соответствующие граничные условия для сектора, на стенках трубы – условия прилипания для газа и заданный тепловой поток или температура.

5. Практическая значимость и области применения

Разработанная математическая модель может служить основой для построения вычислительных алгоритмов, ориентированных на решение актуальных задач современной химической физики, энергетики и проектирования высокотехнологичного оборудования. Практическая значимость работы заключается в возможности точного численного прогнозирования сложных теплофизических и химических процессов, протекающих в трубчатых аппаратах, без проведения дорогостоящих натурных экспериментов. Модель позволяет детально исследовать процессы термохимии и химического синтеза в цилиндрических проточных реакторах. Это важно для управления химическими процессами, такими как пиролиз этана и конверсия метана в ценные продукты (этилен, ацетилен, водород). Использование двухтемпературной модели газопылевой среды открывает возможности для моделирования аппаратов, в которых катализатор присутствует в виде взвешенных наночастиц.

Литература

1. Снытников В.Н., Пескова Е.Е., Стояновская О.П. Модель двухтемпературной среды газ - твердые наночастицы с лазерным пиролизом метана // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 4. С. 24–50. DOI: 10.20948/mm-2023-04-02.
2. Пескова Е.Е. Математическое моделирование процессов лазерной термохимии: диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук: 1.2.2. Саранск. 2024. 219 с.
3. Пескова Е.Е., Язовцева О.С. Исследование применения явно-итерационной схемы к моделированию дозвуковых реагирующих газовых потоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 2. С. 350–363. DOI: 10.31857/S0044466924020126.

СОДЕРЖАНИЕ

G.A. Chumarin, O.V. Ilyin
Lattice Boltzmann model with modified relaxation time for slow rarefied flows in micro channels 4

P.A. Medvedev, M.I. Kumskov
The Impact of Technical Indicators on the Quality of Financial Time Series Forecasting by the FuzzyLSTM Model 9

Н.Ф. Алексиадис, Айар Аунг Сет
О сравнительном анализе методов оптимизации комплексных нейронных сетей 14

О.Г. Антоновская
К вопросу об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова при исследовании устойчивости непрерывных динамических систем 18

С.А. Аристов, В.И. Звонилов
Гиперболические кривые на $P^1 \times P^1$ и скелеты тригональных кривых 22

Аунг Чжо Мьо, Е.М. Портнов, А.С. Алексеев, И.А.Куклев
Модель адаптивного прогнозирования координат объектов движущихся по поверхности Земли 27

Аунг Чжо Мьо, Е.М. Портнов, В. Н. Потапов
Диагностика повреждений энергосистем на основе трёхкомпонентных нечётких множеств и матриц инцидентности 33

Аунг Чжо Мьо, Тет Паин Тху, Сай Ванна Хтун
Разработка модели системной достоверности автоматизированных систем технической диагностики 40

Н.В. Блохин
Алгоритм построения векторных представлений отраслевой принадлежности компаний с использованием расширенного графа кодов ОКВЭД 44

Л.Н. Валеева, И. Никитин
Параметрический физически-информированный решатель двумерного нестационарного уравнения Гросса–Питаевского 49

А.А. Валиулин, М.Л. Цымблер
Поиск аномалий и обнаружение их предыстории в потоковых данных промышленного интернета вещей 53

Е.Н. Варсеева, И.Г. Лебедев, К.А. Баркалов
Параллельный алгоритм глобальной оптимизации и его использование для настройки параметров сложных математических моделей 59

А.Ю. Власенко, М.А. Мичуров
Гибридный подход к автоматизированной отладке фрагментированных программ на основе комбинации статического и динамического анализа 64

И.В. Володин, А.А. Алабужев
Численное моделирование динамики свободной границы при одночастотных вертикальных вибрациях методом решеточных уравнений Больцмана 68

В.А. Воробьева
О динамическом восстановлении источников квазистационарного электрического поля 72

А.А. Галиев, Х. Нуриддинов, А.И. Сайфутдинов
Моделирование плазмы высокочастотного индукционного разряда в гелии с сочетанием кинетического, гидродинамического и нейросетевого подходов* 75

Ган Ю, М.А. Кривов
Синтетические тесты для оценки максимально достижимой производительности на ускорителях Moore Threads S80 и S70 ... 78

А.А. Герасимов, М.И. Порфирьев, И.Г. Лебедев
Использование случайного леса для ускорения сходимости алгоритма глобального поиска ... 83

Д.А. Голичников
Формализация задачи автоматизированного контроля качества сварных соединений с калиброванной оценкой достоверности решений ... 88

А.В. Грезина, В.С. Метрикин, А.Г. Панасенко
Нелинейная теория диффузии в задачах с сферической симметрией ... 92

А.С. Гутянский, Е.А. Козинов
Разработка процессорного ядра на архитектуре RISC-V на базе ПЛИС ... 97

Н.С. Дюкина
Конечно-элементное моделирование полубезрганичной области в задаче о сейсмических вибрациях заглубленного сооружения ... 103

Н.С. Дюкина, Г.Е. Пономарев
Численное моделирование тонкослоистых материалов в «Логос Прочность» ... 106

А.В. Еремеев, Ю.В. Захарова, А.О. Захаров
Вычислительная сложность оптимальной рекомбинации для задач регрессии ... 110

Д.С. Жариков
Исследования процесса соударения дилатантных суспензий с подложкой ... 112

Г.В. Журавлёв, М.И. Кумсков
Символьные, численные и свёрточные методы анализа временных рядов: качество и время вычислений в задачах классификации и прогнозирования ... 116

А.С. Зайцев, К.А. Баркалов
Об использовании неинъективной развертки для редукции размерности в алгоритме поиска нуля многомерной многоэкстремальной функции ... 122

Е.А. Земсков
Pano3DBench: программный комплекс для сравнительной оценки методов понимания трехмерной сцены помещения по одному панорамному изображению ... 127

Ильев В.П., Моршинин А.В.
$(2k-1)$-приближенный алгоритм для одной задачи кластеризации вершин графа ... 130

Е.А. Каледина
Физически-информированная нейросетевая модель кинетики пиролиза газовой смеси ... 132

Д.Э. Кахян
Перенос SIMD-реализации разбора UUID на RISC-V Vector Extension ... 137

М.И. Кузнецов, М.М. Рабиа
Глобальные деформации простой алгебры Ли типа E_7 в характеристике 2 ... 141

М.И. Кузнецов, М.М. Рабиа
Деформации расширений алгебры Ли $psl(3)$ с помощью внешнего дифференцирования ... 143

И.А. Куклев, Е.М. Портнов
Разработка метода обнаружения зависающих БПЛА на основе микродоплеровских всплесков ... 145

И.А. Куклев, Е.М. Портнов
Разрешение групповых воздушных целей в радиолокационых станциях наблюдения на основе сингулярного разложения матриц характеристик измерительных каналов ... 151

Н. И. Курносов, А. В. Яганов, А. Ю. Константинов
Автоматическое открытие определяющих соотношений гиперупругих материалов с помощью термодинамически-согласованных нейросетей ... 157

В.А. Лазовский, С.В. Стасенко, И.М. Кипелкин, В.Б. Казанцев
Дофамин-модулируемая мемристивная пластичность в импульсной нейронной сети для обработки вкусовых стимулов ... 160

И.Г. Лебедев, М.А. Быкова, Д.А. Фадеев, И.А. Шумилов, А.Д. Буянов
Морфинг расчётной сетки между геометрическими моделями ... 164

М.А. Лебедев, И.Г. Черных
Разработка программного обеспечения для симуляции химических реакций в условиях межзвездной среды ... 169

Т.А. Леванова, С.М. Оленин, Н.В. Громов, Л.А. Смирнов, А.Н. Писарчик
Восстановление хаотических аттракторов в нейрон-астроцитарной среднеполевой модели из данных методами резервуарных вычислений ... 175

О.В. Любимцев, А.А. Туганбаев
Центрально существенные кольца, модульно конечные над центром ... 180

Е.М. Максимов, А.А. Власов, Д.С. Бакуневич, А.Р. Когерманов
Анализ производительности функции GEMM на процессоре Spacemit K3 ... 183

А.Е. Мальков, А.В. Лебедева, Е.Я. Мацнева, Е.Е. Рыжкова, А.Н. Писарчик
Анализ проприоцептивной компоненты ритмов ЭЭГ для оценки моторных нарушений ... 185

А.Р. Мардеев, А.И. Сайфутдинов
Численное исследование формирования ФРЭЭ в плазме короткого тлеющего разряда в аргоне с примесями атомов меди методом PIC/MCC ... 190

А.А. Маркелов, А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин
Динамические механизмы срыва локализации в кольцевом ансамбле бистабильных осцилляторов Баутина со смешанной связью ... 194

А.Ю. Мартынов, Е.А. Козинов
Метод автоматизации калибровки параметров подсистемы памяти gem5 для фиксированной аппаратной конфигурации ядра XuanTie C910 ... 198

А.Э. Медведев, В.М. Михелев
Разработка методов кросс-модального преобразования акустических сигналов в цветовые оттенки ... 203

В.С. Метрикин, И.В. Никифорова, Д.Е. Шапошников
Адаптивная модель контакта в виброударном уплотнении грунта ... 208

И.В. Митрюхин, О.С. Язовцева
Математическое моделирование нестационарного процесса окислительной регенерации катализатора гидроочистки с цилиндрической формой зерен ... 211

К.Е. Морозов, К.В. Чижов, А.М. Митягин
Смешанная динамика в системе с нелинейным центром при периодических возмущениях ... 213

М.С. Мустайкин, А.В. Панов
Параллельный вычислительный алгоритм для моделирования дозвуковых реагирующих течений в трубах круглого сечения ... 216

А.В. Мухин
Стабилизация движения гибкого ротора в электромагнитных подшипниках статической обратной связью по измеряемому выходу ... 218

А.Г. Никольская, Д.А. Рыболовлев
Доменные ограничения в состязательных атаках уклонения, обусловленные протоколом TCP ... 223

Е.В. Никульчев
Восстановление уравнений хаотической системы по наблюдаемому вектору состояния при известной группе симметрий 226

Е.В. Никульчев, А.А. Червяков, Д.Ю. Ильин
Применение ренормгрупповых преобразований в крупномасштабных системах для бинарной классификации с дисбалансом при неуверенности моделей машинного обучения 231

К.В. Новиковский, А.П. Преображенский, Ю.А. Уланова
Модель адаптивного управления маршрутными метриками OSPF при нестационарном сетевом трафике 236

Я.М. Перепелкин, С.А. Отческов, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова
Оптимизация определения местоположения объекта на фотографии на основании геокоординат из метаданных в формате Exif 240

О.А. Петров, Ю.А. Родимков
Сравнение потоковой и буферизирующей архитектур ускорителя сверточного слоя на ПЛИС 246

Привалов Л.Ю.
Итерационный зональный метод моделирования пониженного порядка для параметрических исследований термогидродинамических процессов 250

П.А. Рузанов
Методология обработки больших данных с использованием платформы HADOOP 255

П.А. Рузанов
Методы решения задач комбинаторной оптимизации на примере задачи о рюкзаке 261

С.В. Русаков, И.И. Хейфец
Оптимизированные сплайн-процедуры регуляризации численного дифференцирования 266

В.П. Савельев, Н.И. Сутягина
Об управляемости транспортного средства с ограниченной силой тяги 272

М.Ю. Сахно, С.А. Романов, Ю.В. Захарова
Оценка взаимного влияния работ методами машинного обучения при построении расписаний на многоядерном процессоре 276

С.В.Сидоров, В.Н.Сучков
Свойства целочисленных решений матричного уравнения $AX = XB$ 279

С.В. Сидоров, Г.В. Уткин
Частичное описание классов подобия целочисленных нильпотентных матриц 4-го порядка 282

Д.М. Симонов, Т.С. Зиновьев, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова
Анализ производительности классических и глубоких методов сопоставления признаковых описаний изображений на процессорах RISC-V 284

М.В. Симонов, Е.А. Панова
Разработка бенчмарка для LU-разложения плотных матриц 287

И.Е. Смирнов, А.В. Васюков
Численное моделирование волновых процессов в анизотропных конструкциях с локальным сгущением сетки 293

Н.С. Смирнова, В.А. Титарев, О.В. Кравченко
Алгоритм адаптации расчетной сетки на основе механической аналогии для трехмерных задач внешнего обтекания со скачками уплотнения 295

С.Н. Стребуляев, А.М. Круглов
К вопросу о компьютерном анализе хаотического поведения в динамических системах 297

Д.И. Тараканов, А.Ю. Пирова, И.Б. Мееров
Сравнение алгоритмов поиска кратчайшего пути на процессорах RISC-V и x86 303

В.А. Титарев
Разработка и практическое применение методов численного моделирования в задачах механики разреженного газа 305

Е.Б. Титова
Структура левого нуль-пространства матрицы ограничений многоиндексной планарной транспортной задачи 307

А.М. Трыкин, Е.П. Васильев, А.А. Серебрякова, К.К. Пухкий, Н.А. Соколов, В.Е. Турлапов
Обнаружение графических артефактов в кадрах видеоигр компактными визуально-языковыми моделями без дообучения 310

Р.Ю. Фадеев, М.А. Толстых, Г.С. Гойман
Основные направления развития глобальной модели атмосферы ПЛАВ 315

Р.А. Фазулзянов, А.И. Сайфутдинов
Моделирование ВЧИ-разряда в смеси гелия и силана в задачах синтеза функциональных наноструктур 317

И.Т. Фатыхов, С.С. Савинский
Динамика двух кубитов для определения состояния одного кубита посредством запутывающего сигнала 319

А.И. Хоменко, В.Е. Турлапов
Объяснимая модель мультимодальной сегментации опухоли мозга с выбором варианта маски её ядра 323

Н.И. Хохлов, И.А. Яковлев, Д.Д. Шевелева, О.А. Усольцева
Численное моделирование распространения сейсмических волн в планетарных моделях с применением наложенных и многоблочных сеток 329

А.М. Чесноков
Оценка масштабируемости операций Apache Ignite по универсальному закону масштабируемости 332

В.В. Шейкин, Д.В. Фролов
Нечётко-графовая и марковская модели оценки актуальности угроз безопасности информации на основе данных БДУ ФСТЭК России 337

С.С. Широбокова
Исследование ошибки GCC, приводящей к SIGBUS 343

М.А. Шубин, В.А. Шишкина, И.С. Мухин, В.Д. Кустикова
Сравнение и анализ качества методов восстановления трехмерного макета помещения на основании одного панорамного изображения 347

И.Р. Янгляев, М.С. Мустайкин
Моделирование реагирующих дозвуковых газопылевых течений в цилиндрической системе координат 353

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Труды XXVI Международной конференции

Нижний Новгород, 16–18 ноября 2026 г.

Под ред. проф. Д.В. Баландина

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

Публикуется в авторской редакции

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.